00053073

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

BOMBAY BRANCH
OF THE
ROYAL ASIATIC SOCIETY.
TOWN HALL, BOMBAY.

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 17 May, 2019

TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES.

Gx f3

TRAITE
ANALYTIQUE
DES MOUVEMENS APPARENS DES CORPS CÉLESTES;

PAR M. DIONIS DU SÉJOUR,

CONSEILLER DE GRAND'CHAMBRE;

De l'Académie Royale des Sciences de Paris; de la Société Royale de Londres; des Académies de Suede, de Gottingen, & de celle de Richemont dans les États-Unis.

TOME SECOND.

53073

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA VEUVE VALADE,

Rue des Noyers.

M. DCC. LXXXIX.

O
521
Mdi/Tra
53073

00053073

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

DANS la premiere partie de cet Ouvrage, j'ai traité ce qui eſt relatif aux Eclipſes de Soleil & de Lune; aux occultations des Etoiles par la Lune; à la réduction des lieux apparens de la Lune, aux lieux vus du centre de la Terre; aux paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil; en un mot, j'ai épuiſé toutes les queſtions dans leſquelles, étant donnés deux corps qui ſe meuvent dans l'eſpace ſuivant des loix connues, l'on détermine les apparences qui réſultent des mouvemens relatifs de ces deux corps, par rapport à un obſervateur qui, mu lui-même dans l'eſpace, ſuivant une loi donnée, a de plus un mouvement de rotation autour d'un axe donné de poſition. De nouvelles recherches vont faire l'objet de cette ſeconde partie. Dans le premier Livre, je fais voir combien l'application des latitudes corrigées, aux Problêmes géodéſiques, ſimplifie ces queſtions. Dans le ſecond Livre, je m'occupe de l'Anneau de Saturne & des différens phénomenes que préſente cet Anneau; je conſidere enfin dans le troiſieme Livre, ce qui eſt relatif aux trajectoires des Corps Céleſtes. La réunion de ces Problêmes m'a paru remplir le titre de cet Ouvrage, & renfermer toutes les queſtions que l'Analyſe peut réſoudre relativement aux mouvemens apparens des Corps céleſtes.

ANALYSE DU PREMIER LIVRE.

On connoît en Aſtronomie les courbes tracées ſur la ſurface de notre globe, & que l'on a déſignées ſous le nom de *Loxodromiques* & de *Perpendiculaires à la Méridienne.* Les premieres de ces courbes ſont principalement en uſage parmi les Navigateurs. Ce ſont celles que formeroit ſur un Sphéroïde, un point qui, dans ſon mouvement, couperoit les Méridiens ſous un même angle. Cette propriété fait ſentir l'application de ces courbes, à la Navigation. Car ſi l'on ſuppoſe qu'un vaiſſeau ſuive toujours le même aire de vent, le vaiſſeau ſera le point qui coupe les différens Méridiens ſous un

angle donné, & la détermination de ſa route dépendra des propriétés des *Loxodromiques*.

Cette application des *Loxodromiques* aux Problêmes de Navigation, n'a point échappé aux Géometres. Les propriétés de ces courbes ont été calculées dans la Sphere, & tous les cas véritablement utiles aux Navigateurs ſont connus. Je n'ai donc point prétendu ajouter de nouvelles connoiſſances, à ce que l'on ſavoit d'ailleurs ſur les *Loxodromiques*; j'ai ſeulement fait voir qu'en faiſant uſage des *latitudes corrigées*, les calculs ne ſont ni plus longs, ni moins exacts pour le Sphéroïde que pour la Sphere.

On a nommé *Perpendiculaires à la Méridienne*, les courbes formées ſur le Sphéroïde terreſtre, par le pied de différens jalons de même hauteur, dont les ſommets s'aligneroient. Si la Terre étoit ſphérique, ces courbes ſeroient des arcs de grands cercles; mais lorſque le globe ceſſe d'être une Sphere parfaite, les différens points de ces courbes ne ſont plus dans un même plan; ils forment une courbe à double courbure ſur la ſurface du Sphéroïde.

M. Clairaut, dans un Mémoire publié en 1736, avoit donné une méthode pour calculer ces lignes. A cette époque, l'Académie étoit principalement occupée de la figure de la Terre. Quelques doutes que des concluſions précipitées avoient fait naître contre le ſyſtême de Newton, partageoient le Monde ſavant. L'Académie réſolut de les éclaircir; ou plutôt elle ſe propoſa de déduire des ſeules obſervations géodéſiques, le véritable rapport des axes de notre globe. Ses vues furent ſecondées par le Miniſtre qui avoit alors le département de la Marine; les voyages néceſſaires furent entrepris; & tandis que MM. Clairaut, Le Monnier, Maupertuis, étonnoient les habitans du Cercle Polaire, par l'appareil, inconnu juſqu'alors à ces climats, de Secteurs & de Lunettes; qu'à Quito, MM. Bouguer, Godin, La Condamine, obſervoient de nouvelles Etoiles, & déterminoient la plus grande baſe qui ait été meſurée juſqu'ici ſur notre globe, les Aſtronomes qui étoient reſtés en France, meſuroient le degré du méridien entre Amiens & Paris.

Ils jettoient en même tems, les fondemens d'une entrepriſe unique encore dans ſon eſpece, & qui ſera à jamais la gloire du Gouvernement qui l'a ordonnée, & de MM. Caſſini, qui ont préſidé à ſon exécution. Je veux parler de la Carte de France. Cette Carte eſt entiérement fondée ſur les propriétés des *Perpendiculaires à la Méridienne*. On a pris un premier Méridien qui paſſe par l'Obſervatoire;

ce Méridien est représenté par une ligne droite qui s'étend du Nord au Midi; sur cette droite, toutes les parties occupent un espace proportionnel à celui qu'elles occupent sur la Méridienne de Paris, de sorte que la droite en question n'est que le développement du Méridien rectifié. A différentes distances convenables, on a élevé des *Perpendiculaires à la Méridienne*, de maniere que sur ces droites, chaque lieu occupe la place qu'il occupe véritablement sur la perpendiculaire correspondante tracée sur le Sphéroïde.

Si l'on réfléchit sur cette construction, on sera bientôt convaincu que tous les lieux situés dans la Carte sur une même Perpendiculaire, n'ont pas tous la même latitude. En effet, à mesure que l'on s'éloigne de l'origine de la Perpendiculaire, les latitudes correspondantes diminuent. Les points de la Terre qui ont une même latitude, s'éloignent de plus en plus de cette droite, en remontant vers le Nord; & le Parallele terrestre dont un des points coïncidoit avec le sommet de la Perpendiculaire à l'origine, s'en écarte du côté du Nord, à mesure que l'on s'avance sur la Perpendiculaire.

Ce que je dis des Paralleles terrestres, s'applique également aux Méridiens; & l'on seroit dans l'erreur si l'on se persuadoit que ces Méridiens sont des lignes droites paralleles à la Méridienne de Paris.

L'exposition des différentes courbes qui ont servi à tracer la Carte de France, donne une idée des questions résolues dans cette partie de mon Ouvrage. Je n'entrerai point dans le détail de toutes ces questions; je renvoie à l'Ouvrage même. Il me suffit de dire que la considération des latitudes corrigées a introduit dans les solutions, les mêmes simplifications de calcul que l'on a pu remarquer dans la premiere partie de mon Ouvrage, relativement aux questions Astronomiques. J'ai cru cependant devoir exposer ici les principaux résultats que j'ai conclus de cette théorie, relativement au véritable rapport des axes de la Terre.

Si l'on suppose la Terre homogene, Newton a démontré qu'en vertu de son mouvement de rotation, elle prend la figure d'un Sphéroïde dont les axes sont entr'eux comme 230 à 231. La comparaison des premieres mesures des Méridiens avoit fait croire à M. de Maupertuis, que les axes étoient dans le rapport de 177 à 178; depuis l'on a varié sur ce rapport, lorsque l'on a comparé de nouveaux arcs de Méridiens terrestres.

L'on ne connoît jusqu'ici que neuf arcs de Méridiens qui aient été mesurés; celui de l'Equateur, par MM. Bouguer, Godin & La Con-

damine; celui du Cap de Bonne-Espérance, par l'Abbé de la Caille; celui de la Pensilvanie, par MM. Masson & Dixon; celui de la Romagne, par le Pere Boscowich; celui du Piémont, par le Pere Beccaria; ceux de l'Autriche & de la Hongrie, par le Pere Liesganig; celui de France, par les Astronomes de l'Académie; & celui du Cercle Polaire, par MM. Clairaut, Le Monnier & Maupertuis. Il faudra bientôt ajouter celui que l'on mesure actuellement en Angleterre, avec tous les soins que mérite une opération de cette importance, & celui que mesurent en Italie les Astronomes de Milan.

Lorsque l'on a entrepris de mesurer les différens degrés des Méridiens, si l'on s'est flatté de trouver des résultats absolument conformes à ceux que donneroit une figure géométrique que l'on traceroit au compas, il faut convenir que l'on a été trompé dans son attente. Pour s'en convaincre, il suffira de comparer deux à deux les différens degrés mesurés, & d'en conclure particuliérement le rapport des axes de la Terre. Au reste, on ne doit point être étonné de ces irrégularités. Il n'est pas probable en effet, que la Nature se soit astreinte à tracer des Méridiens parfaitement réguliers; ce qui supposeroit une homogénéité parfaite entre toutes les parties de notre globe. Il est encore moins probable que les mesures des différens Astronomes soient exemptes de toute erreur. D'ailleurs est-on sûr que ces Astronomes aient employé précisément la même toise, & que cette toise ne se soit point altérée dans les transports?

On doit conclure de ces remarques, qu'il est impossible d'avoir un rapport des axes de la Terre qui satisfasse rigoureusement à tous les degrés mesurés; il faut donc adopter celui qui résulte de la comparaison du plus grand nombre de ces degrés; & ce rapport me paroît être, à très-peu près, celui de 320 à 321. Voici sur quoi cette assertion est fondée.

Si l'on compare successivement le degré du Pérou, aux différens autres degrés, l'on conclura, par un résultat moyen, que les axes de la Terre sont dans le rapport de 297 à 298. La comparaison du degré du Pérou au degré de France, donne le rapport de 306 à 307. Ce dernier rapport satisfait à l'arc du Méridien mesuré en France, depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan. La comparaison des longueurs du Pendule sous les différentes latitudes donne un rapport un peu au-dessous de celui de 320 à 321; & M. de la Place, dans un Mémoire sur la figure des Sphéroïdes, a déduit ce rapport, de la théorie physique de la Terre. On voit donc que ce dernier rapport a l'avan-

tage d'être indiqué par la Théorie, & qu'elle ſe rapproche infiniment des meſures géodéſiques.

Telles ſont les queſtions que j'ai traitées dans le premier Livre; paſſons à l'analyſe du ſecond.

ANALYSE DU SECOND LIVRE.

L'Anneau de Saturne eſt peut-être, de tous les Corps Céleſtes, celui qui préſente les Phénomenes les plus ſinguliers. Inconnu à toute l'Antiquité, il fut découvert par Galilée, au commencement du dernier Siecle. Les Lunettes dont on commençoit à faire uſage, devoient néceſſairement changer la face de l'Aſtronomie. Les premiers eſſais de Galilée, lui firent appercevoir les Satellites de Jupiter & l'Anneau de Saturne. L'exemple de notre Lune avoit appris qu'une Planete principale pouvoit être accompagnée de Planetes ſecondaires qui lui ſervent de Satellites. Ainſi quand Galilée annonça aux Savans, que Jupiter étoit accompagné de quatre Satellites, on ne vit dans cet Aſtre qu'une Planete plus favoriſée par l'Auteur de la Nature, & qu'il avoit voulu, en quelque ſorte, dédommager de ſon éloignement du Soleil. Il n'en étoit pas de même de l'Anneau de Saturne dont on n'avoit aucune idée; auſſi voyons-nous que les Phénomenes relatifs à cet Anneau, furent long-tems un Problême pour les Aſtronomes. La diverſité de ſes aſpects, les formes différentes qu'il paroît donner à la Planete, exercerent leur ſagacité. Galiſée crut d'abord que c'étoit deux Satellites adhérens au corps même de Saturne. Son imagination égayée par les fictions riantes de la mythologie, tranſportoit à la Planete, ce que les Poëtes ont dit du vieux Saturne; ces Satellites étoient deux domeſtiques affidés qui avoient été donnés à ce Pere des Tems, pour avoir ſoin de ſa décrépitude.

La conjecture de Galilée n'eſt pas la ſeule que l'on ait propoſée ſur ce ſujet. Roberval ſoupçonnoit que les phénomenes que l'on obſervoit, étoient cauſés par des vapeurs qui s'élevant de l'Equateur de Saturne, nous réfléchiſſent la lumiere du Soleil. Dominique Caſſini attribuoit ces apparences, à un eſſain de Satellites ſi multipliés & ſi proches les uns des autres, qu'on ne pouvoit appercevoir d'intervalle entr'eux. Riccioli prétendoit que Saturne étoit environné d'une armille mince, plane, elliptique, adhérente à la Planete en deux points. D'autres Philoſophes croyoient que les Phaſes de Saturne venoient de la figure particuliere de cet Aſtre.

Telles étoient les opinions des Savans ſur les apparences que nous offre Saturne, lorſqu'en 1655, Huyghens donna enfin la véritable explication de ces Phénomenes. Il fit voir que toutes ces apparences ſont occaſionnées par un Anneau fort mince & preſque plan, dont Saturne eſt environné. Le diametre de cet Anneau eſt à celui du globe de Saturne, comme ſept eſt à trois; l'eſpace vide entre le globe & l'Anneau eſt, à-peu-près égal à la largeur de l'Anneau, & cette largeur eſt le tiers du diametre de Saturne. Son plan eſt incliné d'environ $31^{d}\ 20'$ ſur l'Ecliptique; ſon nœud ſur l'Ecliptique, eſt ſitué dans le dix-ſeptieme degré de la Vierge. Il n'eſt point lumineux par lui-même; ſemblable à toutes les Planetes, il réfléchit la lumiere qu'il reçoit du Soleil; il faut donc, pour qu'il ſoit viſible à nos yeux, que le plan éclairé par le Soleil ſoit tourné vers la Terre.

Il n'eſt plus queſtion de révoquer en doute cette brillante découverte qui eut d'abord des contradicteurs, même parmi les Aſtronomes. Elle a reçu du tems le ſceau de la démonſtration. Il ne reſte qu'à déterminer les élémens de l'Anneau de Saturne, au moyen des Phénomenes déja obſervés, pour en conclure ceux qui auront lieu dans les Siecles à venir.

Tel eſt l'objet que je me propoſe dans cette partie de mon Ouvrage. Je n'examine point à quel méchaniſme cet Anneau doit ſon origine; ſi ce ſont les débris d'un globe beaucoup plus conſidérable autrefois, & dont il ne reſte plus que l'Equateur; ou s'il s'eſt détaché de Saturne, par un excès de force centrifuge. Toutes ces brillantes imaginations ſoutiendroient avec peine l'épreuve du calcul. Ce qui me paroît de plus plauſible à cet égard, c'eſt que le même méchaniſme qui a formé l'Anneau, préſide à ſa conſervation, & que la loi doit être telle que l'Anneau ſubſiſteroit encore s'il devenoit fluide.

Ces conſidérations ſemblent exclure l'idée que l'Anneau ſoit ſoutenu par la ſeule peſanteur de ſes parties; ainſi qu'un vaſte pont qui environneroit la Terre ſe, ſoutiendroit, dit-on, ſans piliers; & s'il m'étoit permis de haſarder quelques conjectures, je croirois que toutes ſes parties doivent être animées d'une force centrifuge propre à contrebalancer l'effort de la peſanteur qui le précipite vers le centre de Saturne. Sans cela, il feroit à craindre que la force toujours agiſſante de la gravité, ne détruiſît bientôt un ouvrage auſſi ſingulier de la Nature. Revenons à notre objet.

Si l'on conſidere géométriquement le Problème qui nous occupe,

il eſt aiſé de voir qu'il ſe réduit à l'énoncé ſuivant. *Soit ſuppoſé dans l'eſpace, un plan mu parallélement à lui-même ſuivant une certaine loi donnée, déterminer la poſition de ce plan, ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique, le parallćliſme de ſes différentes interſections avec l'Ecliptique, &c. par la ſeule condition qu'à de certains inſtans donnés la Terre & le Soleil ont paſſé par ce plan.*

Ce Problême peut être réſolu trigonométriquement, & c'eſt ſous ce point de vue qu'on l'a conſidéré juſqu'ici. Mais il faut en convenir; les méthodes trigonométriques peuvent ſervir à déterminer les phénomenes pour un inſtant donné, lorſque les élémens de l'Anneau ſont connus; mais limitées par leur nature à des cas particuliers, elles n'apprennent rien ſur l'enſemble général du Problême. Il faut donc avoir recours à l'Analyſe, pour embraſſer les Phénomenes dans toute la durée des tems.

Deux cauſes différentes font diſparoître l'Anneau de Saturne; la premiere, lorſque le plan de l'Anneau venant à paſſer par le Soleil, les rayons lumineux émanés de cet Aſtre parallélement au plan, gliſſent & ne ſont point réfléchis; la ſeconde, lorſque le plan ſitué entre le Soleil & l'Obſervateur, préſente à la Terre ſa ſurface obſcure. De quelque maniere que l'on enviſage le Problême de l'Anneau de Saturne, toutes les équations auxquelles on parvient, doivent donc ſe réduire à deux; l'une relative au paſſage du plan de l'Anneau par le centre du Soleil; l'autre relative au paſſage de la Terre par le plan de l'Anneau; car c'eſt dans ces deux circonſtances que l'Anneau commence à diſparoître & à reparoître. Les élémens de Saturne & de la Terre dans leurs orbites reſpectives, & la poſition de l'Anneau dans l'eſpace, ſont par conſéquent les ſeuls élémens d'où dépendent les Phénomenes.

Relativement à l'Anneau de Saturne, on peut ſe propoſer pluſieurs queſtions.

Etant donnés les Phénomenes obſervés à une certaine époque, on peut demander quels étoient alors les élémens de l'Anneau. On peut, en comparant les élémens de l'Anneau à différentes époques, demander ſi le nœud répond toujours aux mêmes Etoiles, de ſorte qu'il n'ait que des mouvemens apparens, ceux de Préceſſion, de Nutation, ou s'il a des mouvemens qui lui ſoient propres; ſi ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique eſt conſtante, ou ſi elle ſouffre des altérations. On peut enfin demander une équation qui, ſans être compliquée, repréſente l'enſemble des Phénomenes avec une exactitude ſuffiſante.

Je m'occupe d'abord de ce Problême. Après avoir donné une idée générale des principales questions que je me propose d'examiner, je fais voir que ce dernier Problême est susceptible d'une Analyse simple; voici les fondemens de cette Analyse.

Puisque Saturne est environné d'un Anneau qui se meut avec cette Planete, en gardant toujours son parallélisme, si l'on suppose le plan de cet Anneau indéfiniment prolongé, de sorte qu'il coupe le plan de l'Ecliptique terrestre; il est évident, 1°. que ce plan, entraîné par le mouvement de Saturne autour du Soleil, aura toujours une intersection avec le plan de l'Ecliptique; 2°. que ces différentes intersections seront toutes paralleles entre elles; 3°. que si par le Soleil, l'on mene sur le plan de l'Ecliptique, une droite perpendiculaire à ces intersections, & que l'on suppose un corps mu dans cette droite, avec une vîtesse égale à celle de l'intersection mobile du plan de l'Anneau & de l'Ecliptique, ce corps sera toujours dans le plan de l'Anneau; 4°. enfin que le mouvement ne peut manquer d'être à très-peu près uniforme dans la droite dont il s'agit, attendu le mouvement presque uniforme de Saturne dans son orbite, pendant l'intervalle de tems que l'on considere. Si donc l'on néglige l'excentricité de l'orbite de la Terre, & cette négligence est très-permise dans ce cas, le Problême se réduit à déterminer, 1°. les instans où deux corps mus uniformément avec des vîtesses quelconques, l'un sur le diametre d'un cercle, & l'autre sur la circonférence, se trouvent à la fois dans la même ordonnée au cercle; 2°. l'instant où le corps mu sur le diametre, parvient au centre. Cette construction conduit à deux équations, dont l'une est transcendante & renferme un arc de cercle avec son cosinus; & l'autre est algébrique & seulement du premier degré par rapport à l'inconnue.

Il ne suffisoit pas d'avoir mis le Problême en équation, il falloit d'ailleurs connoître dans tous les cas, le nombre des racines réelles de l'équation transcendante qui résout la question. En effet les phases de l'Anneau dépendent de ces racines. Je laisse aux Analystes à apprécier les difficultés que présentoit cette question, & les moyens que j'ai mis en usage. Il me suffit de dire que j'ai déterminé pour toutes les combinaisons possibles entre les connues, le nombre des racines réelles de l'équation dont il s'agit; cette partie de mon Ouvrage peut être regardée comme une théorie complete de ce genre de courbes.

Je ne me suis pas contenté d'appliquer le calcul à la Terre; j'ai

cherché

cherché quelles équations auroient lieu pour un obſervateur placé dans Herſchell, Jupiter, Mars, Vénus, Mercure. Voici ce que m'ont appris les réſultats. Pour un habitant d'Herſchell, de Jupiter, de Mars, de la Terre & de Vénus, l'Anneau diſparoît & reparoît eſſentiellement une fois à chaque demi-révolution de Saturne autour du Soleil; mais il y a telles circonſtances qui donnent deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau. Pour un habitant de Mercure, l'Anneau diſparoît & reparoît eſſentiellement deux fois à chaque demi-révolution de Saturne; & il y a telles circonſtances qui donnent trois diſparitions & trois réapparitions. Ces circonſtances dépendent du lieu de la Planete dans ſon orbite, à l'inſtant où le plan de l'Anneau paſſe par le centre du Soleil.

Les recherches auxquelles je m'étois livré précédemment ſur les racines de l'équation qui réſout le Problême, m'avoient appris qu'il étoit facile d'avoir une formule pour déterminer, à une époque quelconque, le nombre des diſparitions de l'Anneau, en partant des Phénomenes obſervés dans une certaine Année. Cette réflexion m'a paru trop importante pour ne pas y donner toute l'attention qu'elle méritoit; & j'ai donné une formule par laquelle on parvient à déterminer, pour une époque quelconque, le nombre des diſparitions de l'Anneau. On doit ſentir que cette formule renferme le rapport des tems des révolutions de Saturne & de la Terre autour du Soleil, & qu'elle ſuppoſe de plus que les mouvemens de Saturne n'éprouvent aucunes perturbations. Les Aſtronomes ne ſont pas d'accord ſur tous ces points; mais il eſt facile de faire entrer ces conſidérations dans le Problême, ſans le compliquer.

Comme cette partie de la théorie eſt abſolument nouvelle, j'ai cru que l'on verroit avec plaiſir, le réſultat des formules appliquées aux Phénomenes qui ont eu lieu depuis le commencement du dernier Siecle, c'eſt-à-dire, depuis la découverte de l'Anneau de Saturne par Galilée, juſqu'en 1900. Dans cet intervalle de trois cents ans, les Années qui préſentent des diſparitions & des réapparitions de l'Anneau ſont 1612, 1626, 1642, 1656, 1671, 1685, 1701, 1715, 1730, 1744, 1760, 1774, 1789, 1803, 1819, 1832, 1848, 1862, 1878, 1891.

En 1612, 1626, 1685, 1701, 1744, 1760, 1803, 1819, 1878 & 1891, l'on n'a qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'Anneau : en 1642, 1656, 1671, 1715, 1730, 1774, 1789, 1832, 1848, 1862, l'on a deux diſparitions & deux réap-

paritions de l'Anneau. En général le nombre des Années dans lesquelles l'on observé deux disparitions & deux réapparitions de l'Anneau, est plus considérable relativement à la Terre & à Vénus, que celui où l'on n'observe qu'une seule disparition & une seule réapparition. Le contraire a lieu pour un Observateur placé dans Herschell, dans Jupiter & dans Mars.

La même formule m'a conduit naturellement à l'examen d'une période que l'on a cru ramener le même nombre des disparitions de l'Anneau de Saturne. « Ce n'est que tous les trente ans, a-t on » dit d'abord, que l'on a quatre phases à observer ». On a prétendu ensuite que cette période pouvoit être de cinquante-neuf ans.

La seule inspection de la formule, m'a fait voir qu'aucune de ces assertions n'est fondée. La premiere est démontrée fausse par les résultats que je viens de mettre sous les yeux. Quant à la seconde, les Phénomenes de l'Année 1671, relativement à cette hypothese, répondent à ceux de l'Année 1612; en 1612, l'on n'avoit qu'une disparition & une réappartion de l'Anneau; en 1671, l'on a eu deux disparitions & deux réapparitions. Les Phénomenes des Années 1701 & 1760 répondent à ceux de l'Année 1642; en 1642, l'on avoit deux disparitions de l'Anneau; en 1701 & 1760, l'on n'a eu qu'une seule disparition & une seule réapparition. Si l'on part, à la vérité, de l'Année 1626, l'on a quatre époques de suite, éloignées de 59 ans chacune, lors desquelles l'on n'a observé qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'Anneau; la période sera en défaut en 1862. Si l'on part de l'Année 1656, l'on a pareillement quatre époques de suite, éloignées de 59 ans chacune, lors desquelles l'on a observé deux disparitions & deux réapparitions de l'Anneau; la période sera en défaut en 1891. Il est vrai que d'une époque à l'autre, il n'y a qu'environ 27 degrés de différence dans les lieux de la Terre, à l'instant des passages respectifs de l'Anneau par le Soleil; par des compensations d'Analyse, cette différence peut quelquefois ne pas produire une très-grande différence dans les résultats, comme il est arrivé en 1715 & 1774; mais ce sont des hasards sur lesquels on ne doit pas compter.

Jusqu'ici, je n'ai examiné pour chaque époque, que les questions relatives au nombre des racines réelles de l'équation particuliere qui détermine les disparitions & les réapparitions de l'Anneau de Saturne; il devoit entrer dans le plan de cet Ouvrage, de donner ces équations & de discuter leurs racines. Comme l'Anneau de Sa-

turné à une épaisseur quelconque; que d'ailleurs l'Observateur cesse de le voir quelque tems avant son passage par le centre de la Terre ou du Soleil, on doit, dans un calcul rigoureux, tenir compte de cette épaisseur en partie réelle & en partie hypothétique. D'après cette remarque, je donne pour chaque Année, les équations relatives aux deux surfaces antérieure & postérieure de l'Anneau, & à un plan mené par son centre, parallélement à ces surfaces. J'applique ensuite le calcul, aux Années dont il a été question ci-dessus, & qui sont comprises dans l'intervalle de 1600 à 1900. Je rapproche les observations du calcul; voici le résultat de ce travail.

En 1612, l'Anneau a été sur le point de disparoître, vers le 24 Juin. A cet instant, la Terre s'est trouvée fort proche du plan de l'Anneau; c'étoit un *maximum* d'approximation de ce plan & de la Terre. Ces deux corps se sont ensuite éloignés, & la véritable disparition de l'Anneau n'a eu lieu que le 30 Décembre 1612, la réapparition est arrivée le 18 Février suivant.

M. Huyghens, dans son *Systema Saturnium*, rapporte les observations qui furent faites cette Année-là, par Galilée. D'après ces observations, l'Anneau étoit encore visible au mois de Juin 1612, vers le Solstice d'Eté. Il cessa d'être apperçu depuis le commencement de Septembre 1612, jusqu'au mois de Février 1613, tems auquel Saturne se plongea dans les rayons du Soleil.

Il y a apparence qu'avec de plus fortes lunettes, Galilée auroit vu l'Anneau beaucoup plus long-tems, & que cet Anneau n'auroit disparu que vers la fin de Décembre 1612. Je remarquerai aussi qu'il est singulier que Galilée ait cessé de voir les anses de Saturne, dès le mois de Septembre 1612, tems auquel, d'après le calcul, l'Anneau étoit assez éloigné de disparoître, & qu'il l'ait vu vers le Solstice d'Eté, tems auquel il étoit infiniment plus près de la disparition.

En 1626, l'Anneau de Saturne a disparu le 10 Septembre, & il a reparu le 16 du même mois; de sorte que la disparition donnée par le calcul, n'a duré que six jours; d'ailleurs Saturne étoit alors plongé dans les rayons du Soleil. Les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'Anneau, auroient donc pu échapper aux Observateurs les plus assidus; & il paroît que M. Huyghens a jugé bien séverement les Astronomes de ce tems-là, lorsque dans son *Systema Saturnium*, il attribue le défaut d'observations, à l'indifférence ou à l'impéritie des Astronomes.

En 1642, l'Anneau a disparu une premiere fois le 31 Mars; il a reparu le 17 Juin; il a disparu une seconde fois le 18 Octobre, & a reparu enfin le 19 Décembre.

M. Huyghens, dans son *Systema Saturnium*, fait mention des observations qui furent faites à cette époque, par Gassendi & par les autres Astronomes du tems. Il n'est point question de la premiere disparition de l'Anneau, celle que le calcul indique avoir eu lieu depuis le 31 Mars jusqu'au 17 Juin. Il faut remarquer que pendant cet intervalle, Saturne avoit été quelque tems plongé dans les rayons du Soleil, & qu'ainsi cette disparition a pu échapper aux Observateurs. Quant à la seconde disparition de l'Anneau, elle paroît avoir été observée, depuis le commencement d'Août 1642, jusqu'au commencement de Février 1643. Cette différence entre le calcul & les observations vient de l'imperfection des lunettes dont on faisoit alors usage.

En 1656, l'Anneau a disparu une premiere fois le 24 Octobre 1655; il a reparu le 1 Mars 1656; il a disparu une seconde fois le 8 mars, & a reparu enfin le 19 Juillet 1656.

Cette Année sera à jamais célebre dans les fastes de l'Astronomie, par l'Ouvrage de M. Huyghens, intitulé *Systema Saturnium*, dont les observations de 1656 furent l'occasion, & dans lequel l'Auteur développa le premier, la véritable théorie des disparitions & des réapparitions de l'Anneau de Saturne. Voici au surplus comment s'explique cet illustre Astronome, au sujet des observations faites en 1656.

« Le 16 Janvier 1656, j'observai Saturne pour la premiere fois » depuis sa sortie des rayons du Soleil; il avoit perdu ses anses. » Quelques Astronomes l'avoient observé sans anses, dès la fin de » Novembre 1655. Un voyage que je fus obligé de faire, m'avoit » empêché de commencer plutôt mes observations. Le 13 Octo» bre 1656, les anses de Saturne avoient reparu ».

M. Huyghens auroit pu revoir les anses de Saturne beaucoup plutôt, & dès la fin de Juillet, quelque tems avant que Saturne fût plongé dans les rayons solaires. Mais comme il n'étoit pas guidé par une théorie appliquée à des données certaines, il n'est pas étonnant que cet instant précis, qu'il n'avoit pu calculer d'avance, lui ait échappé. Il en est de même de la réapparition instantanée de l'Anneau, que le calcul indique avoir eu lieu depuis le 1 Mars 1656 jusqu'au 8 Mars de la même Année. On ne peut trop regretter

que l'on ait manqué cette importante obſervation, qui auroit jetté beaucoup de lumiere ſur les véritables élémens de l'Anneau.

En 1671, l'Anneau a diſparu une premiere fois le 31 Mai; il a reparu le 22 Juillet; il a diſparu une ſeconde fois le 5 Décembre, & a reparu enfin le 12 Février 1672.

MM. Maraldi & Huyghens nous ont conſervé les obſervations faites à cette époque par Dominique Caſſini. Saturne fut apperçu ſans anſes à la fin de Mai, la premiere fois qu'il fut obſervé depuis ſa ſortie des rayons du Soleil. Il avoit repris ſes anſes le 11 Août; il les perdit le 13 Décembre, & ne les avoit pas encore recouvrées, lorſqu'en Février 1672, il ſe plongea dans les rayons du Soleil.

Ce que rapporte M. Huyghens ſur ces obſervations, peut faire juger quel étoit alors l'état des connoiſſances aſtronomiques, relativement à l'Anneau de Saturne. Cet Aſtronome avoit développé dès 1655, la véritable théorie de ſes diſparitions & de ſes réapparitions périodiques; cependant en 1671, il ne s'attendoit point à une interruption dans la phaſe ronde de Saturne; & il fut fort ſurpris d'apprendre que Saturne, après avoir perdu ſes anſes à la fin de Mai, les avoit recouvrées au commencement d'Août. Quoi qu'il en ſoit, il annonça qu'il les reperdroit une ſeconde fois, & l'événement a juſtifié ſa prédiction.

Relativement aux obſervations de Dominique Caſſini, faites en 1671, le calcul m'a fait voir que l'on doit commencer à compter de cette époque, les bonnes obſervations ſur l'Anneau de Saturne. L'obſervation du 13 Décembre 1671 paroît très-préciſe; celle du 11 Août eſt un peu tardive, & ſe reſſent du défaut de connoiſſances préalables ſur l'inſtant de la réapparition de l'Anneau. Quant à l'obſervation de la fin de Mai, quoiqu'elle ſe rapproche infiniment du calcul ſi on la rapporte au 31 de ce mois, elle eſt énoncée dans des termes trop vagues pour être employée à des déterminations délicates.

En 1685, l'Anneau a diſparu le 21 Août, & a reparu le 4 Septembre. Les Phénomenes ſe ſont paſſés dans l'eſpace de quinze jours. Pendant ce tems-là, Saturne fut toujours plongé dans les rayons du Soleil. On ne doit donc pas être étonné qu'à cette époque l'on n'ait pu voir Saturne ſans anſes, quoique MM. Huyghens & Caſſini en Europe, & le Pere Thomas à Macao, ſur les côtes orientales de l'Aſie, l'ayent obſervé avec la plus grande aſſiduité.

En 1701, l'Anneau a disparu le 24 Mars; Saturne étoit alors dans les rayons du Soleil; il a reparu le 22 Mai, Saturne commençoit à se dégager du Soleil. Le 20 Novembre l'Anneau a été sur le point de disparoître; c'étoit un *maximum* d'approximation du plan de l'Anneau & de la Terre.

Cette Année ne fournit aucune observation de la phase ronde de Saturne. Nous savons seulement qu'elle étoit passée le 20 Juillet. On ne voit pas non plus que l'on ait observé la grande diminution de lumiere des anses de Saturne, ou peut-être même la disparition totale de l'Anneau, qui a dû avoir lieu à la fin de Novembre 1701. Cette circonstance singuliere eût été très-importante à constater. Nous aurons plus d'une fois à regretter que des observations utiles n'aient point été faites.

En 1714, l'Anneau a disparu une premiere fois le 17 Octobre; il a reparu le 5 Février 1715; il a disparu une seconde fois le 21 Mars, & a reparu enfin le 11 Juillet.

L'époque que nous considérons a donné lieu à d'excellentes recherches de M. Maraldi. Ses observations faites avec tout le soin possible, sont un modele de précision & d'exactitude dans ce genre. Sans entrer dans aucun détail sur ces observations qui doivent servir de base à toutes les recherches que l'on se proposera de faire sur l'Anneau de Saturne, il suffit de remarquer que la premiere disparition de l'Anneau a été fixée au 12 Octobre 1714, avec quelque incertitude; que la premiere réapparition a été vue le 10 Février 1715; que la seconde disparition a été observée le 23 Mars de la même Année, & qu'enfin l'anneau a reparu pour la seconde fois le 12 Juillet 1715.

En 1730, l'Anneau a disparu une premiere fois le 16 Mai; il a reparu le 10 Août; il a disparu une seconde fois le 10 Novembre, & a reparu en dernier lieu le 6 Février 1731.

Quoique l'Année 1730 ait été très-favorable aux observations de l'Anneau de Saturne, on ne voit pas que les Astronomes s'en soient occupés à cette époque. On croit cependant que si le recueil des observations de M. Godin n'avoit pas été perdu, on auroit pu en trouver de relatives à cet objet.

En 1744, l'Anneau a disparu le 25 Juillet; Saturne commençoit à se plonger dans les rayons du Soleil. Il a reparu le 29 Août; Saturne étoit beaucoup plus engagé dans les rayons du Soleil, lors de ce dernier Phénomene que lors du premier. Indépendamment

de ces résultats, le 26 Décembre 1743, l'Anneau a été sur le point de disparoître ; c'étoit un *maximum* d'approximation du plan de l'Anneau & de la Terre.

L'époque que nous considérons est remarquable par l'Ouvrage de M. Heinsius, sur les Phénomenes relatifs aux disparitions de l'Anneau de Saturne. Cet Ouvrage réunit à une théorie profonde, l'avantage d'avoir conservé les observations faites en 1744. M. Heinsius ne vit point l'Anneau disparoître. Comme cet Astronome observoit à Pétersbourg, & que, sous cette latitude, les Crépuscules des mois de Juin & de Juillet sont beaucoup plus longs qu'à Paris, les Phénomenes se passerent pendant le tems que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil. Quant à la tendance de l'Anneau à disparoître vers la fin de Décembre 1743, elle n'échappa point à M. Heinsius. Il fixe au 16 Décembre 1743, vieux style, la plus grande obscurité observée des anses de Saturne, ce qui est entiérement conforme au calcul.

En 1760, l'Anneau a disparu le 19 Mars ; Saturne étoit alors dans les rayons du Soleil. Il a reparu le 25 Avril ; Saturne commençoit à se dégager des rayons solaires. Indépendamment de ces Phénomenes, l'Anneau a dû beaucoup diminuer de lumiere le 20 Novembre 1760 ; c'étoit un *maximum* d'approximation du plan de l'Anneau & de la Terre.

On ne connoît les observations faites en 1760, que par ce qu'en rapporte M. Le Monnier. Suivant cet Astronome, Saturne s'étoit plongé dans les rayons du Soleil le 8 Février ; à cette époque on voyoit encore ses anses. Le 15 Avril, les anses ne paroissoient pas. Le 12 Mai, les anses étoient foibles & obscures. Quant à la diminution de la lumiere de l'Anneau, qui a eu lieu vers la fin de Novembre, il ne paroît pas qu'elle ait été observée. L'on n'avoit point encore d'idée bien nette de ces *maxima* d'approximation de la Terre & de l'Anneau.

Nous voici arrivés à l'époque de 1774. Suivant le calcul, l'Anneau devoit disparoître une premiere fois le 11 Octobre 1773 ; il devoit reparoître le 9 Janvier 1774 ; il devoit disparoître une seconde fois le 4 Avril 1774, & reparoître enfin le 2 Juillet de la même année.

Je ne rapporterai point toutes les observations de ce Phénomene faites dans les différentes parties de l'Europe ; on peut les lire dans le corps même de l'Ouvrage. Je remarquerai seulement que les

calculs s'accordent aussi parfaitement qu'il est possible, avec les observations de M. Messier.

Après avoir examiné ce qui est relatif aux époques passées, je considere sommairement ce qui regarde les observations futures.

En 1789, l'Anneau disparoîtra d'abord le 5 Mai; le Phénomène pourra être observé le matin avant le lever du Soleil; l'Anneau reparoîtra ensuite le 24 Août; il disparoîtra une seconde fois le 16 Octobre, & reparoîtra enfin le 30 Janvier 1790.

L'année 1789 sera donc favorable aux observations de l'Anneau de Saturne; il faudra seulement avoir attention d'observer Saturne le plutôt qu'il sera possible, lorsque cet Astre se dégagera le matin des rayons du Soleil, en Mai 1789. Il faudra aussi le suivre le plus longtêms qu'il sera possible, lorsqu'il se plongera dans les rayons solaires.

En 1803, l'Anneau disparoîtra le 28 Juin; Saturne commencera à s'approcher du Soleil. Il reparoîtra le 23 Août; Saturne sera alors plongé dans les rayons solaires. Vers le 26 Decembre 1802, les anses seront sur le point de disparoître.

Les Phénomenes de l'année 1803 ont beaucoup d'analogie avec ceux de 1744. La diminution de la lumiere des anses de Saturne, qui aura lieu à la fin de 1802, sera même plus intéressante à observer que celle qui a eu lieu à la fin de 1743; & la disparition de la fin de Juin 1803, sera probablement visible, quoique le Phénomene analogue ait échappé aux Astronomes en 1744.

Il y a grande apparence qu'en 1819 la phase ronde ne pourra pas être observée. L'Anneau disparoîtra le 13 Mars, & reparoîtra le 30 du même mois; pendant cet intervalle, Saturne sera plongé dans les rayons solaires.

L'époque de 1832 sera très-favorable aux observations de l'Anneau de Saturne. L'Anneau disparoîtra une premiere fois le 4 Octobre 1832; Saturne commencera à sortir des rayons du Soleil. Il reparoîtra le 1[illegible] Décembre de la même Année; il disparoîtra une seconde fois le 23 Avril 1833, & reparoîtra en dernier lieu le 20 Juin 1833. Comme les observations des Années 1714 & 1773, ont fait voir qu'on pouvoit observer Saturne très-près de sa sortie des rayons solaires, il y a grande apparence que la premiere observation, celle du 4 Octobre 1832, qui paroît présenter le plus de difficultés, pourra avoir lieu.

En 1848, l'Anneau disparoîtra le 27 Avril; Saturne commencera à se dégager des rayons du Soleil, & le Phénomene pourra être

observé

obfervé le matin. L'Anneau reparoîtra le 7 Septembre 1848; il difparoîtra une feconde fois le 19 Septembre, & reparoîtra enfin le 24 Janvier 1849; Saturne commencera alors à entrer dans les rayons du Soleil.

Une circonftance finguliere rend remarquable l'époque de 1848; c'eft la réapparition momentanée de l'Anneau, depuis le 7 Septembre 1848 jufqu'au 19 du même mois. Ce Phénomene, dont nous avons déja parlé fous l'Année 1656, & qui ne fut point alors obfervé, n'échappera certainement pas aux Aftronomes en 1848. On fent affez combien il fera intéreffant, pour déterminer les élémens de l'Anneau.

En 1862, l'Anneau difparoîtra le 2 Décembre 1861; il reparoîtra le 24 Janvier 1862; difparoîtra une feconde fois le 2 Juin de la même Année, & reparoîtra enfin le 17 Août. Cette derniere obfervation pourra être difficile, foit à caufe du Crépufcule, foit parce que Saturne commencera à fe plonger dans les rayons du Soleil.

Quelqu'attention qu'apportent les Aftronomes à faifir les inftans favorables, ils ne verront probablement pas la phafe ronde en 1878. L'Anneau difparoîtra le 4 Mars, il reparoîtra le 8 Mars, & pendant ce court intervalle de tems, Saturne fera plongé dans les rayons du Soleil.

En 1891, l'Anneau difparoîtra le 27 Septembre; Saturne commencera alors à fortir des rayons folaires; & fi l'on eft attentif au Phénomene, on pourra l'obferver le matin, avant le lever du Soleil. L'Anneau reparoîtra le 20 Novembre 1891. Indépendamment de ces Phénomenes, l'Anneau perdra beaucoup de fa lumiere vers la fin de Mai 1892.

Les recherches, dont je viens de préfenter l'Analyfe, font fondées fur trois fuppofitions; la circularité de l'orbite de la Terre, l'uniformité de fon mouvement dans cette orbite, & l'uniformité du mouvement de l'Anneau pendant la durée des Phénomenes. J'examine chacune de ces fuppofitions, j'apprécie leur inexactitude; je donne enfin des méthodes pour rectifier ces fuppofitions.

Je paffe enfuite à l'examen des obfervations dont on doit faire ufage pour conclure les élémens de l'Anneau. Je remarque d'abord que nous ne fommes plus dans le cas où fe trouvoit M. Huyghens en 1656. Rien alors n'étoit fait dans la matiere dont il s'agit; il falloit donc employer toutes les obfervations, même les plus incomplettes. Depuis cette époque, les travaux de MM. Huyghens, Maraldi, Heinfius, ont porté le plus grand jour fur ce fujet, &

il n'eſt queſtion que de parvenir à la derniere exactitude. On s'écarteroit donc de ſon objet, & l'on riſqueroit de manquer le but propoſé, ſi l'on faiſoit indiſtinctement uſage de toutes les obſervations. Il faut les examiner avec un eſprit de critique, avant de les employer.

Les obſervations faites par Galilée en 1612, par Gaſſendi en 1642, & par Huyghens en 1656, ſont évidemment inexactes; on ne doit donc point ſonger à les employer. Les Années 1626 & 1685, ne préſentent aucune obſervation; les Phénomenes ſe ſont paſſés tandis que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil. Les époques de 1701 & de 1730 auroient pu fournir des Phénomenes intéreſſans; aucun de ces Phénomenes n'a été obſervé. En 1744, M. Heinſius paroît avoir été contrarié par les Crépuſcules de l'Eté; il obſervoit à Pétersbourg. Sous des latitudes plus méridionales, on auroit pu faire les obſervations indiquées par le calcul; mais perſonne ne s'occupoit alors de l'Anneau de Saturne. En 1760, les Phénomenes ſe ſont paſſés tandis que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil; cette circonſtance rendoit les obſervations difficiles. On ſait ſeulement qu'au commencement de Février, Saturne n'avoit pas encore perdu ſes anſes, & qu'il les avoit recouvrées au commencement de Mai.

Les ſeules obſervations qui préſentent véritablement un caractere d'exactitude, ſont celles des Années 1715 & 1774. Quant aux obſervations de 1671, quoiqu'elles ſoient beaucoup plus préciſes que toutes les obſervations faites avant cette époque, je croirois cependant qu'elles demandent un examen préliminaire avant que d'en faire uſage. On peut objecter contre l'obſervation de la fin de Mai 1671, 1°. la grande latitude des expreſſions qui ne fixent pas plutôt le 31 Mai, que le 30, le 29, le 28 du même mois, ou tout autre jour; 2°. la circonſtance que Saturne a été vu ſans anſes la premiere fois qu'il a été obſervé, depuis ſa ſortie des rayons du Soleil, circonſtance qui ne détermine pas un inſtant précis, & qui peut toujours laiſſer ſoupçonner que Saturne auroit pu être vu ſans anſes avant cette premiere obſervation. L'obſervation du 11 Août eſt tardive, lorſqu'on la compare au calcul; il y avoit déja quelque tems que l'Anneau avoit reparu. Comme M. Caſſini ne s'attendoit point à cette réapparition, il n'eſt pas étonnant que l'inſtant précis du Phénomene, qu'il n'avoit pu prévoir, lui ait échappé. Il reſte l'obſervation du 13 Décembre 1671. D'après l'examen que j'en ai fait,

cette observation paroît mériter la plus grande attention ; c'est même la seule bonne observation que l'on ait jusqu'ici, du passage de l'Anneau par le Soleil, car en 1715 & 1774, le Ciel étoit couvert aux instans des Phénomenes analogues. Les observations des Années 1715 & 1774, ainsi que celle du 13 Décembre 1671, sont donc, suivant moi, les seules que l'on doit soumettre au calcul, si l'on veut déterminer avec précision les élémens de l'Anneau.

Lorsqu'il a été question de calculer les Phénomenes futurs, d'après la connoissance présumée de la position de l'Anneau, j'ai fait voir que l'Analyse directe conduisoit à une solution embarrassée. Lorsqu'au contraire on veut conclure, d'après les Phénomenes, les élémens de l'Anneau proprement dits, l'inclinaison de son plan sur l'Écliptique, la position de son nœud, son épaisseur hypothétique, &c. ; les formules ordonnées par rapport à ces variables, ne présentent aucune difficulté. Je donne la solution rigoureuse du Problême. Deux moyens peuvent conduire également à cette solution ; on peut représenter chaque observation par une équation qui renferme toutes les variables, & éliminer ensuite entre ces différentes équations, pour parvenir à déterminer chacune des variables ; on peut, en profitant des connoissances approchées que l'on a sur les élémens de l'Anneau, avoir recours aux méthodes différentielles. Le premier de ces moyens est plus direct, plus rigoureux, plus géométrique ; le second permet de discuter à la fois un plus grand nombre de circonstances. J'expose les deux méthodes ; j'y applique le calcul ; je donne des Tables qui renferment toutes les circonstances des observations, & qui laissent au Lecteur le choix du systême d'élémens le plus cohérent avec celles des observations qu'il croira devoir adopter.

Je n'ai point considéré jusqu'ici, dans la solution du Problême, l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'Anneau, à l'instant des Phénomenes. Il est cependant probable que cet élément doit influer sur les résultats. En effet l'Anneau de Saturne n'est point lumineux par lui-même. Semblable à toutes les Planetes, il réfléchit la lumiere qu'il reçoit du Soleil ; on doit donc lui appliquer les principes relatifs aux corps qui brillent d'une lumiere empruntée. En général, un corps éclairé réfléchit d'autant plus de lumiere qu'il en reçoit davantage du corps lumineux ; la quantité de lumiere, toutes choses égales, est proportionnelle au sinus de l'élévation du corps lumineux au-dessus du plan éclairé. Lorsque par conséquent l'élévation est fort petite, cette quantité est proportionnelle aux différentes

élévations du corps lumineux au-dessus du plan réfléchissant. Il étoit donc naturel de faire entrer dans les calculs, un élément qui dépende de l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'Anneau. J'examine quels changemens cette considération occasionne dans les formules & dans les résultats; je compare ces résultats avec ceux déterminés précédemment, & je fais voir que les différentes observations sont plus cohérentes entre elles, dans la nouvelle hypothese, que dans les hypotheses précédentes.

Les observations faites en 1714 & 1715, en 1773 & 1774, m'ont conduit naturellement à l'examen d'une question intéressante, sur l'aptitude plus ou moins grande des deux surfaces de l'Anneau, à réfléchir la lumiere; voici ce qui a donné lieu à cette question. Les meilleures observations faites au commencement d'Octobre 1714 & 1773, laissent incontestablement une incertitude de quatre ou cinq jours sur les instans précis des disparitions de l'Anneau, tandis qu'on ne trouve aucun vestige d'une incertitude aussi marquée dans les autres disparitions & réapparitions observées. Pour expliquer ce Phénomene, on a eu recours au peu d'élévation de Saturne sur l'horizon, & aux vapeurs dont l'atmosphere étoit chargé, lorsqu'on a observé la Planete aux époques dont il s'agit. On a aussi attribué le Phénomene, à l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'Anneau, plus petite en Octobre 1714 & 1773, que lors des autres disparitions & réapparitions de l'Anneau.

Aucune de ces explications ne m'a paru satisfaisante; car si, par exemple, on applique avec un avantage quelconque des raisonnemens précédens, à une circonstance particuliere, cette même explication perd son avantage vis-à-vis d'une circonstance semblable qu'il faut également expliquer. Ces raisons m'ont fait soupçonner une autre cause au Phénomene dont il s'agit; voici en quoi elle consiste.

La disparition de l'Anneau du commencement d'Octobre 1714, ainsi que celle du commencement d'Octobre 1773, ont eu lieu à raison du passage de la Terre par une certaine surface de l'Anneau; les autres Phénomenes ont été occasionnés par le passage soit de la Terre, soit du Soleil, par l'autre surface. Seroit-il impossible que ces deux surfaces ne fussent pas également propres à réfléchir la lumiere? C'est une réflexion que j'ai cru devoir soumettre aux Astronomes, & dont la légitimité pourra se vérifier dans la suite, par la comparaison des observations faites dans le nœud austral & dans le nœud boréal de l'Anneau.

Je passe ensuite à l'examen de plusieurs questions relatives à l'Anneau de Saturne. On a observé, par exemple, que vers les instans des disparitions de l'Anneau, les anses commencent par se raccourcir & se séparer de la Planete, avant que de disparoître entiérement. J'examine sur quelles raisons physiques ce Phénomene peut être fondé. Je fais voir qu'à-peu-près à égale distance du bord de Saturne & de l'extrémité de l'Anneau, la partie de l'Anneau qui réfléchit la lumiere du Soleil, est un *maximum*. Ce point milieu doit donc disparoître le dernier; & par conséquent, les anses de l'Anneau doivent se raccourcir & se séparer de la Planete, avant que de disparoître entiérement. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir recours à aucun systême particulier sur la contexture de l'Anneau, pour expliquer ce Phénomene, puisque l'analyse suffit pour en donner l'explication la plus satisfaisante. Quant à la raison du Phénomene, également observé, de la disparition constante d'une des anses quelque tems avant l'autre, cela vient probablement de ce que toutes les parties qui réfléchissent la lumiere de l'Anneau, ne sont pas précisément dans un même plan. C'est au surplus l'explication que Dominique Cassini a donnée de ce Phénomene.

J'ai fait remarquer dans le cours de cet Ouvrage que les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'Anneau, ne sont pas propres à déterminer l'inclinaison de l'Anneau sur l'Ecliptique, & j'ai indiqué des méthodes d'après lesquelles on peut déterminer cet élément avec plus d'exactitude. Comme ces méthodes ne peuvent être employées que dans de certaines circonstances particulieres, j'ai cru que l'on verroit avec plaisir une méthode générale qui puisse s'appliquer à tous les cas. Je donne en conséquence la relation entre l'inclinaison du plan de l'Anneau sur l'Ecliptique, & le rapport des axes de la figure elliptique sous laquelle l'Anneau est vu de la Terre, à un instant quelconque.

Pour employer la méthode dont il s'agit, il faut pouvoir mesurer les axes de la figure elliptique sous laquelle l'Anneau se projette à nos yeux. Il est donc nécessaire que le petit axe de cette ellipse déborde le globe de Saturne. Cette circonstance n'a pas lieu dans toutes les positions de cette Planete. Je détermine les arcs que la Planete décrit dans sa trajectoire, pendant le tems que ces observations sont possibles. Je résous d'abord la question, pour un observateur placé dans le Soleil; je fais voir ensuite comment on peut déterminer avec précision, le lieu de Saturne correspondant aux der-

niers instans, ou relativement à un observateur placé sur la Terre, le petit axe de l'Anneau commence à pouvoir déborder le globe de la Planete. Je remarque enfin que vers les limites, il y a de petites oscillations dans les résultats, occasionnées par le mouvement de la Terre, & que dans la même Année l'on peut observer alternativement des instans où l'Anneau déborde le globe de Saturne, & d'autres instans où le globe déborde l'Anneau. Ces Phénomenes sont analogues aux disparitions & aux réapparitions successives de l'Anneau, dans une même Année.

Nous avons fait voir au commencement de ce Discours, combien il est probable que toutes les parties de l'Anneau de Saturne sont animées d'une force centrifuge propre à balancer l'effort de la pesanteur qui les précipite vers le centre de Saturne. Nous avons dit qu'il seroit à craindre sans cela, que la force toujours agissante de la gravité, ne détruisît bientôt un ouvrage aussi singulier de la Nature. Mais dans le cas où l'on adopteroit un systême aussi plausible, on peut se diviser sur la maniere d'expliquer la rotation de l'Anneau de Saturne. On peut imaginer que toutes ses parties emportées par un mouvement commun autour du centre de Saturne, font leur révolution dans le même tems autour de ce centre. On peut penser au contraire que cet Anneau ne forme pas une seule masse continue; & pour soutenir cette derniere opinion, peut-être la plus probable de toutes, on peut dire que les parties de l'Anneau étant soumises à une pesanteur qui, relativement à leurs distances du centre de Saturne, varie dans un rapport différent de celui de la force centrifuge, les parties les plus éloignées de la Planete doivent achever leurs révolutions autour de ce centre, dans un tems différent de celles qui sont plus voisines; que sans cela ces parties ne seroient pas dans un état d'équilibre ferme & stable, & que l'Anneau porteroit en lui-même un principe de destruction totale, ou du moins un principe d'altération dans sa figure. On peut ajouter à toutes ces raisons, que la multitude de bandes concentriques que les fortes lunettes font appercevoir sur l'Anneau de Saturne, ne sont probablement que des Zônes soumises à une rotation différente, & dont on apperçoit la solution de continuité.

Quoi qu'il en soit de ces deux hypotheses, il suffit que la premiere opinion ait été soutenue par des Géometres distingués, pour m'y arrêter. J'expose en conséquence la solution du Problême, donnée par M. de Maupertuis, dans le cas où toutes les parties de

l'Anneau feroient emportées d'un mouvement commun autour du centre de la Planete. Je fais voir les fuppofitions qui rendent cette folution précaire, & qui peuvent faire foupçonner que ce n'eft pas la loi de la Nature. Je donne enfuite l'analyfe par laquelle on détermineroit la rotation des différentes Zônes de l'Anneau de Saturne, dans le cas où l'on penferoit que l'Anneau ne forme pas une feule maffe continue, & que d'ailleurs fon épaiffeur eft infiniment petite, relativement à fes autres dimenfions.

Parmi les queftions que l'on s'eft propofées fur l'Anneau de Satune, on n'a pas oublié de demander s'il eft habité. On fent affez qu'une pareille queftion ne fera jamais éclaircie. On s'eft encore propofé d'autres queftions auffi peu fufceptibles d'éclairciffemens; comme de favoir vers quel point la pefanteur fe dirige, à la furface de l'Anneau. Il eft évident que l'attraction de Saturne doit entrer pour beaucoup dans la folution de ce dernier Problême; mais il eft également évident que la folution eft fubordonnée à un autre élément qui doit y influer d'une maniere auffi fenfible; je veux parler de la rotation de l'Anneau. Il eft clair en effet, que fi la force centrale, qui attire les corps vers Saturne, eft en équilibre avec la force centrifuge réfultante du mouvement de rotation des différentes parties de l'Anneau, cette attraction ne doit plus entrer en ligne de compte; il refte alors la feule attraction de l'Anneau. Toutes ces queftions mériteroient fans doute des difcuffions particulieres; mais elles m'écarteroient trop de l'objet principal de cet Ouvrage.

Je termine ce qui regarde l'Anneau de Saturne, en rapportant une obfervation fınguliere faite par M. Meffier, lors de la réapparition de l'Anneau, du 1 Juillet 1774. Après cette réapparition, M. Meffier a obfervé très-diftinctement, & pendant un très-grand nombre de jours, des points lumineux parfemés fur les anfes de l'Anneau. Ces points de lumiere étoient vifs, blanchâtres, fcintillans, femblables aux Etoiles de la feptieme grandeur vues avec de bonnes lunettes. Ils n'étoient pas tous également brillans, & plufieurs paroiffoient féparés les uns des autres.

Cette obfervation conftate que l'Anneau de Saturne n'eft pas parfaitement plan, & qu'il a à fa furface des points plus élevés les uns que les autres. C'eft le même Phénomene que l'on obferve dans la Lune, & qui eft fur-tout fenfible lorfqu'elle fe rapproche du Soleil. Comme ces points font en général plus éclairés que le refte de l'Anneau fur lequel ils font ombre, l'obfervateur commence à les ap-

percevoir les premiers, lorsqu'il s'éleve au-dessus du plan de l'Anneau.

Cette partie de l'Ouvrage est terminée par la Notice abrégée de ce que l'on sait sur Saturne. Cet Astre est, après la Planete d'Herschell, le plus éloigné de tous les corps célestes à qui nous avons donné le nom de Planete. Suivant les derniers résultats de M. de La Place, la durée de sa révolution, par rapport aux fixes, est de 10759 jours 2^h 23′ 45″; sa révolution tropique est de 10746 jours 19^h 8′ 50″; son mouvement diurne de 2′ 0″,456514. Le demi-grand axe de son orbite = 9,540725; son excentricité étoit de 0,53641 à l'époque de 1750; cette excentricité diminue de 0,002547 par Siecle; le Parametre du grand axe = 19,075123. Suivant M. de La Place, la longitude moyenne de Saturne étoit de 7^s 21^d 20′ 20″ à l'époque du 1 Janvier 1750; la longitude du nœud ascendant de 3^s 21^d 30′ 22″; le lieu de l'aphélie sur l'orbite, dans 8^s 28^d 9′ 7″; l'inclinaison de l'orbite de 2^d 29′ 55″; cette inclinaison diminue de 16″ par Siecle. Le mouvement apparent du nœud est de 31,″50 par an, suivant l'ordre des Signes; & comme la précession des Équinoxes est de 50″,25, le mouvement reel du nœud est de 18″,75 rétrograde; le mouvement de l'aphélie paroît être de 1′ 6″ par an, dont 50″,25 sont dues à la précession des Equinoxes. Le diametre de Saturne = 10,1 demi-petits axes de la Terre; son volume = 10303 volume de la Terre; sa masse = 0,000350 masse du Soleil = 114,14 masse de la Terre; sa densité = 0,13946 densité de la Terre. Un corps grave, à la surface de Saturne, parcourroit 16,895 pieds dans la premiere seconde de sa chute; la longueur du pendule qui bat les secondes à sa surface est de 3,4237 pieds. La durée de la rotation de Saturne est inconnue. Cet Astre, comme toutes les Planetes supérieures, est rétrograde vers l'opposition; l'arc de rétrogradation est 6^d 46′ 40″.

Le diametre du cercle extérieur de l'Anneau de Saturne est de 67517 lieues; la circonférence de 212110 lieues; le diametre du cercle intérieur de l'Anneau est de 48226 lienes; la circonférence de 151510 lieues. Chacune des deux surfaces de l'Anneau est de 1753600000 lieues quarrées; l'espace vuide compris entre l'Anneau & le globe est de 1169069000 lieues quarrées. Le volume & la masse de l'Anneau sont inconnus, ainsi que son épaisseur qui ne peut être que très-petite, puisque le tranchant de l'Anneau réfléchit assez peu de lumiere pour n'être pas apperçu, même avec les plus fortes lunettes.

Si

Si l'on compare les obſervations de Tycho avec celles de ce Siecle, on trouve conſtamment pour Saturne, un moyen mouvement plus petit qu'en comparant les obſervations modernes avec celles des Caldéens & de Ptolomée ; mais ce ralentiſſement paroît être changé dans une accélération, depuis Hévélius.

Ces irrégularités ne ſont pas les ſeules que nous offre le mouvement de Saturne. M. de la Lande a remarqué que, depuis un Siecle, le mouvement de Saturne conclu des oppoſitions obſervées vers l'Equinoxe du Printems, eſt moins rapide que celui conclu des oppoſitions obſervées vers l'Equinoxe d'Automne, en employant même des obſervations dans leſquelles les circonſtances des mouvemens de Jupiter & de Saturne étoient à peu près ſemblables. Juſqu'ici la théorie de la peſanteur univerſelle n'a pu rendre raiſon de ces Phénomenes; on ne voit même rien dans les réſultats auxquels les Géometres ſont parvenus ſur cet objet, qui puiſſe conduire à les expliquer; & par cette raiſon, on étoit porté à les attribuer à l'action des Cometes. Mais M. de la Place, en approfondiſſant l'action mutuelle de Jupiter & de Saturne, a reconnu qu'elle étoit ſeule la cauſe des irrégularités obſervées dans le mouvement de ces deux Planetes. L'accord de la Théorie de M. de la Place, avec les obſervations anciennes & modernes, prouve la juſteſſe & la néceſſité des équations qu'il a introduites dans les mouvemens de Saturne, & que les Siecles ſuivans rendront de plus en plus ſenſibles; cet accord fournit en même tems une des preuves les plus ſenſibles du principe admirable de la peſanteur univerſelle.

On a remarqué ſur le globe de Saturne, des bandes ſemblables à celles de Jupiter; mais beaucoup plus foibles. Caſſini en obſerva deux en 1675, 1683, 1696, 1708 & 1719; mais il n'apperçut pas la courbure que ces bandes auroient dû avoir, ſi elles euſſent été adhérentes au globe de Saturne. Il penſe que ce pouvoit être des eſpeces de nuages élevés de la Planete, & qui faiſoient ombre. M. Meſſier a obſervé depuis les mêmes Phénomenes.

Indépendamment de ſon Anneau, Saturne a encore cinq Satellites. Les quatre premiers Satellites ſe meuvent dans le plan de l'Anneau ; leurs orbites ſont inclinées d'environ 30^d ſur l'orbite de Saturne, & de 31^d 20$'$ ſur l'Ecliptique. L'orbite du cinquieme n'eſt inclinée que de 15 à 16 degrés ſur l'Ecliptique. Le premier & le ſecond Satellite ne ſe voient qu'à peine avec des lunettes ordinaires de quarante pieds ; le troiſieme eſt un peu plus gros ; le

quatrieme eſt le plus gros de tous ; auſſi fut-il découvert le premier par Huyghens en 1655. Le cinquieme Satellite ſurpaſſe les trois premiers en groſſeur, lorſqu'il eſt vers ſa digreſſion occidentale ; mais quelquefois il eſt très-petit, & diſparoît même entiérement.

Huyghens apperçut pour la premiere fois le quatrieme Satellite, le 25 Mai 1655. Dominique Caſſini découvrit le cinquieme, le 25 Octobre 1671, avec une lunette de dix-ſept pieds. Il vit enſuite le troiſieme, le 23 Décembre 1672, avec une lunette de ſoixante-dix pieds. Au mois de Mars 1684, il découvrit les deux premiers Satellites, avec une lunette de trente-quatre pieds, de Campani. L'on douta long-tems en Angleterre de l'exiſtence des quatre Satellites découverts par Caſſini ; mais en 1718, M. Pound ayant élevé au-deſſus du clocher de ſa paroiſſe, l'excellent objectif de cent vingt-trois pieds, que Huyghens avoit donné à la Société Royale, il obſerva les cinq Satellites de Saturne, & l'on ne douta plus de leur exiſtence.

Caſſini voulut rendre hommage à Louis XIV, de la découverte des Satellites de Saturne ; il les appella *Aſtra Lodoicea*, à l'exemple de Galilée, qui avoit appellé les Satellites de Jupiter, *Aſtra Medicea*. On frappa à cette occaſion une Médaille avec la Légende ſuivante ; *Saturni Satellites primùm cogniti*. Depuis ils n'ont été connus que ſous le nom de Satellites de Saturne.

Après toutes les recherches dont nous venons de nous occuper, on demandera quels ſont les véritables élémens de l'Anneau ; ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique ; la poſition de ſon nœud ; l'élévation de la Terre au-deſſus du plan de l'Anneau, à l'inſtant de ſa diſparition.. On demandera enfin ſi le nœud de l'Anneau répond toujours aux mêmes Etoiles, de ſorte qu'il n'ait que des mouvemens apparens, ceux de Préceſſion, de Nutation & d'Aberration ; ou s'il a des mouvemens qui lui ſoient propres ; ſi ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique eſt conſtante, ou ſi elle ſouffre des altérations.

Sur toutes ces queſtions, je dirai que c'eſt au tems ſeul à les décider. J'ajouterai ſeulement que, d'après les élémens le plus généralement adoptés par les Aſtronomes ; à l'époque du 1er. Janvier 1774, l'inclinaiſon de l'Anneau ſur le plan de l'Ecliptique étoit de $31^d\ 20'$. La diſtance du nœud de l'Anneau ſur l'Ecliptique au nœud aſcendant de l'orbite de Saturne, étoit de $55^d\ 21'\ 45''$. Et comme la longitude du nœud aſcendant de l'orbite étoit alors de $3^f\ 21^d\ 43'\ 17''$, la longitude du nœud aſcendant de l'Anneau ſur l'Ecliptique étoit de $5^f\ 17^d\ 5'\ 0''$.

ANALYSE DU TROISIEME LIVRE.

Je me suis proposé, dans ce troisieme Livre, de traiter particuliérement les questions relatives aux trajectoires des Corps Célestes, & de donner des méthodes pour déterminer ces trajectoires, d'après les observations. Le Problême de la détermination des trajectoires des Corps Célestes, a été résolu par plusieurs savans Géometres, & particuliérement par Newton, qui le regardoit comme un Problême très-difficile. Voici comment il s'en explique dans ses Principes Mathématiques : *Difficillimum hoc Problema multimodè agressus in hanc tandem deveni solutionem.* L'opinion de Newton peut donner une juste idée de l'importance du Problême des Cometes & des difficultés qu'il renferme.

La théorie des mouvemens dans les Sections Coniques est évidemment un des principaux élémens de la détermination des orbites Planétaires. Lors de la publication de mes Essais sur les Cometes, je m'étois contenté de supposer qu'en vertu de la gravitation universelle en raison directe des masses & en raison inverse du quarré des distances, les Corps Célestes décrivent une Section Conique autour du Soleil, ou plutôt autour du centre commun de gravité de notre Systême. Dans un Traité complet des mouvemens apparens des Corps Célestes, j'ai cru devoir donner aux propriétés des trajectoires coniques, le développement que demande l'importance du sujet

Je n'entrerai dans aucun détail sur les propositions démontrées dans cette partie de mon Ouvrage ; je renvoie à l'Ouvrage même. D'ailleurs ces propositions sont connues des Astronomes & des Géometres ; & si j'ai donné des formes particulieres à quelques-unes d'entre elles, c'est qu'elles m'ont paru plus facilement applicables aux usages que je me proposois d'en faire.

L'enchaînement des propositions sur les trajectoires m'a conduit naturellement à développer les méthodes par lesquelles on a déterminé les masses des Planetes, ainsi que la figure de la Terre, au moyen des observations du pendule sous les différentes latitudes ; & en effet, ces méthodes sont des corollaires de la théorie des forces centrales. J'ai vu avec plaisir que le rapport des axes que l'on conclut des observations du pendule, retombe sensiblement dans le rapport de 320 à 321, donné par les mesures géodésiques.

Après avoir considéré les mouvemens des Planetes & des Cometes dans leurs trajectoires respectives, abstraction faite des observations que l'on peut faire de ces mouvemens, je considere les mouvemens apparens des Planetes & des Cometes, par rapport à un observateur qui décrit lui-même une trajectoire dans un plan différent de celui de la Planete ou de la Comete. La question peut être énoncée de la maniere suivante.

Etant donnés les élémens de l'orbite d'une Planete ou d'une Comete, son grand axe, le lieu du périhélie sur l'orbite, l'instant du passage par le périhélie, la longitude du nœud de l'orbite, l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique, déterminer pour un instant quelconque la longitude & la latitude apparentes de la Planete ou de la Comete vues de la Terre, ainsi que sa distance à la Terre.

On voit d'abord que puisque l'instant pour lequel on calcule est donné, & que les élémens des orbites de la Terre & de la Comete sont connus, on déterminera facilement le lieu du Soleil, ainsi que sa distance à la Terre; on connoîtra donc la différence en longitude du Soleil & du nœud de la Planete ou de la Comete. On déterminera pareillement le lieu de la Planete ou de la Comete dans son orbite. Ces élémens suffisent pour résoudre les questions proposées.

Après avoir donné les équations qui résolvent, de la maniere la plus générale les Problêmes précédens, je me propose plusieurs questions du genre de *maximis & minimis* relatives à ces équations Ces questions ont amené naturellement les recherches sur les Stations & les Rétrogradations des Planetes; sur les plus courtes distances des Cometes, soit à l'orbite terrestre, soit à la Terre; sur le tems qu'une Comete est à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'une quantité assignée; sur les plus grandes latitudes géocentriques des Planetes; & sur leurs plus grandes élongations, &c.

Je ne donnerai point ici les résultats de ces calculs; je renvoie à l'Ouvrage même. Je dirai seulement que l'on ne connoît que huit Cometes qui aient approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues; celles des Années 837, 1618, 1680, 1684, 1702, 1743, 1763 & 1770.

Jusqu'ici j'ai considéré les mouvemens des Cometes, relativement aux différens points de l'orbite de la Terre, & qui sont immobiles, je considere ensuite ces mêmes mouvemens, en y faisant entrer le mouvement simultané de la Terre. Je suppose donc qu'à un cer-

tain instant assigné, la Terre & la Comete se sont trouvés respectivement à un certain point donné de leurs orbites, je détermine en conséquence, la durée du tems que la Comete & la Terre seront à des distances respectives plus petites qu'une distance assignée, & les conditions qui rendent cette durée nulle ou la plus grande possible. Ce Problême envisagé dans sa plus grande généralité, conduiroit, ainsi que je le fais voir, à des formules très-compliquées. Comme j'ai principalement en vue la théorie des Cometes, lorsqu'elles passent fort près de la Terre, j'examine ce que deviennent les formules, dans la supposition que les intervalles de tems sont assez courts pour que l'on puisse regarder les trajectoires de la Terre & de la Comete comme rectilignes. Cette considération, sans rien ôter à l'exactitude de mes recherches relativement à mon objet, m'a conduit à des résultats fort simples.

On connoît la vîtesse de la Terre dans son orbite; on connoît de plus la vîtesse d'une Comete, lorsqu'elle coupe l'orbite de la Terre. Cette vîtesse est à celle de la Terre, comme $\sqrt{2}$ est à 1. Ces élémens une fois donnés, il est aisé de sentir que l'intervalle de tems que la Terre & la Comete peuvent être à une distance respective plus petite qu'une quantité assignée, dépend de l'angle sous lequel l'orbite de la Comete coupe celle de la Terre. Une Comete qui, par exemple, iroit dans le même sens que la Terre, seroit évidemment beaucoup plus long-tems à une distance de la Terre moindre qu'une quantité donnée, que si le mouvement de cette Comete étoit dans une direction opposée au mouvement de la Terre. Pour donner une idée de ce tems, relativement à toutes les Cometes possibles, j'ai supposé la distance de 13000 lieues, & j'ai appliqué le calcul à sept Cometes, dont trois sont directes, trois sont rétrogrades, & une est perpendiculaire à l'orbite de la Terre. Sans entrer dans aucun détail sur le résultat, que l'on peut lire dans l'Ouvrage même, il suffit de savoir que dans les circonstances les plus favorables, une Comete ne pourroit jamais être plus de $2^h\ 32'\ 2''$, à une distance de la Terre moindre que 13000 lieues.

Ces recherches m'ont conduit a la réflexion suivante, que m'a fait naître la lecture de l'Ouvrage de M. d'Alembert, sur la cause des Vents. Dans cet Ouvrage, M. d'Alembert démontre que si un noyau sphérique est entouré d'un fluide sur lequel agit un corps fixe & immobile, ce fluide, en vertu de l'action de ce corps, doit passer successivement de la figure sphérique qu'il avoit d'abord,

à différentes figures elliptiques, dont l'un des axes s'alonge de plus en plus, tandis que l'autre axe diminue ; &, ce qui est remarquable, il trouve que le mouvement des différentes parties du fluide peut être comparé à celui d'un pendule qu'on tireroit de son repos pour lui faire décrire de petits arcs circulaires. Il fait voir de plus que le tems des oscillations ne dépend point de la force accélératrice, mais uniquement de la profondeur du fluide ; & il donne des formules pour le déterminer.

J'ai appliqué des nombres aux formules de M. d'Alembert, en supposant la Terre entiérement recouverte d'un fluide, dont la profondeur seroit par-tout d'une lieue. Le calcul m'a fait voir que dans l'hypothese dont il s'agit, la Comete emploieroit $10^h\ 52'$ à produire son effet sur les Marées. Mais les véritables circonstances du Problême sont bien moins favorables à ces grandes perturbations, que les hypotheses soumises au calcul. 1°. La Comete ne répondroit pas toujours perpendiculairement au même point de la Terre, puisque indépendamment du mouvement de rotation de la Terre, la Comete auroit un mouvement propre très-rapide. 2°. Les eaux de la Mer n'environnent point tout le globe ; & l'on sait par l'exemple des Mers méditerranées, qui ne sont presque point sujettes au flux & au reflux, combien cette circonstance diminue l'effet des Marées. 3°. Enfin la Comete ne seroit que très-peu de tems, & beaucoup moins de $10^h\ 52'$, à une distance nuisible. Toutes ces raisons réunies me paroissent élever un préjugé légitime contre les grands désordres des Marées produites par l'action des Cometes.

Je donne ensuite les principes d'après lesquels on peut calculer la probabilité qu'à un instant quelconque une Comete sera plus près de la Terre qu'une distance donnée. La solution de ce Problême exige des combinaisons délicates. En effet, l'intervalle de tems que la Terre & une Comete peuvent être à une distance respective plus petite qu'une quantité donnée, dépend, ainsi que je l'ai déja dit, de l'angle sous lequel la trajectoire de la Comete coupe l'orbite de la Terre. Comme les élémens de la Comete sont inconnus, cet angle est lui-même inconnu, & il faut d'abord avoir égard à cette premiere incertitude. D'ailleurs tous ces angles n'étant pas également probables, il faut faire entrer dans le calcul, le degré de leurs probabilités respectives. Telles sont en peu de mots les difficultés qui se présentent, & que je crois avoir surmontées. Je me propose & je résous la question suivante. *Si l'on sait que dans le cours*

d'une Année, *une Comete dont les élémens ſont inconnus*, *doit couper l'orbite terreſtre*, *déterminer la probabilité*, *qu'à un inſtant quelconque pris dans l'Année*; *cette Comete ſera plus près de la Terre*, *qu'une quantité donnée*. Tous les Problêmes de cette nature dépendent du calcul intégral, & demandent autant d'intégrations ſucceſſives qu'il y a d'élémens variables; mais on peut les combiner de pluſieurs manieres différentes. Parmi ces différentes combinaiſons, il faut choiſir celle qui donne des intégrations poſſibles, & l'analyſe la plus ſimple. J'ai appliqué la formule au cas où la Comete ſe trouveroit à une diſtance de la Terre moindre que 13000 lieues, & je trouve $\frac{1}{752730}$ pour l'expreſſion de la probabilité.

Quelque petite que ſoit, d'après les méthodes précédentes, la probabilité qu'à un inſtant donné, notre globe & une Comete puiſſent ſe trouver à une diſtance nuiſible, le danger ne ſeroit point nul, ſi l'hypotheſe dont nous ſommes partis étoit véritable. Mais on ne doit point oublier que cette hypotheſe eſt fondée ſur la condition qu'il exiſte une ou pluſieurs Cometes dont la trajectoire coupe l'orbite terreſtre; condition contre l'exiſtence de laquelle on peut parier l'infini contre l'unité. Le danger que nous courons de la part des Cometes, eſt donc, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, un infiniment petit du ſecond ordre. J'ai cru devoir inſiſter ſur cette remarque, pour calmer les inquiétudes de quelques perſonnes, qui ont conçu des alarmes déplacées à ce ſujet.

Ces recherches ſont terminées par quelques obſervations ſur l'explication que Whiſton donne du Déluge. Je fais voir par exemple, que la queue de la Comete (la même que celle de 1680), dont Whiſton a fait uſage pour expliquer ce déſaſtre, ne paroît pas avoir pu y influer. En effet la plus grande proximité de la Comete de 1680 à l'orbite de la Terre, n'a lieu que dans la branche de ſa trajectoire, qu'elle décrit avant ſon paſſage par le périhélie, tems auquel cette Comete ne s'étant pas encore approchée du Soleil, ſa queue n'a rien de remarquable. Dans la branche au contraire que la Comete décrit après ſon paſſage par le périhélie, la plus courte diſtance de cet Aſtre à l'orbite de la Terre, eſt de plus de neuf millions de lieues. Eſt-il naturel de penſer que l'atmoſphere de la Comete, dont la nature eſt d'ailleurs totalement inconnue, ait pu produire un ſi grand déſordre à une telle diſtance?

Notre Syſtême Planétaire préſente un phénomene fort ſingulier. Nos Planetes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Ju-

piter & leurs Satellites, Saturne, Herſchel, circulent dans des plans peu inclinés les uns aux autres, de ſorte que les angles des différens plans des orbites planétaires avec le plan de l'orbite terreſtre, ſont tous compris dans un eſpace d'environ cinq degrés. Cette réflexion n'a pas échappé aux Aſtronomes, & ils ont penſé qu'elle dénotoit de la maniere la plus évidente, l'action d'une cauſe particuliere qui a amené ce réſultat. Je fais voir que la probabilité contre le Phénomene que préſente la Nature, eſt dans le rapport de 35 élevé à la ſeizieme puiſſance, à 1. Il y a donc une tres-grande probabilité qu'une cauſe particuliere a amené le réſultat que l'on obſerve dans notre Syſtême Planétaire.

Je détermine enſuite les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre. Ce Probléme eſt réſolu pour le cas d'une trajectoire quelconque, parabolique, hyperbolique ou elliptique. Parmi toutes les Cometes connues, il n'en eſt aucune qui coupe exactement l'orbite terreſtre; mais il en exiſte pluſieurs, telles que celles de 837, 1618, 1680, 1763, & d'autres encore, qui rempliroient cette condition, ſi l'on altéroit tant ſoit peu leurs élémens. Or on ſait que ces élémens ne ſont point invariables, & que dans de certains cas, l'action des Corps qui circulent autour du Soleil, peut y produire des altérations ſenſibles. Je ſuppoſe en conſéquence qu'une Comete n'ait pas coupé l'orbite de la Terre, lors d'une précédente apparition, & j'examine quels changemens elle doit éprouver dans ſes élémens, pendant l'intervalle des deux apparitions, pour pouvoir couper l'orbite terreſtre, lors de la ſeconde apparition.

Ces recherches m'ont conduit à la réflexion ſuivante, que je crois trop importante pour la ſupprimer. Il n'exiſte aucune Comete connue, qui d'après les élémens établis dans les dernieres apparitions, puiſſe approcher de la Terre, aſſez pour y produire un effet nuiſible. Ce ne pourroit être qu'en vertu des altérations que ſubiroient les élémens, que cet événement ſeroit à redouter. Ce dérangement n'eſt pas phyſiquement impoſſible; mais il y a loin de la poſſibilité d'un dérangement quelconque, à la certitude que ce dérangement ſera tel qu'il convient, pour occaſionner la rencontre, ou une proximité nuiſible de la Comete & de la Terre. Pour que l'événement eût lieu, il faudroit que le dérangement ſuivît une certaine loi donnée, qu'il arrivât dans un tems donné, & qu'alors la Terre fût à un certain point donné de ſon orbite. Il y a donc, ſi

j'oſe

j'ose m'exprimer ainsi, relativement aux Cometes qui n'ont point actuellement les conditions requises pour couper l'orbite de la Terre, & toutes les Cometes connues sont, dans ce cas, une probabilité presque infinie que l'événement n'aura pas lieu.

Pour déterminer l'orbite d'une Comete ou d'une Planete en général, il faut satisfaire à deux conditions principales; la premiere, que les points de la trajectoire décrite par la Planete ou par la Comete, puissent tous appartenir à un seul & même plan dont il s'agit de déterminer la position; la seconde, que cette trajectoire soit une Section Conique. Cette distinction simple entre la nature des questions qu'il s'agit de résoudre, m'a paru mettre un ordre naturel dans les discussions auxquelles on doit se livrer. J'ai donc examiné s'il n'étoit pas possible de partager les équations qui résolvent le Probléme des Cometes, en deux classes; les unes dépendantes uniquement de la position du plan des orbites, les autres dépendantes de la nature de la trajectoire; de maniere que l'on pût résoudre particuliérement les questions relatives à la position du plan, sans les compliquer des difficultés qui appartiennent à la nature des trajectoires.

La simplicité de cette idée m'avoit toujours frappé. En effet, il est facile de démontrer que si, l'on pouvoit, par une Analyse quelconque, déterminer le rapport entre trois distances de la Comete à la Terre, & que ce rapport fût linéaire, la position du plan se déterminoit avec la plus grande facilité, sans avoir à résoudre des équations d'un degré superieur au second. J'avois vu pareillement qu'en faisant usage des propriétés des cordes dans la Parabole, il suffit de connoître le rapport de deux distances de la Comete à la Terre, pour résoudre le même Probléme. Je me suis donc appliqué principalement à connoître les rapports des distances de la Comete à la Terre, au moyen de trois observations. Je n'entrerai dans aucun détail sur l'Analyse de cette partie de mon Ouvrage, qui ne peut être entendue que dans l'Ouvrage même; je me contenterai de dire que je crois être parvenu au degré de simplicité dont la question est susceptible; & si je n'ai pu écarter totalement les difficultés dont elle est hérissée, je crois l'avoir réduite aux seules difficultés qui en sont inséparables.

Après avoir donné les équations qui déterminent la position du plan de l'orbite, je passe à la détermination de la trajectoire décrite par la Comete. Je suppose d'abord que la trajectoire est une

Parabole, & je donne les équations pour calculer la Parabole particuliere qui satisfait aux observations. Généralement parlant, ces calculs suffisent pour les Cometes. Si cependant la Comete que l'on calcule, avoit parcouru un très-grand arc de sa trajectoire; si elle avoit été vue avant & après son passage par le Périhélie; & sur-tout si les observations se refusoient d'une maniere irrésistible à pouvoir être représentées par une seule & même Parabole, de sorte qu'en abandonnant le calcul dans l'hypothese parabolique, on n'eût point à craindre de courir après une exactitude chimérique, alors il faudroit avoir recours au calcul dans l'Ellipse. Je donne les équations relatives à cette trajectoire. En un mot, j'applique aux Cometes, les principes généraux de la détermination des orbites planétaires. Je fais voir enfin qu'il y a un cas particulier où le Problême des Cometes se résout rigoureusement, sans qu'il soit besoin de faire usage des rapports des distances, & sans employer des équations d'un degré supérieur au quatrieme; c'est celui ou la Comete auroit été observée dans les deux nœuds.

Ces recherches m'ont conduit à l'examen d'une question proposée par feu M. Lambert, célebre Astronomie de Berlin. On sait que si plusieurs Cometes parcourent des arcs de différentes Paraboles, elles emploient le même tems à les parcourir, lorsque la somme des rayons vecteurs qui terminent ces arcs est égale de part & d'autre, ainsi que la corde qui soutend les arcs. De même donc que l'on a choisi une orbite particuliere, celle de 109 jours, pour déterminer le rapport des Anomalies vraies de toutes les Cometes, avec les tems employés à les parcourir, on a cherché pareillement s'il ne seroit pas possible de trouver une orbite qui servît à déterminer le rapport de la somme des rayons vecteurs, & de la corde, avec les tems employés à parcourir les arcs correspondans de la Parabole.

La plus simple Parabole que l'on ait pu choisir pour cet effet, est évidemment celle qui se confondroit avec une ligne droite qui se termineroit au centre du Soleil. Les propriétés des mouvemens dans cette droite servent à résoudre la question proposée. J'examine pareillement les propriétés des Paraboles de projection, sur le plan de l'Ecliptique. J'ai cru enfin devoir développer les principes qui servent à calculer l'Aberration, la Nutation & la Précession.

Les recherches précédentes sont suivies d'une Notice abrégée de ce que l'on sait de plus certain sur les Cometes. On disputoit encore sur la nature de ces Astres, vers la fin du dernier Siecle. Quelques-

uns croyoient que les Cometes avoient été créées en même tems que la Terre, qu'elles étoient en dépôt dans les régions les plus éloignées du Firmament, & que la Divinité les faiſoit paroître toutes les fois qu'elle vouloit donner aux hommes des ſignes de ſa colere. Quelques autres, prévenus des propriétés du nombre ſept, qu'ils jugeoient eſſentielles au nombre des Corps céleſtes, nioient que les Cometes exiſtaſſent réellement. C'étoit, ſuivant eux, de ſimples illuſions optiques, de fauſſes apparences, cauſées par la réflexion ou la réfraction de la lumiere. Quelques Philoſophes prétendoient avec Ariſtote, que les Cometes n'étoient que des météores formés dans la moyenne région de l'air, & qui ne ſuivoient aucune loi dans leurs mouvemens. D'autres, en leur donnant la même origine, croyoient, avec Képler, qu'elles ſe mouvoient uniformement en ligne droite, en vertu d'une impulſion primitive qu'elles avoient reçue à l'inſtant de leur formation. D'autres enfin penſoient que les Cometes étoient des Corps Céleſtes, dont le mouvement devoit être éternel comme celui des autres Planetes, & aſſujetti comme elles à des loix conſtantes.

Telle avoit été parmi les Anciens, l'opinion de l'École de Pythagore, d'Apollonius le Mindien, d'Hippocrate de Chio, d'Eſchyle, de Diogene, de Favorin, d'Artémidore, de Démocrite & de Séneque. « On a cru, dit ce Philoſophe, que les Cometes » n'étoient point des Aſtres, parce qu'elles n'ont pas la rondeur » des autres Corps céleſtes. Ce défaut de rondeur n'eſt qu'une » illuſion ; il eſt dû uniquement à la lumiere qu'elles répandent.... « Elles ſont, comme tous les Corps céleſtes, des ouvrages éternels de la Nature. La Foudre & les Eclairs brillent & s'éteignent, » les Cometes ont leurs routes preſcrites qu'elles parcourent ; elles » s'éloignent de nous, ſans ceſſer d'exiſter.... Leur marche n'eſt » point vague comme celle des Météores qui ſont le jouet des » Vents.... Les Étoiles qui embelliſſent la Nuit, démontrent que » le Ciel eſt rempli de Corps céleſtes.... Ne nous étonnons pas » que l'on ignore encore la loi du mouvement des Cometes, dont » les apparitions ſont ſi rares, & qui deſcendent d'une énorme » diſtance. Il n'y a pas quinze cents ans que la Grece a diviſé le » Ciel en Conſtellations, & qu'elle connoît le mouvement des Planetes. Combien de Nations ignorent encore par quel méchaniſme » la Lune s'éclipſe à leurs yeux. Un jour viendra que la Poſtérité » s'étonnera que nous ayons ignoré des choſes ſi faciles à dé-

» couvrir ; on déterminera les orbites des Cometes, leur nombre, » le tems de leurs révolutions. N'envions point à nos descendans » les découvertes qu'ils pourront faire ; jouissons des vérités que » nous connoissons. »

Chacune des opinions que je viens d'exposer, avoit ses partisans, lorsque la Comete de 1680 vint étonner le Peuple & les Savans. Newton s'occupoit alors de ses sublimes recherches sur le systême général de l'Univers. Il ne vit dans cette Comete, qu'un Astre de plus soumis aux loix qu'il venoit de découvrir ; il en traça l'orbite & fit voir qu'elle décrivoit autour du Soleil, une Ellipse qui se confondoit sensiblement avec une Parabole dans la partie de la courbe, que l'on pouvoit observer.

Cette brillante découverte eut le sort de toutes les nouveautés à qui le tems seul peut imprimer le sceau de la démonstration. Elle trouva des contradicteurs même parmi les Astronomes. Cassini, qui dès 1664 avoit adopté un systême sur les Cometes, persista à penser qu'elles avoient la Terre pour centre de leurs mouvemens ; & Jacques Bernoulli proposa un autre systême, d'après lequel la Comete de 1680 devoit reparoître au mois de Mai 1719.

Pour terminer irrévocablement cette savante dispute, il falloit avoir le courage d'affronter les calculs les plus pénibles & les plus multipliés. Halley osa l'entreprendre ; il débrouilla le chaos des anciennes Cometes, & fit voir qu'il n'y en avoit aucune dont les mouvemens ne fussent soumis à la théorie de Newton. Il fit plus ; parmi cette multitude de Cometes que la terreur qu'elles ont inspirée nous a transmises, plus encore que l'amour de l'Astronomie, il démontra qu'il y en avoit une dont les retours périodiques paroissoient être d'environ 77 ans. Elle avoit paru en 1682, il osa prédire qu'on la reverroit en 1759, & l'événement a justifié sa prédiction. Il n'est donc plus permis de douter que les Cometes ne soient des Corps célestes, soumis, ainsi que les autres Planetes, aux loix de la Pesanteur universelle, & décrivant autour du Soleil, des orbites plus ou moins alongées.

Dès qu'on n'a pu douter que les Cometes fussent des Corps semblables aux Planetes, parcourant en tous sens les différentes régions de notre systême planétaire, on a craint que quelques-unes pourroient un jour rencontrer la Terre ; que peut-être d'autres l'avoient déja rencontrée, & avoient occasionné ces bouleversemens dont on découvroit les vestiges. Cette terreur aussi ancienne que

l'époque la plus reculée des connoissances humaines, dont l'origine se perd dans la Nuit des Tems, & dont tous les Peuples paroissent avoir été saisis à l'aspect des Cometes, favorisoit cette opinion. Ainsi donc les Cometes, après avoir été long-tems des signes de la colere céleste, lorsqu'on crut les mieux connoître, devinrent les agens dont l'Etre suprême se servoit pour changer la face de l'Univers. C'est ainsi que Whisthon, célebre Astronome Anglois, prétendit expliquer le Déluge, par l'inondation de la queue d'une Comete, qu'il croit être la même que la Comete de 1680. Non-seulement l'Auteur dont nous parlons, a tenté d'expliquer ainsi le Déluge; il pense qu'une Comete, & peut être la même, revenant un jour du Soleil, & rapportant des exhalaisons brûlantes, causera aux Habitans de la Terre, tous les malheurs qui leur sont prédits à la fin du Monde, & la Conflagration universelle qui doit consumer notre Planete.

Si l'on en croit Maupertuis, ces dangers ne sont pas les seuls que nous courons de la part des Cometes. Leurs queues, en se mêlant à notre Atmosphere, peuvent y causer des changemens nuisibles aux Plantes & aux Animaux; leur attraction peut nous obliger à tourner autour d'elles; ou du moins déranger notre orbite, au point d'exposer la Terre aux plus grandes vicissitudes; tantôt brûlée dans son Périhélie, tantôt glacée par le froid des régions les plus éloignées du Ciel; leur choc peut occasionner un bouleversement général sur notre Globe, & leur approche, en élevant les eaux de la Mer, peut causer un nouveau Déluge universel.

D'autres Philosophes ont eu des idées plus consolantes, & Voltaire est de ce nombre. Frappés de l'harmonie qui regne dans toutes les parties de l'Univers, & donnant tout aux causes finales, ils ont cru trouver dans la bonté de l'Auteur de la Nature, un préservatif contre ces craintes.

L'examen des questions précédentes m'a donné lieu de résoudre les deux suivantes. Quelle est de toutes les Cometes connues celle qui peut approcher le plus près de la Terre ? Quelle est celle qui a véritablement approché le plus près de notre Globe, & dans quel tems le Phénomene est-il arrivé ?

Relativement à la premiere question, il y a grande apparence que la Comete de 1680 est de toutes les Cometes connues, celle qui peut approcher le plus près de la Terre; je dis grande apparence, car suivant mes calculs, la Comete de 837 pourroit encore ap-

procher davantage de notre Globe. Mais comme cette Comete n'a été calculée que ſur des obſervations faites à la Chine dans le neuvieme Siecle, il eſt difficile d'avoir une entiere confiance dans ſes élémens. Cette plus petite diſtance eſt d'environ cent ſoixante mille lieues.

Quant à la ſeconde queſtion, elle devient intéreſſante pour notre Siecle, par la ſolution ſinguliere qu'elle préſente. De toutes les Cometes connues, celle qui a approché le plus près de la Terre, eſt conſtamment la Comete de 1770. Le Phénomene a eu lieu de nos jours, le 1 Juillet 1770, ſans qu'il y ait eu la moindre altération dans la Nature; & il n'a été remarquable que pour les Aſtronomes. Nous pouvons donc atteſter à nos deſcendans, que relativement aux Cometes, nous nous ſommes trouvés dans la circonſtance la plus critique que l'Hiſtoire avérée de l'Aſtronomie nous ait tranſmiſe; qu'il ne nous eſt arrivé aucun déſaſtre, & que ſuivant toutes les loix des probabilités, ils n'ont abſolument rien à redouter de ces Corps céleſtes. Les mêmes calculs m'ont appris que les Cometes qui ont effrayé l'Univers, ne ſont point celles qui ont approché le plus près de la Terre; ce ſont celles qui ont déployé de longues queues depuis leur paſſage par le Périhélie; quoique pluſieurs de ces Cometes, telle que celle de 1680, fuſſent alors à de très-grandes diſtances de notre Globe.

L'Hiſtoire nous a conſervé la mémoire d'un bien plus grand nombre de Cometes que celles dont on a déterminé les élémens. On peut conſulter à ce ſujet le *Theatrum Cometicum* de Lubiénitz; ouvrage ſingulier, dans lequel l'Auteur a voulu prouver qu'il n'y avoit point eu de grands déſaſtres ſans Cometes, & de Cometes ſans grands déſaſtres. Des quatre cent quinze Cometes que Lubiénitz compte à l'époque de 1665, cinquante avoient paru ſuivant lui, avant l'Ere chrétienne, & trois cent ſoixante-cinq depuis la venue de Jéſus-Chriſt. Il faut, à la vérité rabattre un peu de ce calcul; car l'Auteur ſupplée quelquefois au ſilence des Hiſtoriens; & quand il voit un grand malheur ſans Comete, il en conclut que la Comete a été oubliée, & il la reſtitue.

Il ne faut pas croire cependant que toutes les Cometes dont parle Lubiénitz ſoient dans ce cas. La plupart ſont atteſtées par des Auteurs dont le témoignage ne peut être ſuſpect. Pluſieurs même de ces Cometes ont fait époque dans l'Hiſtoire, par les événemens auxquels elles ſont liées. Telles ſont celles que l'on vit briller à la

naiſſance de Mithridate, & à la mort de Jules-Céſar. D'autres enfin, d'après les circonſtances de leurs apparitions, ne ſont viſiblement que les retours des Cometes, dont on a déterminé depuis les révolutions périodiques. Telles ſont, par exemple, les Cometes des Années 1305, 1230, 1005, 930, 550, 399, 323, la même que celle de 1682. Telles ſont, ſuivant Struick, celles de 1512, 1338, 1165, 990 & 817, la même que l'on a revue depuis en 1686; telles ſont, ſuivant Halley, celles des Années 1106 & 531, la même que la fameuſe Comete de 1680, & que celle qui parut à la mort de Jules-Céſar.

Je n'ai point parlé de toutes ces Cometes. Comme leurs apparitions ſont rapportées d'une maniere ſi vague, qu'il a été impoſſible de calculer leurs orbites, elles ceſſent d'être intéreſſantes aux yeux des Aſtronomes, à qui elles ne laiſſent que le regret de ne pouvoir pas les aſſujettir au calcul. Une Notice de ces Cometes, en la ſuppoſant même faite avec toute la critique poſſible, ne pourroit être utile que dans la ſuite des Siecles, pour vérifier ſi l'on ne trouveroit point quelques veſtiges des apparitions des Cometes dont on auroit déterminé les retours périodiques; encore faudroit-il mettre la plus grande circonſpection dans les concluſions que l'on feroit tenté d'en tirer. Quoi qu'il en ſoit, je ne parle que des Cometes dont on a calculé les élémens; ce ſont les ſeules qui appartiennent véritablement à l'Aſtronomie.

Si l'on ne compte que pour une ſeule & même Comete, celles des Années 1456, 1531 1607, 1682 & 1759, ainſi que cela eſt démontré; que l'on ne compte pareillement que pour une ſeule Comete, celles de 1264 & 1556, & celles de 532 & 1661, ainſi que cela eſt très-probable; on connoît en tout ſoixante-quinze Cometes dont on ait déterminé les orbites, à l'époque où j'écris, en y comprenant celle que M. Meſſier a découverte dernierement dans les Etoiles de la Grande-Ourſe. De ces ſoixante-quinze Cometes, trente-neuf ſont directes, & trente-ſix ſont rétrogrades; huit ont leurs orbites inclinées depuis 0^d juſqu'à 10^d; neuf depuis 10^d juſqu'à 20^d; quatre depuis 20^d juſqu'à 30^d; neuf depuis 30^d juſqu'à 40^d; ſept depuis 40^d juſqu'à 50^d; neuf depuis 50^d juſqu'a 60^d; dix depuis 60^d juſqu'à 70^d, dix depuis 70^d juſqu'à 80^d; neuf enfin depuis 80^d juſqu'à 90^d. Treize ſeulement ont leurs diſtances périhélies plus grandes que la moyenne diſtance de la Terre au Soleil; ſoixante-deux ont leurs diſtances périhélies plus petites.

Si l'on ajoute les inclinaisons de toutes les Cometes, & que l'on divise cette somme, par le nombre des Cometes observées, on aura pour inclinaison moyenne, 47^{d} 32$'$. En supposant que les Cometes aient été lancées au hasard dans l'espace, cet angle doit peu différer de 45^{d}, ce qui s'accorde très-bien avec l'observation.

Il paroît donc que dans notre systême Planétaire il n'existe point de cause générale qui fasse mouvoir les Cometes dans un sens plutôt que dans un autre, ni dans un plan déterminé; que le Plein & les Tourbillons sont inconciliables avec les mouvemens des Cometes; qu'elles n'ont pas de Zodiaque, ainsi que l'avoit pensé un Homme célebre, qui leur attribuoit celui désigné par les deux vers suivans,

Antinous, Pegasusque, Andromeda, Taurus, Orion,
Procyon, atque Hydrus, Centaurus, Scorpius, Arcus.

Si donc l'on observe que les Planetes & leurs Satellites se meuvent dans le même sens & à très-peu près dans le même plan, cet effet singulier tient, ainsi que je l'ai déja remarqué, à des causes particulieres, qui nous sont inconnues, mais qui sont indépendantes du systême général de l'Univers.

J'ai vu des personnes, même éclairées, demander si l'on pourra jamais connoître les révolutions de toutes les Cometes. Quoique ce soit à la Postérité à décider irrévocablement cette question, j'oserois en appeller à la Comete de 1759. Est-il possible de douter que cet Astre ne tourne autour du Soleil en 77 ans? Et si l'on a pu déterminer sa révolution, pourquoi seroit-il impossible de déterminer celle des autres Cometes? La théorie est connue, c'est au Tems à faire le reste.

Il ne faut pas croire cependant que la révolution d'une même Comete, soit rigoureusement constante. Halley, à l'occasion de la Comete de 1682, avoit remarqué que ses élémens pouvoient être altérés par la proximité de Jupiter; & en annonçant son retour pour 1759, il avoit mis une restriction à son annonce. Clairaut a repris cette théorie, dans un excellent Ouvrage, où il soumet au calcul rigoureux la marche de cette Comete. Je m'écarterois de mon sujet, si je voulois donner l'analyse de ce travail, dont l'exécution fait autant d'honneur à la France, que la premiere idée en a pu faire à l'Angleterre. Il suffit de savoir qu'au moyen des calculs les plus pénibles, M. Clairaut est venu à bout de déterminer à un mois près, la derniere révolution de la Comete.

On

On demande quelquefois, quel eſt préciſément le nombre des Cometes? On doit ſentir qu'il eſt impoſſible de répondre à cette queſtion. Quelques Philoſophes penſent que ce nombre eſt infini. Ils ſe fondent ſur ce que preſque toutes les Cometes que l'on découvre, ſont de nouvelles Cometes. D'autres Philoſophes au contraire, croient que ce nombre eſt très-limité; quelques-uns même ont avancé que probablement il ne ſurpaſſe pas trois cents, plus ou moins. Aucune de ces opinions n'étant fondée ſur des raiſonnemens démonſtratifs, le plus ſûr, ce me ſemble, eſt de nous en tenir à ce que nous ſavons de certain, ſans chercher à pénétrer des ſecrets que le Tems ſeul peut dévoiler.

Je termine cette Notice, par des réflexions ſur la cauſe pour laquelle les orbites des Cometes, ſe confondent ſenſiblement avec des Paraboles, dans les points de leurs trajectoires que l'on obſerve. Ce Phénomene, auquel on ne fait pas grande attention, paroît cependant très-ſingulier lorſqu'on le ſoumet au calcul des probabilités. En effet, l'eſpece de la trajectoire qu'un projectile décrit autour d'un centre d'attraction, dépend de la réunion de pluſieurs cauſes différentes, & principalement de la vîteſſe du Projectile à tel ou tel point de ſon orbite. Or il y a un nombre infini de degrés de vîteſſe qui donnent des Hyperboles ou des Ellipſes, contre un nombre limité qui donne des orbites approchantes de la Parabole vers le Périhélie. D'après cette conſidération, les orbites des Cometes ne devroient donc pas toutes ſe confondre avec la Parabole.

Pour rendre raiſon de ce Phénomene, ne peut-on pas dire que, ſi primitivement il y a eu des Cometes qui aient décrit autour de notre Soleil, des Hyperboles ſenſibles, elles ont dû par cela même, totalement diſparoître de notre Syſtême planétaire, pour ſe fixer autour des Soleils, qui par les circonſtances particulieres du mouvement, & leur force attractive plus grande, les auront forcées de circuler autour d'eux dans l'Ellipſe? Or, en vertu de ce qui a été démontré dans cet Ouvrage, ces Ellipſes doivent être fort alongées, relativement aux Cometes qui approchent du Soleil, & conſéquemment ſe confondre ſenſiblement avec des Paraboles vers le Périhélie.

Je donne enſuite les méthodes qui peuvent ſervir à calculer les perturbations qu'une Comete qui paſſeroit très-près de la Terre, éprouveroit de la part de notre Planete, & feroit éprouver à l'orbite terreſtre. Pour donner une idée de ce qui arriveroit dans tous

les cas, j'applique le calcul à plusieurs Cometes. Sans entrer dans aucun détail sur les résultats que l'on peut voir dans le corps même de l'Ouvrage, les calculs m'ont appris que si, par exemple, une Comete sans masse tendoit presque directement au centre de la Terre en vertu de son mouvement relatif, les perturbations de son orbite seroient peu sensibles, jusques vers l'instant où elle approcheroit de l'apside inférieure de la trajectoire relative qu'elle décriroit autour de la Terre. C'est à cet instant que se feroient les grands changemens dans l'orbite de la Comete; & ces changemens pourroient être tels, qu'abstraction faite du choc des deux corps, l'orbite fût totalement dénaturée.

Ces mêmes formules m'ont donné lieu d'examiner une question qui s'est présentée à Maupertuis, & dont j'ai déja parlé. Si l'on en croit cet Auteur : « Quelque Comete passant près de la Terre, pour-» roit tellement altérer son mouvement, qu'elle la rendroit Comete » elle-même. Au lieu de continuer son cours dans une région uni-» forme & d'une température proportionnée aux différens Animaux » qui l'habitent; la Terre exposée aux plus grandes vicissitudes, tan-» tôt brûlée dans son Périhélie, tantôt glacée par le froid des der-» nieres régions du Ciel, iroit à jamais de maux en maux dif-» férens, à moins que quelque autre Comete ne changeât encore » son cours, & ne la rétablît dans sa premiere uniformité. »

Heureusement ces dangers sont subordonnés à l'existence d'une Comete, qui puisse approcher de la Terre à une distance nuisible. J'ai déja fait voir que la probabilité de cet événement est infiniment petite; mais quand même on supposeroit cette possibilité moins éloignée, le danger ne seroit peut-être pas aussi grand qu'on se l'imagine. En effet, une Comete égale en masse à la Terre, & qui en approcheroit de 13000 lieues dans les circonstances les plus favorables à son action, n'augmenteroit, d'après mes calculs, le grand axe de l'orbite terrestre, que de 0,00441, & par conséquent l'Année, que de 2 jours 10^h 16', variations trop peu considérables pour que leur effet fût nuisible. On peut, à la vérité, augmenter à l'infini, par la pensée, la masse de la Comete; mais plus cette masse sera grande, moins l'existence d'une pareille Comete paroît probable.

C'étoit une opinion généralement répandue parmi les Arcadiens, que leurs Ancêtres avoient habité la Terre, avant que cet Astre eût un Satellite. Cette opinion nous a été transmise par Lucien. D'ailleurs rien n'est plus formel que le passage d'Ovide dans ses

Fastes. A l'occasion de l'Arcadie, ce Poëte s'exprime en ces termes :

> *Orta prior Lunâ, de se si creditur ipsi,*
> *A magno Tellus Arcade nomen habet.*

Quelques Philosophes, frappés de ces autorités, ont pensé que la Lune pourroit bien être une Comete, qui ayant passé très-près de la Terre, avoit été obligée de devenir son Satellite. Maupertuis, après avoir détaillé tous les dangers que nous courons de la part des Cometes, donne pour dédommagement de ces dangers, l'acquisition de notre Lune, & l'espérance de pouvoir acquérir par la suite de nouveaux Satellites. Cette espérance est à la vérité compensée suivant lui, par la crainte de devenir nous-mêmes Satellites d'une Comete, si sa masse étoit supérieure à celle de notre Globe.

J'examine dans la Section huitieme, si ces craintes & ces espérances sont fondées. Le calcul m'a fait voir que, relativement à toutes les Cometes de l'espece de celles que nous connoissons, c'est-à-dire, de celles dont la vîtesse est à la vîtesse de la Terre, comme $\sqrt{2}$ est à 1, lorsqu'elles passent à une même distance du Soleil que notre Globe, il n'en est aucune qui puisse devenir Satellite de la Terre. Quelque hypothese que l'on imagine, soit que la Comete perde une partie de son mouvement dans l'Atmosphere de la Terre, soit qu'elle vienne la choquer, jamais elle ne pourra circuler autour de notre Globe, sur-tout à la même distance & suivant les mêmes loix que la Lune.

Quant aux Cometes dont la vîtesse seroit infiniment peu différente de celle de la Terre, si toutefois il en existe; comme la supposition dont nous sommes partis dans les calculs, n'est pas absolument rigoureuse, il nous est impossible de prononcer affirmativement si de pareilles Cometes ne pourroient pas devenir Satellites de la Terre. Ce qu'il y a de sûr, c'est que dans le cas même où, géométriquement parlant, l'impossibilité n'en paroîtroit pas démontrée, la réunion des circonstances qui devroient se rencontrer pour que cela eût lieu, est telle que l'événement est contre toute probabilité. D'ailleurs une pareille Comete devenue Satellite de la Terre, ne tiendroit presque point à notre globe; & puisque elle auroit circulé primitivement autour du Soleil comme centre de ses mouvemens; lorsque la suite des révolutions rameneroit les mêmes positions respectives de la Terre & de la Comete, elle devroit cesser de tourner autour de la Terre, pour recommencer une nouvelle trajectoire autour du Soleil.

Cette derniere considération, & plusieurs autres détaillées dans mon Ouvrage, semblent démontrer, suivant moi, que la Lune n'est point une Comete qui ait circulé autour du Soleil; tout me paroît au contraire porter l'empreinte d'un arrangement primitif aussi ancien que notre Globe. En un mot, je ne serois pas éloigné de penser que, même dans la rigueur géométrique, la Terre ne peut pas espérer de nouveau Satellite, & qu'elle ne doit pas craindre de devenir Satellite d'une Comete.

Je passe ensuite à la solution de deux questions, qui m'ont paru présenter un objet de curiosité assez singulier; je veux parler des conditions qui devroient avoir lieu, pour qu'un corps lancé pût circuler autour d'une Sphere d'attraction, à la maniere des Satellites; & de la détermination des trajectoires que les Satellites décriroient autour du Soleil, si leur Planete principale étoit subitement anéantie. Quoique ces questions n'aient aucune application dans la Nature, comme cependant les solutions se déduisent facilement des formules détaillées dans mon Ouvrage, je n'ai pas cru devoir les passer sous silence.

On sent assez que les trajectoires que décriroient les Satellites autour du Soleil, seroient des Sections coniques. Mais ces trajectoires seroient-elles des Ellipses, des Hyperboles, des Paraboles? Le sens du mouvement seroit-il direct ou rétrograde? Cela dépend du point où le Satellite se trouveroit dans l'orbite qu'il décrit actuellement autour de la Planete principale, à l'instant où cette Planete seroit anéantie. Je fais voir, par exemple, que la Lune & le cinquieme Satellite de Saturne, ne pourroient jamais décrire que des Ellipses autour du Soleil; que les Satellites de Jupiter pourroient indifféremment décrire des Ellipses, des Paraboles ou des Hyperboles; mais que les seules trajectoires du premier & du second Satellite pourroient être rétrogrades. Je démontre enfin qu'il est contraire aux loix de la Méchanique de supposer que la Terre & les Planetes aient été lancées du Soleil.

Il devoit entrer dans le plan de cet Ouvrage de donner la Notice de ce que l'on connoît sur les Planetes & sur leurs Satellites. Notre Systême planétaire est actuellement composé de sept Planetes principales & de douze Satellites. Je dis actuellement, car peut-être ce nombre sera-t-il un jour augmenté par la découverte de quelque nouvelle Planete. Les Planetes principales connues à l'époque actuelle sont Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter,

Saturne, Herſchell. Ces Planetes ont le Soleil pour centre de leurs mouvemens; ou, pour parler plus exactement, elles tournent autour du centre de gravité de notre Syſtême; centre qui, attendu l'immenſe ſupériorité de la maſſe du Soleil ſur les maſſes réunies des autres Planetes, s'éloigne infiniment peu du centre du Soleil. Des douze Satellites qui compoſent pareillement notre Syſtême, quatre tournent autour de Jupiter, cinq autour de Saturne, deux autour de la Planete d'Herſchel, & la Lune enfin accompagne notre Terre. J'expoſe ce que l'on ſait de plus certain ſur les Planetes; leurs diametres; leurs volumes; leurs maſſes; leurs diſtances au Soleil; le nombre de pieds qu'un corps grave parcourroit pendant la premiere ſeconde de ſa chute à leurs ſurfaces; la longueur du pendule qui bat les ſecondes; la durée de leurs révolutions par rapport aux Etoiles fixes; leurs révolutions tropiques; leurs grands axes; les excentricités de leurs orbites; la longitude de leurs nœuds; le lieu de leurs aphélies; l'inclinaiſon du plan de leurs orbites ſur l'Ecliptique; les mouvemens réels & apparens de leurs nœuds; les mouvemens réels & apparens de leurs aphélies; leur rotation, &c. On peut voir ces détails dans l'Ouvrage même. J'ai cru pareillement que le Lecteur verroit avec plaiſir, une expoſition abrégée de ce que les découvertes modernes nous ont appris, relativement aux Satellites.

On demande quelquefois ſi le nombre des Planetes principales de notre Syſtême eſt irrévocablement fixé à ſept; voici la réponſe à cette queſtion. L'on ſe feroit évidemment trompé, ſi, avant la découverte de la Planete d'Herſchell, l'on avoit affirmé qu'il n'exiſtoit que ſix Planetes principales. Il n'y a pas maintenant plus de certitude que le nombre des Planetes ſoit fixé à ſept, qu'il n'y en avoit autrefois que ce nombre fût fixé à ſix. On peut même ajouter que la diſparition de pluſieurs petites Etoiles qui ne ſe retrouvent plus dans les endroits où elles ont été obſervées, fait ſoupçonner avec vraiſemblance l'exiſtence de nouvelles Planetes. L'on doit dire cependant que comme ces Planetes ſont certainement très-petites, qu'elles ont peu de mouvement, qu'elles ſe confondent avec les Etoiles les plus imperceptibles, ce ne ſera probablement qu'au haſard que l'on devra leur découverte.

Au reſte, au milieu de toutes les inégalités auxquelles ſont aſſujettis les Corps Céleſtes qui compoſent notre Syſtême, les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ces Corps, ſont uni-

formes; leurs diſtances moyennes au foyer des forces qui les animent ſont conſtantes, & leurs inégalités ſéculaires ſont périodiques. Ainſi le Syſtême général ne fait qu'oſciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une très-petite quantité. Il jouit, en vertu de ſa conſtruction & des loix de la peſanteur, d'une ſtabilité qui ne peut être détruite que par des cauſes étrangeres.

La Théorie des forces centrales nous a appris que, relativement aux Planetes qui compoſent nötre Syſtême, deux ſeuls élémens ſont immuables, les grands axes de leurs orbites & les tems de leurs révolutions par rapport aux fixes; tous les autres élémens des orbites, éprouvent des altérations de la part des actions mutuelles des Planetes les unes ſur les autres. Lors donc que l'on a conſtruit des Tables pour une certaine Planete, on peut demander ſi l'on connoiſſoit parfaitement les élémens correſpondans à l'époque dont on eſt parti, le lieu de la Planete, la longitude du nœud aſcendant, l'inclinaiſon du plan de l'orbite, l'inſtant du paſſage par le Périhélie, le moyen mouvement de la Planete, l'excentricité de l'orbite. On peut demander également ſi l'on connoiſſoit aſſez parfaitement la loi des variations de ces élémens dues aux perturbations des Planetes, pour les repréſenter avec une égale juſteſſe, après un intervalle donné.

Si l'on pouvoit répondre d'une maniere affirmative à ces deux queſtions, les Tables aſtronomiques auroient le degré de perfection dont elles ſont ſuſceptibles; mais ſi la certitude n'eſt pas auſſi grande qu'on pourroit le deſirer, l'on doit encore chercher à perfectionner les Tables.

Lorſque l'on compare les lieux obſervés d'une Planete, avec les lieux calculés d'après de bonnes Tables, j'entends celles où l'on a employé tous les termes indiqués par la théorie, les différences entre ces lieux peuvent être attribuées à deux cauſes; l'inexactitude des élémens correſpondans à l'époque dont on eſt parti; l'incertitude de la loi de la variation de ces élémens. C'eſt principalement à démêler ces deux effets, que conſiſte l'art de rectifier les Tables; il devoit donc entrer dans le plan de cet Ouvrage, de donner les formules qui peuvent conduire le plus directement à ce but. Cette partie de mon travail peut mériter quelque attention de la part des Aſtronomes.

J'ai cru devoir préſenter auſſi quelques réflexions ſur un petit mouvement que l'on a ſoupçonné dans le centre de gravité de notre

Syſtême planétaire. On ſait que quelques Etoiles, telles qu'Arcturus & α de l'Aigle, paroiſſent avoir des mouvemens particuliers. Le deſir de démêler dans ces mouvemens, ceux qui ſont propres à ces Etoiles d'avec ceux qui peuvent appartenir à notre Syſtême, a engagé de nos jours quelques Aſtronomes à entreprendre des calculs à ce ſujet. Les premiers réſultats leur ont fait ſoupçonner dans notre Syſtême planétaire un mouvement particulier qui l'entraîne vers la partie du Ciel où l'on obſerve l'Étoile α d'Hercule. J'ai examiné ſi cette aſſertion étoit fondée ; j'ai donné les équations générales qui peuvent ſervir à réſoudre le Problême. Il m'a paru, d'après mes recherches, que toute aſſertion, relativement à cet objet, ſeroit précipitée. Mais quand même on viendroit à conſtater dans la ſuite des Siecles, que l'enſemble de notre Syſtême paroît avoir un mouvement en ligne droite, il ne faudroit pas croire cependant que ce mouvement fût véritablement rectiligne. Il en eſt probablement de notre Syſtême particulier, relativement à l'aſſemblage des Etres, comme d'une Planete particuliere relativement à notre Soleil ; & de même que les Planetes décrivent une courbe autour du centre de gravité de leur Syſtême particulier, de même l'enſemble de notre Syſtême décrit une trajectoire autour du centre commun de gravité de tous les Syſtêmes. La ligne droite que l'on auroit déterminée, ne ſeroit donc qu'un très-petit arc d'une trajectoire immenſe qui ſeroit décrite dans une ſuite incalculable de Siecles. Au reſte, cette réflexion paroît d'autant mieux fondée que l'on ne connoît que deux eſpeces de mouvemens dans le Ciel ; des mouvemens oſcillatoires qui ſe rétabliſſent au bout d'une époque plus ou moins grande, mais déterminée ; & des mouvemens giratoires qui ſe continuent indéfiniment. Ces deux mouvemens ſont les principes ſimples que la Nature ſemble avoir choiſis pour aſſurer à ſon ouvrage une inaltérable ſtabilité.

Cet Ouvrage eſt terminé par des recherches ſur la premiere Comete de 1770. On ſait que l'on n'a pu repréſenter les lieux obſervés de cette Comete, en employant la Parabole ; & qu'au contraire, lorſque l'on y a appliqué la théorie elliptique, on avoit réuſſi à repréſenter les obſervations avec une exactitude ſatisfaiſante ; c'eſt à M. Léxell que l'on doit cette remarque. J'ai cru devoir examiner ſi les concluſions de M. Léxell ſont fondées. Ce travail m'a fourni l'occaſion d'éclaircir pluſieurs points importans de la théorie des Cometes.

Je me ſuis d'abord convaincu de la néceſſité indiſpenſable de débarraſſer les calculs, des erreurs des Obſervations. En général la preuve la moins équivoque qu'il s'eſt gliſſé des erreurs dans les Obſervations, eſt la marche irréguliere des premiere, ſeconde & troiſieme différences relatives à ces Obſervations. En effet, quoiqu'on ignore la [illegible]écise que ſuivent ces Obſervations, il eſt contre toute vraiſemb[illegible], que dans un petit intervalle de tems, la marche ſoit irréguliere. C[illegible]te ſimple conſidération eſt le fondement des Méthodes que j'ai cru devoir propoſer.

Je n'entrerai da[illegible] aucun détail ſur les remarques qu'a fait naître l'application de mes formules à la premiere Comete de 1770. Je dirai ſeulement qu'en effet aucune courbe parabolique ne peut repréſenter les mouvemens de cette Comete, ſi les Obſervations ſont tellement exactes que l'on croie ne pas pouvoir les altérer. Mais ſi l'on penſe, avec pluſieurs Aſtronomes, que la plupart des Etoiles auxquelles la Comete a été comparée, ſur-tout lorſqu'elle avoit un mouvement rapide, demandent à être vérifiées de nouveau, alors la queſtion devient problématique.

Je terminerai ce Diſcours par une Notice abrégée de ce que l'on ſait ſur la Comete découverte en dernier lieu par M. Meſſier. Cette Comete a été obſervée depuis le 25 Novembre 1788, juſqu'à la fin de Décembre de la même Année. Dans cet intervalle, elle a parcouru le quarré de la grande *Ourſe*, la *queue du Dragon*, a *paſſé* très-près de l'Étoile Polaire, a *traverſé le genouil & le bras de Céphée*, l'eſpace entre Caſſiopée & le Lézard, *le quarré de Pégaſe*, *preſqu'à* égale diſtance des Etoiles α d'Andromede, β, γ, α de Pégaſe, & a diſparu ſur l'Aile auſtrale de Pégaſe. M. Méchain a conclu des Obſervations, que la Comete eſt rétrograde, que l'inclinaiſon de ſon orbite eſt de $12^d\ 28'$, ſa diſtance périhélie de 1,063012, qu'elle a paſſé par le périhélie le 10 Novembre $7^h\ 35'$; que la longitude de ſon nœud aſcendant eſt de $5^s\ 7^d\ 4'$, & le lieu du périhélie ſur l'orbite, dans $3^s\ 9^d\ 8'$. Le 2 Décembre la Comete s'eſt trouvée à 2^d du Pole boréal. Au tems de ſa plus grande proximité de la Terre, lorſque ſa diſtance étoit de 0,2718, on ne l'appercevoit que foiblement à la vue ſimple; dans la Lunette, on diſtinguoit une queue fort ſenſible, & une chevelure très-éparpillée; le noyau n'a jamais été bien lumineux.

LETTRES DE VOLTAIRE,

RELATIVE

AU PRÉSENT OUVRAGE.

J'AI cru que le Lecteur verroit avec plaisir, deux Lettres de Voltaire que l'on ne trouve dans aucun de ses Recueils, & qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, au sujet de mon Ouvrage; ce sont les réponses à l'envoi que je lui avois fait de mes Essais sur les Cometes & sur l'Anneau de Saturne. Voici les lettres d'envoi & les réponses de Voltaire.

LETTRE A VOLTAIRE,

En lui envoyant mes Essais sur les Cometes.

POUR entendre cette lettre, il faut savoir que j'avois pris pour épigraphe, les vers suivans de l'Epître de Voltaire à Madame la Marquise du Châtelet,

> Cometes que l'on craint à l'égal du Tonerre,
> Cessez d'épouvanter les Peuples de la Terre.

MONSIEUR,

IL est juste de rendre à César ce qui appartient à César. D'après ce grand principe de Morale, personne n'a plus droit que vous à l'Ouvrage que j'ai l'honneur de vous présenter. Vous verrez en effet, que ce n'est qu'un commentaire sur la vérité que j'ai prise pour Epigraphe, & que vous avez su exprimer en si beaux vers. Je n'ai d'autre mérite que d'avoir rendu sensible dans quatre cents pages, ce que vous avez exposé dans deux lignes. Vous avez encore un autre droit à cet

Ouvrage, c'est l'intérêt que vous devez prendre à la stabilité de l'Univers. Qu'importe en effet au vulgaire des hommes la durée de notre Terre? Pourvu que la révolution qui doit la détruire, n'arrive pas dans l'instant précis de leur existence éphémere, tout le reste leur est à-peu-près indifférent. Mais vous, MONSIEUR, dont la réputation durera autant que le Monde, vous avez un tout autre intérêt à la stabilité de la Terre, & vous devez accueillir un Ouvrage dans lequel cette stabilité est démontrée.

J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE DE VOLTAIRE.

A Ferney le 18 Janvier 1775.

MONSIEUR,

JE vous remercie, avec beaucoup de sensibilité, de l'utile & beau présent que vous daignez me faire. Je ressemble assez à ce vieux animal de basse-cour, à qui l'on donna un diamant; la pauvre bête répondit qu'il ne lui falloit qu'un grain de millet.

Autrefois, MONSIEUR, j'aurois pu suivre vos calculs, mais à quatre-vingt-un ans, accablé de maladies, je ne puis guere m'en tenir qu'à vos résultats. Je les trouve si probables que je ne compterai pas après vous. Je suis très-persuadé qu'aucune Comete ne peut prendre aucune Planete en flanc. Vous décidez un grand procès; vous donnez un arrêt par lequel le genre humain conservera long-tems son héritage; reste à savoir s'il en vaut la peine.

Je ne crois pas non-plus que nous acquérions jamais un nouveau Satellite, qui seroit, ce me semble, un domestique fort importun, & qui troubleroit furieusement les services que nous rend celui que nous avons depuis si long-tems.

Pour les Arcadiens, qui se croyoient plus anciens que la Lune, il me paroît qu'ils ressemblent à ces Rois d'Orient, qui s'intituloient Cousins du Soleil. Je veux croire que ces Messieurs d'Arcadie avoient inventé la Musique;

> . . . . . . Soli cantare periti,
> Arcades;

mais ces bonnes gens n'apprirent que fort tard à manger du gland, & il est dit qu'ils se nourrirent d'herbes pendant des siecles.

Je souhaite que Newton ait raison, quand il soupçonne qu'il y a des Cometes qui tombent dans le Soleil pour le nourrir, comme l'on jette des bûches dans un feu qui pourroit s'éteindre. Newton croyoit aux causes finales; j'ose y croire comme lui; car enfin la lumiere sert

à nos yeux, & nos yeux semblent faits pour elle. Toute la Nature n'est que Mathématique. Vous la voyez toute entiere avec les yeux de l'esprit ; & moi, qui ai perdu les miens, je m'en rapporte entiérement à vous.

LETTRE A VOLTAIRE,

En lui envoyant mes Essais sur l'Anneau de Saturne.

MONSIEUR,

RECEVEZ, je vous prie l'histoire d'un vieillard respectable, dont on s'occupera sur la Terre, tant que le savoir sera en honneur parmi les hommes. Son front, rayonnant de lumiere, est orné d'une couronne immortelle ; il nous éclaire & nous offre un des Phénomenes les plus singuliers de la Nature. Ce vieillard est Saturne. Je m'empresse de le nommer, car on feroit tenté d'en désigner un autre dont votre modestie vous empêcheroit de reconnoître le portrait. Puisse cette analogie mériter à mon Ouvrage un accueil favorable de votre part.

J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE DE VOLTAIRE.

A Ferney le 6 Avril 1776.

MONSIEUR,

L'HONNEUR que vous me faites de m'envoyer votre Saturne, me fait sentir toute votre bonté & toute mon indignité ; mais tout indigne que je suis de ce beau présent, il me fait faire bien des réflexions. Nous avons connu si tard ses Lunes & son Anneau, très-inutilement appellés les Astres de Louis ; les Philosophes de notre chétif Globe ont été tant de siecles à deviner ce qui se passe autour de cette derniere Planete, qu'il est clair qu'elle n'a pas été faite pour nous ; mais en même tems, il est bien beau que de petits Animaux de cinq pieds & demi, aient calculé des phénomenes si étonnans, à trois cent trente millions de lieues loin de chez eux.

Quand on songe que la lumiere réfléchie par notre petite Planete & par ce gros Saturne, est précisément la même ; que la gravitation agit sur ses cinq Lunes comme sur la nôtre, que nous pesons sur le Soleil

aussi-bien que Saturne ; que ses cinq Lunes & son Anneau, semblent absolument nécessaires pour l'éclairer un peu ; on est ravi d'admiration, & l'on s'anéantit. On est obligé d'admettre, avec Platon, un Eternel Géometre.

Ceux qui, comme vous, MONSIEUR, entrent dans ce vaste & profond sanct[illegible]ire [illegible] paroissent des êtres bien au-dessus de la Nature humaine. Je vou[illegible]e que je ne conçois pas comment un esprit occupé des loix d[illegible]ivers entier, peut descendre à juger des procès dans un petit co[illegible] ce Monde appellé la Gaule.

Cependant, puisque Newton, de qui Halley disoit :

> Nec fas est pr[illegible] mortali attingere Divos,

n'a pas dédaigné d'être à la tête des Monnoyes d'Angleterre, on ne peut pas se fâcher que vous soyiez Conseiller au Parlement de Paris. Puissiez-vous, MONSIEUR, réformer notre Jurisprudence, comme vous perfectionnez notre Astronomie.

J'ai l'honneur d'être, &c.

JUGEMENT

DE L'ACADÉMIE.

L'ACADÉMIE nous a chargés, M^{rs}. le Président DE SARON, BAILLY, COUSIN & moi (1), de lui rendre compte d'un Ouvrage de M. DU SÉJOUR, intitulé : *Traité Analytique des Mouvemens apparens des Corps Célestes.* Nous lui avons déja fait le rapport du premier Volume de cet Ouvrage. Il nous reste à lui rendre compte du second Volume. La Figure de la Terre & quelques courbes que l'on peut tracer sur sa surface, sont l'objet du premier Livre. La plus intéressante de ces courbes est la Perpendiculaire à la Méridienne. Si par un point donné d'un Méridien quelconque, on mene perpendiculairement à ce Méridien, une tangente à la surface de la Terre, elle déterminera le premier côté de la courbe. Le prolongement de ce côté s'élevera au-dessus de la surface du Globe, & rencontrera une verticale infiniment voisine. En le pliant de maniere qu'il aboutisse au pied de cette verticale, on aura le second côté de la courbe. Ce côté, prolongé & plié de la même maniere, donnera le troisieme côté, & ainsi de suite. C'est ainsi que l'on a élevé des Perpendiculaires sur différens points de la Méridienne de l'Observatoire, pour y rapporter tous les lieux de la France. M. DU SÉJOUR détermine généralement la nature de cette courbe. En supposant ensuite les Meridiens de la Terre elliptiques, il donne des Méthodes élégantes & simples pour avoir la longitude & la latitude des lieux déterminés par les Perpendiculaires à la Méridienne. Ces Méthodes se simplifient encore, lorsque l'on considere les parties d'un même Royaume. M. DU SÉJOUR en tire des formules à l'aide desquelles on peut déterminer avec la plus grande facilité, d'après les mesures géodésiques, la position des divers points de la France, dans toutes les hypotheses sur l'ellipticité de la Terre. L'application de ces formules à plusieurs Villes dont la longitude & la latitude ont été déterminées par d'excellentes observations astronomiques, a fait voir à M. DU SÉJOUR que de tous les rapports admissibles entre les deux axes du Pôle & de l'Equateur, celui de 320 à 321 s'accorde le mieux avec ces Observations. Ce rapport tient

(1) M. DE LA PLACE.

à-peu-près le milieu entre ceux que donnent les degrés terreſtres déja meſurés ; il réſulte encore des longueurs du Pendule qui bat les ſecondes, & M. DU SÉJOUR le regarde, par toutes ces raiſons, comme étant extrêmement vraiſemblable. On ne peut ſe diſſimuler cependant qu'il faut alors ſuppoſer dans quelques unes des meſures de dégrés, des erreurs trop fortes pour pouvoir être admiſes. L'enſemble des meſures déja exécutées paroît donc donner à la Terre, une Figure ſenſiblement différente d'un ellipſoïde. A la vérité les longueurs obſervées du Pendule ſont à très-peu près les mêmes que celles qui réſultent de cette Figure ; mais la théorie de la Peſanteur nous donne de cet accord, une raiſon ſatisfaiſante, en faiſant voir que les mêmes cauſes qui écartent les Méridiens, de la Figure elliptique, influent beaucoup moins ſur les longueurs du Pendule & des rayons terreſtres ; enſorte que l'on peut, ſans craindre aucune erreur ſenſible, employer l'hypotheſe elliptique dans tous les Problêmes où l'on ne conſidere que les rayons terreſtres & leurs premieres différences.

Dans le ſecond Livre, M. DU SÉJOUR préſente une Théorie complette des apparitions & des diſparitions de l'Anneau de Saturne. Cette Théorie a déja paru dans l'Ouvrage que M. DU SÉJOUR publia ſur cette matiere, il y a quelques Années, & dont nous rendîmes alors un compte détaillé à l'Académie. Après en avoir expoſé les différens objets, nous finiſſions en aſſurant que cet Ouvrage ne laiſſoit rien à deſirer ſur la Théorie des phaſes de l'Anneau de Saturne ; que la fineſſe, l'élégance & la ſimplicité des Méthodes dont l'Auteur avoit fait uſage, le rendoient très-intéreſſant pour les Géomètres, en même tems que, par la diſcuſſion des Phénomenes depuis 1600 juſqu'en 1900, il devenoit néceſſaire aux Aſtronomes qui, dans la ſuite, voudroient obſerver ces apparences. Cette concluſion de notre rapport a été confirmée par l'accueil favorable que l'Ouvrage a reçu des Géomètres & des Aſtronomes ; & ſans doute ils le verront avec plaiſir, réuni aux autres recherches de l'Auteur ſur l'Aſtronomie.

Dans le troiſieme Livre, M. DU SÉJOUR a repris tout ce qu'il a publié ſur les Cometes, ſoit dans nos Mémoires, ſoit dans ſon Eſſai ſur les Cometes qui peuvent le plus approcher de l'Orbite terreſtre. L'impreſſion générale de frayeur que répandit en 1773 le danger chimérique d'une Comete qui devoit bouleverſer la Terre, donna lieu à ce dernier Ouvrage dont nous fîmes un rapport étendu, à l'Académie. Les nouvelles recherches que M. DU SÉJOUR y a jointes, ont principalement pour objet la détermination des orbites des Cometes, d'après les Obſervations ; Problême difficile, & qui dans ces derniers tems a exercé la

sagacité des Géometres. La Méthode de l'Auteur consiste à déterminer la position du plan de l'orbite, & à conclure de cette position les autres élémens de la Trajectoire. Il en fait une application intéressante à la Comete singuliere de 1770, la seule qui, de toutes les Cometes observées jusqu'à présent, se refuse à l'hypothese d'une orbite parabolique. M. DU SÉJOUR a voulu s'assurer si véritablement les Observations ne peuvent pas être représentées dans cette hypothese. Il résulte de son travail, qu'en supposant les Observations rigoureusement exactes, cela est impossible; mais que, vu la grande incertitude qui regne encore sur la position des Etoiles auxquelles on a comparé la Comete, cette impossibilité peut paroître problématique.

Tels sont les objets que M. DU SÉJOUR a traités dans ce Volume, qui, joint au premier, présente un ensemble de Théories astronomiques aussi intéressantes pour les Géometres qu'utiles aux Astronomes. Tous les Problêmes importans de l'Astronomie y sont résolus de la maniere la plus générale & la plus simple. Les élémens les plus délicats de cette Science, y sont déterminés avec une précision qui ne laisse rien à desirer, par des Méthodes analytiques qui embrassent toutes les Observations; & ce qui prouve l'avantage de ces Méthodes, c'est que, sur plusieurs points, M. DU SÉJOUR a eu la satisfaction de voir les observations postérieures à ses résultats venir à leur appui, & les Astronomes finir par les adopter. Nous croyons en conséquence, que ce Volume mérite, ainsi que le premier, l'approbation de l'Académie, & d'être imprimé sous son privilége.

Fait à l'Académie le 10 Janvier 1789.

Je soussigné, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences, certifie le présent Extrait conforme à l'original. Au Louvre le 10 Janvier 1789.

Signé, LE MARQUIS DE CONDORCET, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

PREMIERE COMETE DE 1788.

J'ai déja parlé [illegible] cette Comete dans mon Discours Préliminaire; c'est la soixante-sei[illegible] dont on ait déterminé l'orbite. Elle a été observée par M. Messier [illegible]is le 25 Novembre 1788, jusqu'à la fin de Décembre de la m[illegible] Année. Dans cet intervalle elle a parcouru le quarré de la Grande Our[illegible], la queue du Dragon, le genouil & le bras de Céphée, l'espace e[illegible]re Cassiopée & le Lézard, le quarré de Pégase, & a disparu sur l'a[illegible]ustrale de Pégase. M. Méchain a conclu de ses Observations, que la Comete est rétrograde, que l'inclinaison de son orbite est de $12^d\ 28'\frac{1}{2}$, sa distance périhélie de 1,063012, qu'elle a passé par le Périhélie le 10 Novembre 1788, $7^h\ 35'$, que la longitude de son nœud ascendant est de $5^f\ 7^d\ 11'$, & le lieu du Périhélie sur l'orbite, dans $3^f\ 9^d\ 8'$. Le 2 Décembre la Comete s'est trouvée à 2^d du Pole boréal. Au tems de sa plus grande proximité de la Terre, lorsque sa distance à la Terre étoit de 0,2718, on ne l'appercevoit que foiblement, à la vue simple: dans la Lunete, on distinguoit une queue fort sensible & une chevelure très-éparpillée. Le noyau n'a jamais été bien lumineux.

SECONDE COMETE DE 1788.

Depuis l'impression de cet Ouvrage, Miss Herschell a découvert, le 21 Décembre 1788, une nouvelle Comete, près de l'Etoile β de la Lyre; elle étoit extrêmement petite, & se déroboit aux meilleurs instrumens. Elle a été observée en Angleterre, depuis le 21 Décembre 1788, jusqu'au milieu de Janvier 1789. M. Messier, instruit de l'apparition de cette Comete, par une lettre de M. Blagden, l'a apperçue à Paris, le 4 Janvier 1789; elle étoit encore dans la Constellation de la Lyre; il l'a suivie jusqu'au 7 Janvier. Son noyau étoit extrêmement foible; elle n'avoit aucune apparence de queue. Son mouvement, assez lent, paroissoit se diriger de la Lyre vers le Pole de l'Ecliptique en passant par la tête du Dragon. Le 18 Janvier à 8 heures du soir, l'Ascension droite de cette Comete a été observée de $273^d\ 56'$, sa Déclinaison de $52^d\ 56'\ 40''$. Son mouvement a toujours été en s'accélerant depuis le 21 Décembre 1788. A l'instant où cette Notice s'imprime, M. Méchain n'a pas encore pu déterminer ses élémens d'une maniere précise. Il paroît cependant que la Comete est directe, que sa distance périhélie differe peu de 1,00000, & que l'inclinaison de l'orbite est fort grande.

TRAITÉ

TRAITÉ ANALYTIQUE

Des Mouvemens apparens des Corps Céleftes.

SECONDE PARTIE.

DANS la premiere partie de cet Ouvrage, j'ai traité ce qui eft relatif aux Eclipfes de Soleil & de Lune ; aux occultations des Etoiles par la Lune ; à la réduction des lieux apparens de la Lune, aux lieux vus du centre de la Terre ; aux paffages de Vénus & de Mercure fur le difque du Soleil. En un mot, j'ai épuifé toutes les queftions dans lefquelles, étant donnés deux corps qui fe meuvent dans l'efpace, fuivant des loix connues, l'on détermine les apparences qui réfultent des mouvemens relatifs de ces deux corps, par rapport à un Obfervateur qui, mû lui-même dans l'efpace, fuivant une loi donnée, a de plus un mouvement de rotation autour d'un axe donné de pofition. De nouvelles recherches vont faire l'objet de cette feconde partie. Je me propofe de faire voir avec quel avantage on peut appliquer aux problêmes géodéfiques, la théorie des latitudes corrigées, dont j'ai fait ufage dans les Eclipfes. Je m'occuperai enfuite de l'Anneau de Saturne, & des différens phénomenes que préfente cet Anneau. Je confidérerai enfin ce qui eft relatif aux trajectoires des Corps Céleftes. Je donnerai les méthodes pour déterminer ces trajectoires, d'après les obfervations faites fur la Terre; foit que ces projectiles, ainfi que les Planetes, décrivent des ellipfes peu excentriques autour du Soleil; foit que ces orbites foient fort alongées & fe confondent fenfiblement avec des paraboles, ainfi que cela a lieu pour les Cometes. J'y joindrai les différentes recherches que j'ai données relativement aux Cometes, dans mon Traité publié en 1774.

PREMIER LIVRE.

Dans lequel on applique aux principaux Problêmes géodésiques, la théorie des latitudes corrigées.

Je me propose, dans ce premier Livre, d'appliquer la théorie des latitudes corrigées, aux principaux problêmes géodésiques. L'on peut se rappeller ce que j'entends par la latitude corrigée d'un lieu. Cette latitude est une fonction de la latitude vraie, telle que l'on a généralement

$$\text{Tangente de la latitude corrigée} = \frac{\text{Tangente de la latitude vraie}}{\text{demi-grand axe de la Terre}}.$$

Elle fixe la position d'un lieu quelconque, d'une maniere aussi déterminée que la latitude vraie.

Nous avons vu, dans la premiere partie de cet Ouvrage, combien la substitution de la latitude corrigée à la latitude vraie, simplifie les calculs astronomiques dans lesquels on est obligé d'avoir égard à la figure elliptique de la Terre. Cette considération m'a fait penser qu'il pourroit être également utile d'adapter les latitudes corrigées aux principaux problêmes géodésiques. Pour ne point donner trop d'étendue à cette partie de l'Ouvrage, je me contenterai de considérer les questions les plus curieuses. Je me propose donc de m'occuper singuliérement de la théorie des loxodromiques, & des perpendiculaires à la méridienne. Ces questions ont déja fait l'objet des recherches de plusieurs Géometres. M. Clairaut, dans nos Mémoires, s'est occupé des perpendiculaires à la méridienne; Murdock a donné la théorie des loxodromiques, dans l'hypothese de la Terre sphérique. On pourroit donc croire que la matiere est épuisée ; j'ose me flatter cependant que le nouveau point de vue sous lequel les problêmes seront envisagés, pourront mériter l'attention des Astronomes.

Cette théorie m'a conduit naturellement à présenter quelques réflexions sur le rapport des axes de la Terre que l'on conclut, soit des opérations géodésiques faites en France, soit de la comparaison des dégrés mesurés dans les différentes parties de la Terre.

CHAPITRE PREMIER.

Des propriétés générales des perpendiculaires à la méridienne, & des loxodromiques, dans l'hypothese que les méridiens de la Terre sont des Ellipses.

Je me propose, dans ce Chapitre, de développer les propriétés générales des perpendiculaires à la méridienne & des loxodromiques, dans l'hypothese que les méridiens de la Terre sont des Ellipses. Je sais que l'on a révoqué en doute, l'exactitude de cette derniere supposition, & que les différentes mesures prises pour déterminer les axes de la Terre, ne donnent pas toutes les mêmes rapports entre ces axes; mais comme la figure elliptique est celle qui paroît la plus conforme à la théorie, & que d'ailleurs, les Géometres qui ont élevé des doutes sur la figure rigoureuse des méridiens terrestres, n'ont point assigné de figure plus probable, je m'en tiendrai, dans ces recherches, à l'hypothese elliptique.

ARTICLE PREMIER.

De l'équation aux perpendiculaires à la méridienne.

Pour déterminer l'équation aux perpendiculaires à la méridienne, il faut considérer avant tout, la génération de ces courbes sur la surface du sphéroïde terrestre; cette considération nous donnera la propriété caractéristique de ces perpendiculaires, d'où l'on conclura leur équation.

De la génération des perpendiculaires à la méridienne, sur la surface du sphéroïde terrestre.

(1) Soient A & B deux points infiniment proches de la perpendiculaire à la méridienne, en sorte que la petite droite AB qui les joint, soit un de ses côtés; on éleve au-delà du point B & à une distance Fig. 1. infiniment petite BC, une perpendiculaire CD à la surface du sphéroïde, de maniere que les points A, B, C soient en ligne droite; & joignant ensuite le point B & le pied D de la perpendiculaire BC, on a le second côté BD de la courbe. Ce côté se forme conséquemment en pliant le prolongement BC du côté AB, suivant la perpendiculaire CD à la surface du sphéroïde.

Démonstration de la propriété de la perpendiculaire à la méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener sur le sphéroïde, d'un point à un autre.

(2) Il suit de la construction précédente, que la ligne ABD est la plus courte que l'on puisse mener du point A au point D du sphéroïde. Pour s'en convaincre, soit BED*e* le plan tangent au sphéroïde, au point D, & par conséquent perpendiculaire à la ligne CD. Imaginons maintenant que la ligne CD tourne autour de l'axe BC, en faisant constamment l'angle BCD, l'on aura un cône dont l'intersection avec le plan BED*e*, formera la section conique ED*e*; le point D en sera le sommet; les lignes BD, BE, B*e* seront des rayons vecteurs à la section conique ED*e*, & ils représenteront en même tems, les intersections du sphéroïde avec le côté BC, en supposant ce côté successivement plié dans des directions différentes de la direction perpendiculaire au sphéroïde. Mais par la nature des sections coniques, le rayon BD est plus petit que les autres rayons vecteurs BE, B*e*.

Fig. 1.

Considérons maintenant un nouveau côté B′D formé par le prolongement B′C du côté A′B′ que l'on suppose pareillement plié dans la direction de la perpendiculaire DC au sphéroïde. En vertu des constructions précédentes, l'on aura sur le plan tangent au sphéroïde au point D, une nouvelle section conique E′D*e*′ dont le rayon vecteur B′D sera évidemment plus petit que les autres rayons B′E′, B′*e*′; & les rayons BD, B′D pourront, à un infiniment petit près du premier ordre, être considérés comme étant en ligne droite, puisqu'ils seroient rigoureusement en ligne droite dans la sphere, & que le sphéroïde peut se confondre avec la sphere qui auroit pour rayon, le rayon du cercle osculateur au point D. La somme des deux côtés BD, B′D est donc plus petite que la somme de toutes les autres lignes BE + B′E, B*e* + B*e*′, BE′ + B′E′, B*e*′ + B*e*′, qui d'ailleurs, font un angle fini entr'elles aux points E, E′, *e*, *e*′; la perpendiculaire à la méridienne a donc la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre, sur la surface du sphéroïde.

(3) La propriété de la perpendiculaire à la méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre sur la surface du sphéroïde, n'est pas particuliere aux sphéroïdes de révolution; elle a généralement lieu pour un sphéroïde quelconque. En effet, il est évident que la démonstration du paragraphe précédent est indépendante de la génération du sphéroïde.

Détermination de la courbe qui a la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point de la surface d'un sphéroïde, à un autre point de la même surface.

(4) Soit PAGDF un sphéroïde formé par la révolution d'une courbe

quelconque PAG, autour d'un axe PC de révolution. Nommons Fig. 1.

X l'abſciſſe Y l'ordonnée	aux différens points de la courbe dont la révolution engendre le ſphéroïde. Je ſuppoſe que l'origine des coordonnées eſt en C, que les abſciſſes X ſont comptées ſur l'axe de rotation CP, les ordonnées Y ſur la perpendiculaire CG à l'axe CP de rotation ; je ſuppoſe de plus que l'on connoît la relation entre X & Y.

r la diſtance CP du point C au Pôle P ; nous ſuppoſerons d'ailleurs cette diſtance égale au rayon des Tables.

u l'angle des différens méridiens du ſphéroïde, avec un premier méridien donné de poſition.

Il eſt évident que ſi d'un point quelconque du ſphéroïde, l'on mene à un autre point infiniment proche du même ſphéroïde, une ligne ſuivant une loi quelconque, cette ligne ſera telle que ſi l'on nomme

P le périmetre de la ligne tracée ſur le ſphéroïde.

On aura

$$(1)\quad dP = \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}$$

Soit en effet GAP le premier méridien donné de poſition ; DMP un méridien qui fait un angle infiniment petit avec le premier méridien GAP ; AM l'élément de la courbe. Du point A & du rayon AK, menons l'arc AR qui ſe termine au méridien DMP au point R ; du point M abaiſſons ſur l'axe de rotation, la perpendiculaire MH ; & du point R abaiſſons ſur MH, la perpendiculaire Rn ; il eſt évident que $Rn = dX$; $AM = \sqrt{(AR^2 + RM^2)}$; mais $RM^2 = Rn^2 + Mn^2$; de plus l'on aura $Mn = dY$; $AR = Y du$, & $AM = dP$; l'equation (1) eſt donc démontrée.

(5) Quant à l'équation particuliere à cette ligne, elle dépend ; 1°. de la relation entre les coordonnées X & Y de la courbe génératrice, que nous ſuppoſons connue ; 2°. de la loi entre u, X & Y, qui dépend elle-même de la condition particuliere que l'on impoſe à la courbe tracée ſur le ſphéroïde.

Si l'on ſuppoſe maintenant que l'on impoſe à la courbe en queſtion, la condition d'être la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point donné de la ſurface du ſphéroïde, à un autre point de la ſurface du même ſphéroïde, il faut que P ou ſon égal $\int\sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}$ ſoit un *minimum* ; il s'agit donc de déterminer, par les méthodes de M. Euler, la relation entre X, Y & u qui rend la fonction précédente un *minimum*.

(6) Pour y parvenir, je remarque d'abord que, puiſque par la ſuppoſition, on connoît la relation entre X & Y coordonnées de la courbe de révolution, on peut concevoir qu'au moyen de cette relation, on a ſubſtitué à dX ſa valeur en Y & dY ; de ſorte que l'on ait $dX^2 + dY^2 = Y'' dY^2$, Y'' étant une fonction de Y & de connues. La fonction $\int\sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}$ peut donc être miſe ſous la forme ſuivante $\int\sqrt{(Y^2 du^2 + Y'' dY^2)}$; cherchons donc, d'après les méthodes de M. Euler, la condition qui rend cette derniere quantité un *minimum*. Voici à quoi ſe réduit la méthode de M. Euler, dont on peut voir la démonſ-

tration, dans son Traité qui a pour titre : *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes.* Soit

$Z\,dY$ une quantité quelconque dans laquelle Z est une fonction de $Y, u, \frac{du}{dY}, \frac{d^2u}{dY^2}, \frac{d^3u}{dY^3}$ &c. & de constantes.

Si l'on veut déterminer en général la courbe dans laquelle $\int Z\,dY$ est un *minimum* ou un *maximum*, il faut différencier la quantité Z, par rapport à $Y, u, \frac{du}{dy}, \frac{du^2}{dY^2}, \frac{d^3u}{dY^3}$, en regardant toujours dY comme constant.

Soit maintenant

$$(1)\ dZ = M\,dY + N\,du + \pi\frac{d^2u}{dY} + Q\frac{d^3u}{dY^2} + R\frac{d^4u}{dY^3} + \&;$$

On aura pour équation de la courbe,

$$(2)\ N - \frac{d\pi}{dY} + \frac{d^2Q}{dY^2} - \frac{d^3R}{dY^3} + \&c = 0.$$

(7) Appliquons ces principes au cas dont il s'agit. Il est aisé de voir que $\int\sqrt{(Y^2\,du^2 + Y''\,dY^2)}$ peut se mettre sous la forme suivante, $\int dY\sqrt{\left(\frac{Y^2\,du^2}{dY^2} + Y''\right)}$; donc $Z = \sqrt{\left(\frac{Y^2\,du^2}{dY^2} + Y''\right)}$;

$$dZ = \frac{\left(\frac{Y\,du^2}{dY^2} + Y''\right)dY}{\sqrt{\left(\frac{Y^2\,du^2}{dY^2} + Y''\right)}} + \frac{Y^2\,du}{dY\sqrt{\left(\frac{Y^2\,du^2}{dY^2} + Y''\right)}} \times \frac{d^2u}{dY};\ \text{donc,}$$

dans le cas dont il s'agit, $N = 0$; $\pi = \frac{Y^2\,du}{dY\sqrt{\left(\frac{Y^2\,du^2}{dY^2} + Y''\right)}}$; $Q = 0$; $R = 0$ &c ; & l'équation qui satisfait au Problême est (§. 6, éq. (2)) $-\frac{d\pi}{dY} = 0$; ou, en intégrant,

$$(1)\ -\pi + A = 0,$$

A étant une constante ajoutée dans l'intégration.

Détermination de la constante A.

(8) Pour déterminer la constante A, je remarque que dans le triangle
Fig. 2. AMR rectangle en R, on a en général AM : AR :: 1 : sin angle AMR ; mais l'angle AMR est l'angle de la courbe avec les différens méridiens. De plus $AM = \sqrt{(Y^2\,du^2 + dX^2 + dY^2)}$, & $AR = Y\,du$. Donc

$$(1)\ \sqrt{(Y^2\,du^2 + dX^2 + dY^2)} = \frac{Y\,du}{\text{sin angle de la courbe avec les diff. méridiens.}}$$

D'ailleurs nous avons vu (§. 6) que $Y'' = \frac{dX^2 + dY^2}{dY^2}$.

Si dans l'expreſſion de π du §. précédent, l'on élimine Y″ au moyen de cette derniere valeur, l'on aura $\pi = \frac{Y^2\, du}{\sqrt{(Y^2\, du^2 + dX^2 + dY^2)}}$; donc, à cauſe de l'équation (1) du §. précédent,

$$(2)\ A\sqrt{(Y^2\, du^2 + dX^2 + dY^2)} - Y^2\, du = o.$$

Si l'on compare la valeur de $\sqrt{(Y^2\, du^2 + dX^2 + dY^2)}$ que l'on tire de cette derniere équation, avec celle que l'on conclut de l'équation (1), l'on aura

(3) Y ſin angle de la courbe avec les différens méridiens $- A = o$.

On connoîtra donc la valeur de A, lorſque l'on connoîtra l'angle particulier de la courbe, avec le méridien correſpondant à une certaine valeur particuliere de Y.

(9) Dans le cas de la perpendiculaire à la méridienne, l'angle de la courbe avec le méridien $= 90^d$ au point où la courbe coupe cette méridienne ; donc

$$(1)\ A - Y' = o,$$

Y′ étant d'ailleurs l'ordonnée à l'ellipſe, correſpondante au point où la courbe eſt perpendiculaire à la méridienne.

L'équation (2) du §. précédent deviendra par là

$$(2)\ Y^2\, du - Y'\sqrt{(Y^2\, du^2 + dX^2 + dY^2)} = o.$$

Et l'on aura, pour exprimer l'angle de la courbe avec les différens méridiens,

(3) Y ſin angle avec les différens méridiens $- Y' = o$.

(10) Dans le cas où l'on ne ſuppoſeroit pas la courbe perpendiculaire à la méridienne, au point où elle la coupe, l'on auroit par une Analyſe entiérement ſemblable, en nommant

D l'angle de la courbe avec la méridienne à ce point,

$$(1)\ A - Y' \text{ſin}\, D = o\,;$$

L'équation (2) du §. 8, deviendroit

$$(2)\ Y^2\, du - Y'\sqrt{(Y^2\, du^2 + dX^2 + dY^2)}\ \text{ſin}\, D = o.$$

Et l'on auroit pour exprimer l'angle de la courbe avec les différens méridiens,

(3) Y′ ſin D − Y ſin angle de la courbe avec les différens méridiens $= o$.

Détermination de l'équation aux perpendiculaires à la méridienne, en faiſant abſtraction de leur propriété, d'être les lignes les plus courtes que l'on puiſſe mener d'un point de la ſurface d'un ſphéroïde, à un autre point de la même ſurface.

(11) Nous pourrions nous contenter d'avoir déterminé l'équation

aux perpendiculaires à la méridienne, en partant de cette propriété,
Fig 1. d'être les lignes les plus courtes que l'on puisse mener d'un point de la surface d'un sphéroïde, à un autre point de la même surface; je crois cependant que l'on verra avec plaisir, comment on peut déterminer directement cette équation, en faisant abstraction de la propriété dont nous venons de parler.

Pour y parvenir, nommons x, y, z, les trois coordonnées du point A′ de la surface d'un sphéroïde, rapportées à trois axes perpendiculaires & à une origine commune. Les coordonnées du point B′ auront pour expressions $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; & si l'on nomme dP le petit côté A′B′ de la courbe, on aura $dP = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Si l'on prolonge le côté A′ B′ d'une quantité B′ C égale à A′ B′; en pliant ce prolongement suivant la droite CD, perpendiculairement à la surface du sphéroïde, il est visible que son extrémité aboutira un peu au-delà du point D, de sorte que si l'on nomme dP' le côté B′ D, dP' sera moindre que dP; mais il est facile de s'assurer que la différence est un infiniment petit du troisieme ordre; car en faisant $CD = \alpha$, il est clair que α est un infiniment petit du second ordre, puisque B′C est un infiniment petit du premier ordre, ainsi que l'angle CBD. De plus $dP'^2 + \alpha^2 = dP^2$, d'où l'on tire $dP = \sqrt{(dP'^2 + \alpha^2)} = dP' + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{dP'}$; or α étant un infiniment petit du second ordre, & dP' un infiniment petit du premier ordre, $\frac{\alpha^2}{dP'}$ est un infiniment petit du troisieme ordre. On aura donc, en négligeant cet infiniment petit, $dP = dP'$; ce qui montre que dans ces recherches dP doit être supposé constant.

Cela posé, x, y, z étant les cordonnées au point A′, & $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ étant celles du point B′; $x + 2dx$, $y + 2dy$, $z + 2dz$ seront par la nature de la ligne droite, les coordonnées du point C pris sur le prolongement du côté A′B′. D'ailleurs les coordonnées du point D pris sur le sphéroïde, seront $x + 2dx + ddx$, $y + 2dy + ddy$, $z + 2dz + ddz$. Si l'on retranche ces coordonnées, de celles du point C, on aura $-ddx$, $-ddy$, $-ddz$ pour les coordonnées du point C, en fixant leur origine au point D.

(12) L'équation différentielle à la surface d'un sphéroïde, peut en général être représentée par l'équation suivante:

$$(1)\quad dz = r\,dx + s\,dy;$$

r & s étant des fonctions de x, y, z. De plus si l'on nomme x', y', z', les coordonnées à la droite CD perpendiculaire à la surface du sphéroïde, l'origine étant au point D de la surface, & les coordonnées x', y', z' étant respectivement prises sur des paralleles aux coordonnées x, y, z du sphéroïde, on démontre dans la théorie des surfaces courbes, & par des considérations analogues à celles qui servent à calculer les normales

des

des courbes, que pour déterminer les perpendiculaires aux furfaces courbes, l'on a les deux équations fuivantes: Fig. 1.

$(2)\ x' + r z' = 0;\qquad (3)\ y' + s z' = 0.$

Dans ces équations, r & s font les fonctions de x, y, z qui entrent dans l'équation (1) au fphéroïde. Ces quantités font variables en paffant d'une perpendiculaire à l'autre; mais elles doivent être confidérées comme conftantes pour la même perpendiculaire. D'ailleurs, puifque (§. 11) ddx, ddy, ddz font les coordonnées au point C de la ligne CD, l'on a $ddx : ddz :: x' : z'$; $ddy : ddz :: y' : z'$; fubftituant donc ces quantités dans les équations (2) & (3), elles deviendront

$(4)\ ddx + r\,ddz = 0;\qquad (5)\ ddy + s\,ddz = 0;$

x, y & z étant les coordonnées au fphéroïde. L'une quelconque de ces deux dernieres équations, combinée avec la fuppofition que dP ou fon égal $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ doit être fuppofé conftant, donnera l'équation à la perpendiculaire à la méridienne.

(13) Examinons maintenant le cas des fphéroïdes de révolution, & fuppofons que l'axe des x foit l'axe même de révolution. Si l'on nomme

u l'angle que forme le méridien d'un point quelconque, avec un méridien fixe que nous fuppoferons être le plan des x & des y.
X l'abfciffe prife fur l'axe de révolution.
Y l'ordonnée correfpondante prife fur le méridien mobile.

Puifque Y eft l'hypothénufe d'un triangle rectangle, dont y & z font les côtés, le côté z étant d'ailleurs oppofé à l'angle u; on aura

$(1)\ y = Y \cos u;\qquad (2)\ z = Y \sin u;$

$(3)\ dy = \cos u\, dY - Y \sin u\, du;\ (4)\ dz = \sin u\, dY + Y \cos u\, du.$

De plus $x = X$; donc

$(5)\ dP = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + Y^2 du^2)}.$

Reprenons maintenant l'équation (5) du §. 12; puifque $y = Y \cos u$, & que $z = Y \sin u$, cette équation pourra être mife fous la forme fuivante:

$(6)\ d^2(Y \cos u) + s\,d^2(Y \sin u) = 0.$

Mais je remarque que l'on aura s, en regardant dans l'équation à la furface du fphéroïde, x comme conftante. Mais puifque Y eft une fonction de x, Y doit être pareillement confidéré comme une quantité conftante; donc $dy = -Y \sin u\, du$; $dz = \cos u\, du$; de plus, on a dans cette fuppofition (§. 12 eq. (1)) $s = \frac{dz}{dy}$; donc enfin,

$$(7)\ s = -\frac{Y \cos u}{Y \sin u}.$$

Subftituant cette valeur de s dans l'équation (6), elle deviendra

$(8)\ Y \sin u\, d^2(Y \cos u) - Y \cos u\, d^2(Y \sin u) = 0.$

Donc en repaffant de la feconde différentielle à la premiere, & en ajoutant la conftante dP,

$(9)\ Y \sin u\, d(Y \cos u) - Y \cos u\, d(Y \sin u) + A\,dP = 0;$

Ou, ce qui revient au même,

$$(10)\quad A\,dP - Y^2\,du = o;$$

A étant une conftante arbitraire.

Si l'on fubftitue à dP fa valeur $\surd(dX^2 + dY^2 + Y^2\,du^2)$, l'équation (10) deviendra

$$(11)\quad A\surd(dX^2 + dY^2 + Y\,du^2) - Y^2\,du = o.$$

Cette équation eft la même que celle que nous avons trouvée (§. 8).

Article II.

Des principales queftions que l'on a coutume de fe propofer, relativement aux perpendiculaires à la méridienne.

(14) Etant données la diftance M'F d'un lieu quelconque F, à la
Fig. 3. méridienne MM'P d'un lieu M dont la latitude eft connue, prife fur une perpendiculaire M'F à la méridienne MM'P; ainfi que la diftance MM' du point M' où la perpendiculaire M'F coupe la méridienne MM'P, au point M; on peut demander la latitude du lieu F, & fa différence en longitude d'avec le lieu M.

Pareillement, étant données la latitude & la longitude du lieu F, ainfi que la latitude & la longitude du lieu M; on peut demander la diftance du lieu F à la méridienne MM'P du lieu M, prife fur la perpendiculaire M'F à cette méridienne; ainfi que la diftance du lieu M, au point M' où la perpendiculaire M'F rencontre la méridienne MM'P.

Telles font les principales queftions que l'on a coutume de réfoudre.

(15) Pour réfoudre ces queftions dans l'hypothefe que les méridiens terreftres font des ellipfes, je combine l'équation (2) du §. 9.

$$(1)\quad Y^2\,du - Y'\surd(dX^2 + dY^2 + Y^2\,du^2) = o,$$

avec l'équation à l'ellipfe

$$(2)\quad \rho^2 X^2 + Y^2 - \rho^2 = o.$$

Dans ces équations,

1 eft le demi-petit axe de l'ellipfe génératrice,
ρ eft le demi-grand axe;
X eft l'abfciffe comptée du centre de l'ellipfe;
Y eft l'ordonnée correfpondante;
Y' eft l'ordonnée particuliere du point où la perpendiculaire à la méridienne coupe perpendiculairement le méridien du lieu M.
u eft l'angle du méridien du lieu F avec le méridien du lieu M.

Je différencie l'équation (2); je la combine avec l'équation (1), & j'ai les équations fuivantes:

$$(3)\quad du = \frac{Y'\surd(\rho^4 - (\rho^2 - 1)Y^2)}{\rho Y\surd((\rho^2 - Y^2)(Y^2 - Y'^2))}\,dY;$$

$$(4)\ du = \frac{Y' \sqrt{(1+(\rho^2-1)X^2)}}{\rho(1-X^2)\sqrt{(\rho^2(1-X^2)-Y'^2)}}\, dX.$$ Fig. 3.

Je combine ces mêmes équations avec l'équation (1) du §. 4, & j'ai pareillement

$$(5)\ dP = \frac{Y\sqrt{(\rho^4-(\rho^2-1)Y^2)}}{\rho\sqrt{((\rho^2-Y^2)(Y^2-Y'^2))}}\, dY\,;$$

$$(6)\ dP = \frac{\rho\sqrt{(1+(\rho^2-1)X^2)}}{\sqrt{(\rho^2(1-X^2)-Y'^2)}}\, dX.$$

(16) Si l'on intégroit chacune des équations précédentes, on pourroit résoudre les questions proposées. En effet, dans le premier cas les équations (5) & (6) du §. précédent, que je suppose intégrées, feroient connoître les valeurs de X & de Y correspondantes à la valeur P donnée. Mais en vertu d'une propriété de l'ellipse par rapport au centre, l'on a

$$(1)\ \text{Tang latitude vraie} = \frac{\rho X}{Y}$$

On connoîtroit donc la latitude du lieu F; on connoîtroit enfin la différence en longitude des lieux F & M, au moyen de l'une des équations (3) ou (4) du même paragraphe.

Dans le second cas, l'équation (1) du présent paragraphe, combinée avec l'équation (2) du §. 15, feroit connoître la valeur de X & de Y. L'équation (3) ou (4) du §. 15 feroit connoître la valeur de Y′, & par conséquent la position du point M′, ou la perpendiculaire rencontre la méridienne du lieu M; enfin l'équation (5) ou (6) donneroit la valeur de la perpendiculaire FM′; le problême seroit donc encore résolu.

Je ferai voir dans la suite comment on peut avoir ces intégrales, d'une maniere très-simple, en employant les latitudes corrigées.

ARTICLE III.

De l'équation aux loxodromiques sur le sphéroïde terrestre.

(17) On sait que les loxodromiques sont des courbes qui coupent tous les méridiens, sous un même angle donné. Le calcul de ces courbes ne présente aucune difficulté, quand on les suppose tracées sur une sphere; mais il devient plus compliqué lorsque l'on suppose la Terre elliptique. Voici, au surplus, l'équation à ces courbes. Soit

X l'abscisse, Y l'ordonnée } aux différens points de la courbe dont la révolution engendre le sphéroïde; je suppose que l'origine des coordonnées est en C; que les abscisses X sont comptées sur l'axe de rotation CP; & les ordonnées Y sur la perpendiculaire à l'axe de rotation;

u l'angle des différens méridiens du sphéroïde, avec un premier méridien donné de position.

1 le demi-petit axe de l'ellipse génératrice;

ρ le demi-grand axe ;
P le périmetre de la loxodromique tracée ſur le ſphéroïde ;
D l'angle de la loxodromique, avec les différens méridiens qu'elle coupe ſucceſſivement.

Nous avons vu (§. 4) que l'on a généralement, pour une courbe quelconque tracée ſur le ſphéroïde,

$$(1)\ dP = \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}.$$

Il ſuit pareillement de l'équation (1) du §. 8, que l'on a

$$(2)\ \sin D \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)} - Y du = 0.$$

Si donc l'on ſuppoſe l'angle D conſtant, ce qui eſt la propriété caractériſtique des loxodromiques, l'équation (2) ſera l'équation à ces courbes. De cette derniere équation l'on tire

$$(3)\ du = \frac{\tang D \sqrt{(dX^2 + dY^2)}}{Y}$$

Et ſubſtituant cette valeur dans l'équation (1), l'on aura

$$(4)\ dP = \frac{1}{\cos D} \sqrt{(dX^2 + dY^2)}.$$

ARTICLE IV.

Des principales queſtions que l'on a coutume de ſe propoſer, relativement aux loxodromiques.

(18) Les queſtions que l'on a coutume de ſe propoſer relativement aux loxodromiques, ſe réduiſent à l'énoncé ſuivant.

Etant donnés la latitude du point de départ, l'angle ſous lequel la route du vaiſſeau coupe les différens méridiens, & l'arc de la loxodromique parcouru par le vaiſſeau, déterminer la latitude du point d'arrivée, ainſi que la longitude de ce lieu, par rapport au point de départ.

La ſolution de ces queſtions ne préſente aucune difficulté dans la ſphere. En effet, puiſque l'on a pour équation au cercle générateur,

$$(1)\ X^2 + Y^2 - 1 = 0,$$

Et par conſéquent,

$$(2)\ X dX + Y dY = 0.$$

L'équation (3) du §. précédent deviendra

$$(3)\ du = \tang D \frac{dX}{1 - X^2};$$

Donc, en intégrant,

$$(4)\ u + \text{conſtante} = \tang D \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = \tang D \log \sqrt{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)}.$$

Nommons maintenant

X' l'angle dont X eſt le ſinus, c'eſt-à-dire, la latitude du lieu d'arrivée;

Puiſque généralement $\frac{1+X}{1-X} = \text{tang}^2\,(45^d + \frac{1}{2}X')$; l'équation (4) deviendra

(5) $u + \text{conſtante} = \text{tang D log tang } (45^d + \frac{1}{2}$ latitude du lieu d'arrivée).

Mais u doit être égal à zéro, lorſque X' exprime la latitude du point de départ ; donc,

Conſtante $= \text{tang D log tang } (45^d + \frac{1}{2}$ latitude du point du départ);

Donc enfin,

$$(6)\quad u = \text{tang D log} \left(\frac{\text{tang } (45^d + \frac{1}{2} \text{ latitude du lieu d'arrivée})}{\text{tang } (45^d + \frac{1}{2} \text{ latitude du point de départ})} \right).$$

Les logarithmes qu'il faut employer, pour calculer la formule précédente, ſont des logarithmes hyperboliques. Si donc l'on emploie les logarithmes des Tables, il faudra multiplier le réſultat, par le nombre 2,3025851, c'eſt-à-dire, par le nombre qui ramene les logarithmes des Tables, aux logarithmes hyperboliques. Si l'on veut employer les logarithmes des Tables, & que de plus u ſoit exprimée en ſecondes de dégrés, on pourra employer la formule ſuivante dans laquelle toutes les réductions néceſſaires ont été faites.

$$(7)\quad u = \text{tang D log} \left(\frac{\text{tang } (45^d + \frac{1}{2} \text{ latitude du lieu d'arrivée})}{\text{tang } (45^d + \frac{1}{2} \text{ latitude du point de départ})} \right) 474943''$$

(19) La formule précédente ſuppoſe que l'on connoît la latitude du lieu d'arrivée ; mais nous n'avons pas encore appris à connoître cette latitude. Pour y parvenir, je reprends l'équation

$$(1)\quad dP = \frac{1}{\text{cof D}} \sqrt{(dX^2 + dY^2)}.$$

Je remarque que dans cette équation $\sqrt{(dX^2 + dY^2)}$ eſt l'élément du chemin parcouru du Nord au Sud, dans le ſens des méridiens ; on aura donc tout de ſuite

(2) $P + \text{conſtante} = \frac{1}{\text{cof D}}$ arc parcouru du Nord au Sud dans le ſens des méridiens.

Mais lorſque $P = 0$, l'arc eſt égal à la latitude du point de départ ; donc conſtante $= \frac{1}{\text{cof D}}$ latitude du point de départ ; donc enfin

(3) $P = \frac{1}{\text{cof D}}$ (latitude du point d'arrivée — latitude du point de départ.)

Donc

(4) chemin en latitude $= P$ cof D.

On voit par là que, lorſque l'on connoîtra le chemin P du vaiſſeau que l'on réduira en arc de dégré, on connoîtra le chemin en latitude ; & comme l'on connoît la latitude du point du départ, on conclura la latitude du point d'arrivée.

CHAPITRE SECOND.

Recherches préliminaires à l'application des latitudes corrigées, au calcul des perpendiculaires à la méridienne & des loxodromiques; & application de ces latitudes aux courbes en question.

DANS ce Chapitre, je me propose d'appliquer les latitudes corrigées, au calcul des perpendiculaires à la méridienne & des loxodromiques; je vais commencer par l'exposition de la méthode.

ARTICLE PREMIER.

Exposition de la méthode.

Définition de la latitude corrigée d'un point quelconque d'un sphéroïde.

(20) Dans le Volume précédent, on a pu remarquer que les questions Astronomiques ont été singuliérement simplifiées, en représentant chaque lieu de la Terre, non par sa latitude vraie, ainsi qu'on l'avoit toujours pratiqué, mais par sa latitude corrigée. J'emploirai le même artifice, & je continuerai de désigner chaque lieu, par sa latitude corrigée. Au reste, j'entends par la latitude corrigée d'un lieu, ainsi que je l'ai déja dit, une fonction de la latitude vraie, telle que si l'on nomme :

1 le demi-petit axe de la Terre;
ρ le demi-grand axe;

L'on a

(1) tang. latitude vraie — ρ tang latitude corrigée $= 0$.

Définition de la projection d'un point pris sur le sphéroïde.

Fig. 3. (21) Dans la suite de ce travail, je parlerai souvent de la projection des différens points & des différentes courbes tracées sur le sphéroïde; il faut donc avoir une idée nette de ce que j'entends par la projection d'un point & d'une courbe tracée sur le sphéroïde.

Si d'un point M quelconque du sphéroïde l'on abaisse une perpendiculaire MH sur le petit axe CP du sphéroïde, j'appellerai projection du point M du sphéroïde, le point m où la perpendiculaire dont je viens de parler rencontre la sphere inscrite.

Définition de la projection d'une courbe tracée sur le sphéroide.

Par la même raison, j'appellerai projection d'une courbe quelconque tracée sur le sphéroïde, la suite des points déterminés sur la sphere

inscrite, suivant la loi précédente. Ainsi, par exemple, relativement à un lieu M placé sur le sphéroïde, j'appellerai projection du méridien MM'P de ce lieu, le grand cercle *m m'* P de la sphere inscrite, où cette sphere est rencontrée par la suite des perpendiculaires abaissées des différens points du méridien, sur le petit axe du sphéroïde. Fig. 3.

J'appellerai projection du parallele du lieu M, le cercle de la sphere inscrite où cette sphere est rencontrée par la suite des perpendiculaires abaissées sur le petit axe du sphéroïde, des différens points du parallele du lieu M.

Définition de la perpendiculaire corrigée à la méridienne; du complément de la latitude corrigée du sommet de la perpendiculaire à la méridienne; du complément de la latitude corrigée du point F, *ou du lieu d'arrivée; & de la longitude corrigée du même lieu.*

(22) D'après les notions précédentes, il est évident que si sur le sphéroïde l'on considere un lieu M; le méridien MM'P du lieu M; un autre lieu F; la perpendiculaire M'F au méridien du lieu M, qui se termine au point F, & qui coupe le méridien du lieu M, en un point M'; que l'on considere de plus, sur la sphere inscrite, la projection *m* du lieu M; la projection *mm'* P de son méridien; & que par la projection *m'* du point M', l'on suppose mené perpendiculairement à la projection *mm'* P du méridien du lieu M, un grand cercle *m'* F' de la sphere inscrite qui coupe successivement sur cette sphere, la projection des paralleles que rencontre sur le sphéroïde, la véritable perpendiculaire M'F à la méridienne du lieu M passant par le lieu F; on aura sur la sphere inscrite un triangle sphérique rectangle dont les côtés seront:

1°. L'arc *m'* P de la sphere inscrite, compris entre le pole & la projection *m'* du point M', où la perpendiculaire menée par le lieu F, rencontre le méridien du lieu M;

2°. L'arc *m'*F' du grand cercle de la sphere inscrite, & qui se termine au point où ce grand cercle rencontre la projection du parallele du lieu F;

3°. L'arc F'P, compris entre le pole & le point où l'arc *m'*F' rencontre la projection du parallele du lieu F.

J'appellerai désormais

Complément de la latitude corrigée du sommet de la perpendiculaire à la méridienne, ou arc M'P, le premier des arcs dont je viens de parler;

Perpendiculaire corrigée à la méridienne, le second arc que je viens de déterminer;

Complément de la latitude corrigée du point F, *ou du lieu d'arrivée*, le troisieme arc que j'ai considéré;

Longitude corrigée du point F, *ou du lieu d'arrivée*, l'angle au pole *m'*PF' du triangle sphérique dont est question.

Il ne s'agit maintenant que de déterminer la relation entre ces différentes quantités, & les quantités analogues tracées sur le sphéroïde.

ARTICLE II.

De l'équation à la perpendiculaire corrigée à la méridienne.

Fig. 3. (23) Dans la suite je considererai particuliérement la perpendiculaire corrigée à la méridienne; il faut donc avant tout, déterminer l'équation à cette perpendiculaire corrigée, pour en conclure ses rapports avec la véritable perpendiculaire tracée sur le sphéroïde.

Pour y parvenir, soit

1 le rayon de la sphere inscrite;

X les abscisses, } du cercle générateur de la sphere inscrite; je suppose que l'ori-
y les ordonnées, } gine des coordonnées est au centre du cercle.

y' l'ordonnée particuliere du cercle, au point où la perpendiculaire corrigée coupe la méridienne corrigée du lieu M.

v l'angle des différens méridiens de la sphere inscrite correspondans aux différens points de la perpendiculaire corrigée, avec la méridienne corrigée du lieu M.

Il est évident que si l'on suppose la perpendiculaire corrigée tracée sur la sphere inscrite, elle formera avec l'arc m'P, & avec les différens méridiens de la sphere inscrite qu'elle rencontre, un triangle sphérique rectangle, dont un des côtés sera, ainsi que je l'ai déja dit, l'arc m'P compris entre le pole & la projection m' de l'intersection du méridien elliptique du lieu M & de la perpendiculaire à ce méridien; le second côté sera l'arc de la perpendiculaire corrigée dont est question; & le troisieme côté, ou l'hypothenuse F′P du triangle, sera l'arc compris entre le pole & le point F′ de la perpendiculaire corrigée. On aura donc (trig. sphérique) 1 : sin. hypothénuse :: sin. angle de l'hypothénuse avec la perpendiculaire corrigée : sin. m'P. Mais le sinus de l'hypothénuse du triangle sphérique dont il s'agit est évidemment égal à l'ordonnée y du cercle générateur de la sphere inscrite; sin m'P est égal à l'ordonnée particuliere y' du cercle, au point où la perpendiculaire corrigée coupe la méridienne corrigée du lieu M; & l'angle de l'hypothénuse avec la perpendiculaire corrigée est l'angle de la perpendiculaire corrigée avec les méridiens successifs qu'elle rencontre; donc

$$(1)\ \sin\,(\text{angle de la perpendiculaire corrigée avec les méridiens}) = \frac{y'}{y}.$$

Maintenant, si l'on nomme

p la perpendiculaire corrigée,

L'on aura, d'après les constructions du §. 4,

$$(2)\ dp = \sqrt{(y^2\,dv^2 + d\mathrm{X}^2 + dy^2)}.$$

Enfin l'on aura (§. 8 eq. (1)),

$$(3)\ \sin\,(\text{angle de la courbe avec les méridiens}) = \frac{y\,dv}{\sqrt{(y^2\,dv^2 + d\mathrm{X}^2 + dy^2)}}$$

Si donc l'on égale les valeurs de sin (angle de la courbe avec les

méridiens

méridiens) des équations (1) & (3), l'on aura pour équation à la perpendiculaire corrigée à la méridienne,

$$(4)\ y^2 dv - y' \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)} = 0.$$

(24) On réſoudroit la même queſtion, ſi au lieu de conſidérer la perpendiculaire à la méridienne du lieu M, on vouloit calculer une ligne qui feroit un angle quelconque avec cette méridienne, au point de départ. Il faudroit alors conſidérer ſur la ſphere inſcrite, un arc de grand cercle qui feroit avec la méridienne corrigée, un angle égal à celui formé ſur le ſphéroïde, par la droite dont il s'agit & par le méridien du lieu M.

L'équation à ce dernier arc eſt facile à déterminer; en effet les équations (2) & (3) du §. précédent, ont également lieu dans le cas dont il s'agit; mais à la place de l'équation (1), l'on a

$$(1)\ \text{ſin (angle de la courbe avec les méridiens)} = \frac{y' \text{ ſin D}}{y}.$$

Si donc l'on égale cette valeur de ſin (angle de la courbe avec les méridiens) avec celle tirée de l'équation (3) du §. précédent, l'on aura pour équation à la courbe dont il s'agit:

$$(2)\ y^2 dv - y' \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)} \text{ ſin D} = 0.$$

Dans cette équation l'on entend par

D l'angle que fait ſur le ſphéroïde, la ligne dont eſt queſtion, avec le méridien au point de départ.

ARTICLE III.

Des latitudes corrigées.

(25) Je ne m'étendrai pas ſur les latitudes corrigées. J'ai défini ce que j'entends par ces latitudes, & j'ai fait voir que l'on a la relation ſuivante entre la latitude vraie & la latitude corrigée:

(1) Tang. latitude vraie — p tang latitude corrigée = o.

J'aurois pu me contenter de donner cette équation, attendu la ſimplicité des calculs qu'elle exige dans la pratique. J'ai cru cependant, que le Lecteur verroit avec plaiſir, les Tables des différences entre les latitudes vraies & les latitudes corrigées, depuis 40^d juſqu'à 54^d de latitude; dans la triple ſuppoſition que les axes de la Terre ſont dans le rapport de 177 à 178, de 229 à 230, & de 320 à 321. Je n'ai pas cru devoir étendre les calculs, au-delà des paralleles dont je viens de parler, attendu que la méridienne de France que j'ai principalement en vue, ne paſſe pas ces limites. Au moyen de ces Tables, étant donnée la latitude vraie d'un lieu, on conclura aiſément ſa latitude corrigée, & réciproquement. Si l'on veut conclure la latitude

vraie de la latitude corrigée, l'on ajoutera à la latitude corrigée, la différence donnée par les Tables ; il faudra soustraire cette différence, de la latitude vraie, si l'on veut conclure la latitude corrigée de la latitude vraie.

Logarithmes de ρ pour les différens rapports des axes de la Terre.

RAPPORT DES AXES DE LA TERRE.

177 à 178	229 à 230	320 à 321
Log ρ = 0,0024467	Log ρ = 0,0018923	Log ρ = 0,0013550.

TABLE de la différence des latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178.

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.		LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	
D	*M*	*M*	*S*	*D*	*M*	*M*	*S*
40	0	9	32,0	47	0	9	40,0
40	15	9	32,8	47	15	9	39,6
40	30	9	33,6	47	30	9	39,1
40	45	9	34,4	47	45	9	38,6
41	0	9	35,2	48	0	9	38,0
41	15	9	35,9	48	15	9	37,3
41	30	9	36,6	48	30	9	36,6
41	45	9	37,3	48	45	9	35,9
42	0	9	38,0	49	0	9	35,2
42	15	9	38,6	49	15	9	34,4
42	30	9	39,1	49	30	9	33,6
42	45	9	39,6	49	45	9	32,8
43	0	9	40,0	50	0	9	32,0
43	15	9	40,4	50	15	9	31,1
43	30	9	40,7	50	30	9	30,1
43	45	9	40,9	50	45	9	29,1
44	0	9	41,0	51	0	9	28,0
44	15	9	41,0	51	15	9	26,8
44	30	9	41,0	51	30	9	25,6
44	45	9	41,0	51	45	9	24,4
45	0	9	41,0	52	0	9	23,2
45	15	9	41,0	52	15	9	21,9
45	30	9	41,0	52	30	9	20,6
45	45	9	41,0	52	45	9	19,3
46	0	9	41,0	53	0	9	[illegible]8,0
46	15	9	40,9	53	15	9	16,7
46	30	9	40,7	53	30	9	15,4
46	45	9	40,4	53	45	9	14,1
47	0	9	40,0	54	0	9	12,8

TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en ſuppoſant les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.		LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	
D	*M*	*M*	*S*	*D*	*M*	*M*	*S*
40	0	7	21,9	47	0	7	28,4
40	15	7	22,6	47	15	7	28,1
40	30	7	23,3	47	30	7	27,7
40	45	7	24,0	47	45	7	27,3
41	0	7	24,6	48	0	7	26,8
41	15	7	25,2	48	15	7	26,3
41	30	7	25,8	48	30	7	25,8
41	45	7	26,3	48	45	7	25,2
42	0	7	26,8	49	0	7	24,6
42	15	7	27,3	49	15	7	24,0
42	30	7	27,7	49	30	7	23,3
42	45	7	28,1	49	45	7	22,6
43	0	7	28,4	50	0	7	21,9
43	15	7	28,7	50	15	7	21,1
43	30	7	28,9	50	30	7	20,3
43	45	7	29,0	50	45	7	19,5
44	0	7	29,0	51	0	7	18,7
44	15	7	29,0	51	15	7	17,8
44	30	7	29,0	51	30	7	16,9
44	45	7	29,0	51	45	7	16,0
45	0	7	29,0	52	0	7	15,1
45	15	7	29,0	52	15	7	14,1
45	30	7	29,0	52	30	7	13,1
45	45	7	29,0	52	45	7	12,1
46	0	7	29,0	53	0	7	11,1
46	15	7	29,0	53	15	7	10,1
46	30	7	28,9	53	30	7	9,0
46	45	7	28,7	53	45	7	7,9
47	0	7	28,4	54	0	7	6,8

TABLE de la différence des latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 320 à 321.

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.		LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	
D	M	M	S	D.	M.	M	S
40	0	5	17,0	47	0	5	21,2
40	15	5	17,4	47	15	5	20,9
40	30	5	17,8	47	30	5	20,6
40	45	5	18,2	47	45	5	20,3
41	0	5	18,6	48	0	5	20,0
41	15	5	19,0	48	15	5	19,7
41	30	5	19,4	48	30	5	19,4
41	45	5	19,7	48	45	5	19,0
42	0	5	20,0	49	0	5	18,6
42	15	5	20,3	49	15	5	18,2
42	30	5	20,6	49	30	5	17,8
42	45	5	20,9	49	45	5	17,4
43	0	5	21,2	50	0	5	17,0
43	15	5	21,5	50	15	5	16,5
43	30	5	21,7	50	30	5	16,0
43	45	5	21,9	50	45	5	15,4
44	0	5	22,0	51	0	5	14,8
44	15	5	22,0	51	15	5	14,1
44	30	5	22,0	51	30	5	13,4
44	45	5	22,0	51	45	5	12,7
45	0	5	22,0	52	0	5	12,0
45	15	5	22,0	52	15	5	11,3
45	30	5	22,0	52	30	5	10,6
45	45	5	22,0	52	45	5	9,9
46	0	5	22,0	53	0	5	9,2
46	15	5	21,9	53	15	5	8,4
46	30	5	21,7	53	30	5	7,6
46	45	5	21,5	53	45	5	6,[illegible]
47	0	5	21,2	54	0	5	6,0

ARTICLE IV.

Détermination du nombre de toises contenues dans l'arc d'un dégré de la sphere inscrite.

(26) Pour pouvoir faire usage des principes développés dans les Articles précédens, je dois déterminer d'abord, d'après les mesures prises sur le sphéroïde, le nombre de toises contenues dans l'arc d'un dégré de la sphere inscrite. On sait, par exemple, que le dégré du méridien, en remontant de Paris vers le nord, est de 57074 toises; supposons que l'on demande d'après cette mesure, combien de toises contient l'arc d'un dégré de la sphere inscrite; voici comment on peut raisonner. Soit M Paris, M' le lieu plus boréal d'un dégré que Paris; l'arc MM' du méridien elliptique est par conséquent de 57074 toises. Soit λ la latitude vraie de Paris, & par conséquent $\lambda + 1^d$ la latitude vraie du lieu M'; il suit de ce qui a été dit dans les paragraphes précédens, que la tangente de la latitude du point *m* projection de Paris sur la sphere inscrite, a pour expression $\frac{\text{tang}\,\lambda}{p}$; & que la tangente de la latitude du point *m'*, a pour expression $\frac{\text{tang}\,(\lambda + 1^d)}{p}$; on aura donc facilement la valeur de l'arc *mm'* de la sphere inscrite, arc différence des deux latitudes corrigées. Par exemple, si l'on suppose que Paris soit situé sous le parallele de $48^d\ 50'.14''$, que par conséquent la latitude vraie du lieu plus boréal d'un dégré que Paris, soit de $49^d\ 50'\ 14''$, & que l'on suppose que les axes de la Terre sont dans le rapport de 177 à 178; on aura pour latitudes corrigées correspondantes aux latitudes vraies, $48^d\ 40'\ 38''$ & $49^d\ 40'\ 41'',1$. L'arc *mm'* de la sphere inscrite correspondant à l'arc MM' du sphéroïde, sera donc de $1^d\ 0'\ 3'',1$. Cet arc sera de $1^d\ 0'\ 2'',6$, dans l'hypothese de 229 à 230; & de $1^d\ 0'\ 1'',6$ dans l'hypothese de 320 à 321. Fig. 3.

Pour trouver maintenant le nombre de toises que contient l'arc *mm'* de la sphere inscrite, il faut déterminer généralement le rapport entre un arc MM' quelconque d'un méridien elliptique, & la projection *mm'* de cet arc sur la sphere. Nous allons nous occuper de cette recherche.

Détermination du rapport entre un arc MM' quelconque d'un méridien elliptique, & la projection mm' de cet arc sur la sphere.

(27) Pour déterminer le rapport entre un arc MM' quelconque d'un méridien elliptique, & la projection *mm'* de cet arc sur la sphere inscrite, je remarque que le méridien elliptique PM'MG & le cercle inscrit P*m'm*G' ont des abscisses communes CH, C*h*, & des ordonnées

Fig. 3. correspondantes HM, H*m*, *h*M′, *hm*′ qui sont entre elles dans le rapport des demi-axes de l'ellipse génératrice. Soit

X les abscisses communes à l'Ellipse & au cercle;
Y l'ordonnée à l'ellipse;
y l'ordonnée au cercle;
1 le demi-petit axe de la Terre.
ρ le demi-grand axe;
K l'arc MM′ de l'ellipse;
k l'arc mm' correspondant du cercle inscrit;

On aura d'abord

(1) $dK = \sqrt{(dX^2 + dY^2)}$; (2) $dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)}$

(3) $\rho y = Y$ (4) $X^2 + y^2 - 1 = 0$

(5) $\rho dy - dY = 0$; (6) $XdX + ydy = 0$.

Si dans l'équation (1) l'on substitue à dY sa valeur tirée de l'équation (5), elle deviendra

(7) $dK = \sqrt{(dX^2 + \rho^2 dy^2)}$.

Donc en supposant,

(8) $\Delta^2 + 1 - \rho^2 = 0$;

l'on conclura

(9) $dK = \sqrt{(dX^2 + dy^2 + \Delta^2 dy^2)}$.

Dans cette derniere équation, à $dX^2 + dy^2$ je substitue sa valeur dk^2; & j'ai

(10) $K + \text{constante} = \int \sqrt{(dk^2 + \Delta^2 dy^2)}$.

Je réduis cette expression en série, & j'ai

(11) $K + \text{constante} = k + \frac{1}{2}\Delta^2 \int \frac{dy^2}{dk} - \frac{1}{8}\Delta^4 \int \frac{dy^4}{dk^3} + \&c.$

Mais $dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)} = -\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$; donc $\frac{dy}{dk} = -\sqrt{(1-y^2)}$ $= -X$. De plus $dy = -\frac{XdX}{\sqrt{(1-X^2)}}$; donc $\frac{dy^2}{dk} = \frac{X^2 dX}{\sqrt{(1-X^2)}}$; $\frac{dy^4}{dk^3}$ $= \frac{X^4 dX}{\sqrt{(1-X^2)}}$ &c.; donc

(12) $K + \text{constante} = k + \frac{1}{2}\Delta^2 \int \frac{X^2 dX}{\sqrt{(1-X^2)}} - \frac{1}{8}\Delta^4 \int \frac{X^4 dX}{\sqrt{(1-X^2)}} + \&c.$

Donc si l'on néglige les termes multipliés par les valeurs de Δ élevées à une puissance supérieure à la seconde, & que l'on nomme

X′ l'arc dont X est le sinus,

L'on aura, attendu que $\int \frac{X^2 dX}{\sqrt{(1-X^2)}} = \frac{1}{2}X' - \frac{1}{2}X\sqrt{(1-X^2)}$

(13) $K + \text{constante} = k + \frac{1}{4}\Delta^2 (X' - X\sqrt{(1-X^2)})$.

(28) Pour déterminer la constante, je remarque que K & k doivent être nuls à la fois. On a donc constante $= \frac{1}{4}\Delta^2 (X' - X\sqrt{(1-X^2)})$;

X' étant alors la latitude corrigée du point M ; X le sinus, & $\sqrt{(1 - X^2)}$ le cosinus de cette même latitude. Soit donc Fig. 3.

l la latitude corrigée du point M ;

l' la latitude corrigée du point M' ;

L'on aura constante $= \frac{1}{4} \Delta^2 (l - \sin l \cos l)$; & l'équation (13) du § précédent deviendra

(1) $K = k + \frac{1}{4} \Delta^2 (l' - l - \sin l' \cos l' + \sin l \cos l)$.

Mais $\sin l' \cos l' = \frac{1}{2} \sin 2l'$; $\sin l \cos l = \frac{1}{2} \sin 2l$; donc $\sin l' \cos l' - \sin l \cos l = \frac{1}{2} (\sin 2l' - \sin 2l)$; d'ailleurs $\sin 2l' - \sin 2l = 2 \times \cos(l' + l) \times \sin(l' - l)$; donc $\frac{1}{2} (\sin 2l' - \sin 2l) = \cos(l' + l) \times \sin(l' - l)$; de plus $l' = l + k$; donc enfin

(2) $k - K + \frac{1}{4} \Delta^2 (k - \cos(2l + k) \sin k) = 0$.

Dans la formule précédente k & K sont exprimés en valeur du rayon. Si l'on vouloit que k & K fussent exprimés en secondes de dégré, l'on auroit

(3) $k - K + \frac{1}{4} \Delta^2 (k - 206265'' \cos(2l + k) \sin k) = 0$.

Comme dans les recherches que nous nous proposons de faire, nous ne considérons que des points situés dans l'hémisphere boréal, nous remarquerons que les quantités K & k ont respectivement leur origine aux points M, m ; quelles sont positives en remontant vers le nord, & négatives dans le cas opposé. Quant aux signes de $\cos(2l + k)$ & de $\sin k$, ils dépendent des valeurs de ces arcs.

(29) Au moyen de l'équation (3) du §. précédent, nous pouvons déterminer combien de dégrés de la sphere inscrite, contient l'arc du sphéroïde compris entre le parallele de $48^d\, 50'\, 14''$ & le parallele de $49^d\, 50'\, 14''$. Si l'on suppose, par exemple, le rapport des axes comme 320 à 321, nous avons vu (§. 26) que dans cette hypothese $k = 1^d\, 0'\, 1'',6$; d'ailleurs, (§. 27 equat. (8)) $\Delta^2 = (\rho + 1)(\rho - 1)$, $\rho = 1,00313$; $\frac{1}{4} \Delta^2 = 0,001576$; $\log \frac{1}{4} \Delta^2 = 7{\cdot}1975562$; de plus $2l = 97^d\, 21'\, 16''$, $k = 1^d\, 0'\, 1'',6$; $2l + k = 98^d\, 21'\, 17'',6$; donc $-206265'' \cos(2l + k) \sin k = 524''$; donc $\frac{1}{4} \Delta^2 (k - 206265'' \cos(2l + k) \sin k) = \frac{1}{4} \Delta^2 (3601'',6 + 524'') = 6'',5$; donc $K = 1^d\, 0'\, 1'',6 + 6'',5 = 1^d\, 0'\, 8'',1$.

Du nombre de toises que contient un arc d'un dégré de la sphere inscrite, suivant les différens rapports des axes de la Terre.

(30) Nous avons vu précédemment que K = 57074 toises ; de plus K égale un arc de $1^d\, 0'\, 8'',1$ de la sphere inscrite ; donc un arc de $1^d\, 0'\, 8'',1$ de la sphere inscrite contient 57074 toises, donc un arc d'un dégré de cette même sphere contient 56947 toises.

Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes, en supposant le dégré entre Paris & Amiens, de 57074 toises.

Rapport des axes de la Terre comme 177 à 178.

$\rho = 1,00565$; $\frac{1}{4} \Delta^2 = 0,002833$; $\log \frac{1}{4} \Delta^2 = 7{\cdot}4522435$.

Un dégré de la sphere inscrite contient 56837 toises.

Fig. 3. *Rapport des axes de la Terre comme 229 à 230.*

$\rho = 1{,}004{,}38$; $\frac{1}{4}\,\Delta^2 = 0{,}002197$; $\log \frac{1}{4}\,\Delta^2 = 7.3419289$.

Un dégré de la ſphere inſcrite contient 56884 toiſes.

Rapport des axes de la Terre comme 320 à 321.

$\rho = 1{,}00313$; $\frac{1}{4}\,\Delta^2 = 0{,}001576$; $\log \frac{1}{4}\,\Delta^2 = 7.1975562$.

Un dégré de la ſphere inſcrite contient 56947 toiſes.

Rapport des axes de la Terre comme 1 à 1.

$\rho = 1{,}00000$; $\Delta = 0$;

Un dégré de la ſphere inſcrite contient 57074 toiſes.

ARTICLE V.

De la relation entre un arc MM′ *quelconque d'un Méridien, dont l'origine* M *eſt donnée, & l'arc m′ P correſpondant de la ſphere inſcrite compris entre le pole & la projection m′ du point* M′.

(31) Je dois déterminer maintenant la relation entre un arc MM′ quelconque d'un méridien elliptique dont l'origine M eſt donnée, & l'arc m'P correſpondant de la ſphere inſcrite, compris entre le pole & la projection m' du point M′. Pour y parvenir, nous remarquerons que l'arc $m'P = mP - mm'$; l'arc mP eſt le complément de la latitude corrigée du lieu M ; & l'arc mm' eſt l'arc que nous avons nommé k ; donc d'abord,

(1) m'P = complément (latitude corrigée du lieu M) — k.

Nous pouvons maintenant réſoudre la queſtion propoſée. Cette queſtion ſe ſubdiviſe en deux autres ; en effet, étant donné l'arc m'P de la ſphere inſcrite, on peut demander l'arc correſpondant MM′ du ſphéroïde ; on peut, au contraire, étant donné l'arc MM′ du ſphéroïde, demander l'arc m'P correſpondant de la ſphere inſcrite ; nous allons réſoudre ces deux queſtions.

Nous remarquerons ſeulement que comme l'équation (1) ſuppoſe que l'on connoît la latitude corrigée du lieu M origine de l'arc MM′ ſur le ſphéroïde, cette latitude dépend du rapport des axes de la Terre. Si l'on ſuppoſe que le lieu M eſt l'Obſervatoire royal de Paris, l'on aura les réſultats ſuivans.

Rapport des axes de la Terre comme 177 à 178.

Complément (latitude corrigée du lieu M) = $41^d\ 19'\ 22''$.

Rapport des axes de la Terre comme 229 à 230.

Complément (latitude corrigée du lieu M) = $41^d\ 17'\ 11''$.

Rapport des axes de la Terre comme 320 à 321.

Complément (latitude corrigée du lieu M) = $41^d\ 15'\ 5''$.

PREMIERE

PREMIERE QUESTION.

Etant donné en dégrés l'arc m′P de la ſphere inſcrite, déterminer l'arc MM′ du ſphéroïde.

(32) Cette premiere queſtion ne préſente aucune difficulté. En effet, puiſque l'on connoît la valeur de l'arc $m'P$ en dégrés, & la latitude du lieu M ainſi que ſa latitude corrigée, l'équation (1) du §. précédent donnera tout de ſuite la valeur de k. On conclura enſuite, au moyen de l'équation (3) du §. 28, la valeur de K qui ſera exprimée en dégrés de la ſphere inſcrite.

Si l'on vouloit avoir la valeur de K en toiſes; ſoit

ϕ le nombre de toiſes que contient un dégré de la ſphere inſcrite; cette quantité eſt connue par le §. 30;
K l'arc MM′ évalué en ſecondes de dégrés de la ſphere inſcrite;
T le nombre de toiſes que contient l'arc K.

On aura

$$(1)\quad T = \frac{\phi K}{3600}.$$

(33) Comme l'uſage de nos formules exige que l'on réduiſe des arcs, en ſecondes de dégré, pour faciliter cet uſage, voici une Table où cette réduction eſt faite d'avance pour les 13 premiers dégrés.

TABLE du nombre de ſecondes corréſpondantes aux différens dégrés, depuis 0^d juſqu'à $13^d\ 40'$.

D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
0	1	60	0	30	1800	3	50	13800	7	10	25800	10	30	37800
0	2	120	0	40	2400	4	0	14400	7	20	26400	10	40	38400
0	3	180	0	50	3000	4	10	15000	7	30	27000	10	50	39000
0	4	240	1	0	3600	4	20	15600	7	40	27600	11	0	39600
0	5	300	1	10	4200	4	30	16200	7	50	28200	11	10	40200
0	6	360	1	20	4800	4	40	16800	8	0	28800	11	20	40800
0	7	420	1	30	5400	4	50	17400	8	10	29400	11	30	41400
0	8	480	1	40	6000	5	0	18000	8	20	30000	11	40	42000
0	9	540	1	50	6600	5	10	18600	8	30	30600	11	50	42600
0	10	600	2	0	7200	5	20	19200	8	40	31200	12	0	43200
0	11	660	2	10	7800	5	30	19800	8	50	31800	12	10	43800
0	12	720	2	20	8400	5	40	20400	9	0	32400	12	20	44400
0	13	780	2	30	9000	5	50	21000	9	10	33000	12	30	45000
0	14	840	2	40	9600	6	0	21600	9	20	33600	12	40	45600
0	15	900	2	50	10200	6	10	22200	9	30	34200	12	50	46200
0	16	960	3	0	10800	6	20	22800	9	40	34800	13	0	46800
0	17	1020	3	10	11400	6	30	23400	9	50	35400	13	10	47400
0	18	1080	3	20	12000	6	40	24000	10	0	36000	13	20	48000
0	19	1140	3	30	12600	6	50	24600	10	10	36600	13	30	48800
0	20	1200	3	40	13200	7	0	25200	10	20	37200	13	40	49200

SECONDE QUESTION.

Etant donné le nombre de toises que contient l'arc MM', *déterminer l'arc* m'P *correspondant de la sphere inscrite.*

(34) Cette seconde question, qui est celle dont on a le plus généralement besoin, présente plus de difficulté. En effet, lorsque l'on connoît le nombre T de toises qui contient l'arc MM', il est facile, au moyen de l'équation (1) du §. 32, de réduire ce nombre de toises, en dégrés de la sphere inscrite; on aura donc la valeur de K en dégrés de la sphere inscrite. Mais il n'est pas aussi facile de déduire la valeur de k, au moyen de l'équation (3) du §. 28; car dans cette équation les sinus & cosinus de l'arc inconnu k, sont mêlés avec l'arc, d'une maniere qu'il ne paroît pas d'abord aisé de démêler. Heureusement les circonstances du Problême permettent d'employer une méthode simple & aussi exacte dans la pratique, que la solution rigoureuse; voici en quoi consiste cette méthode.

De l'équation (3) du §. 28, on conclut

$$(1)\quad k = K - \tfrac{1}{4}\Delta^2 (k - 206265'' \cos(2l + k)\sin k).$$

Si dans le terme $\frac{1}{4}\Delta^2 (k - 206265'' \cos(2l+k)\sin k)$, l'on substitue à k, sa valeur tirée de l'équation (1), en négligeant les termes de l'ordre Δ^4, l'équation (1) deviendra

$$(2)\quad k = K - \tfrac{1}{4}\Delta^2 (K - 206265'' \cos(2l+K)\sin K),$$

& cette équation sera exacte aux quantités près de l'ordre Δ^4.

Nous connoissons donc maintenant la valeur de k & nous pouvons conclure l'arc m'P, puisque (§. 31 eq. (1)),

$$(3)\quad m'P = \text{complément (latitude corrigée du lieu M)} - k.$$

Nous remarquerons que l'arc m'P est le complément de la latitude corrigée du point M' du méridien elliptique, où ce méridien est coupé par la perpendiculaire à la méridienne. Si donc on vouloit conclure la latitude vraie de cette intersection, d'après la connoissance de l'arc MM' en toises; on déterminera d'abord l'arc m'P comme il a été dit ci-dessus; on connoîtra alors la latitude corrigée du point m', d'où l'on conclura la latitude vraie du point M'.

(35) Quelque facile qu'il soit d'exécuter dans tous les cas, les calculs prescrits, il est cependant possible d'éviter cette premiere opération, au moyen de la Table suivante. Cette Table contiendra pour chacune des hypotheses d'excentricité de la Terre, les valeurs de l'arc m'P correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris, jusqu'au pied de la perpendiculaire à la méridienne sur le sphéroïde.

TABLE des valeurs de m′ P corrrespondantes au nombre de toises comprises depuis le pied des differentes perpendiculaires, jusqu'à la perpendiculaire passant par Paris.

DISTANCES Sur la Méridienne.		Valeurs de m′ P correspondantes.											
		177 à 178.			229 à 230.			320 à 321.			1 à 1		
TOISES.		D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
140000	Du côté du Nord.	38	52	4	38	49	54	38	47	50	38	42	35
130000		39	2	35	39	0	25	38	58	21	38	53	6
120000		39	13	6	39	10	56	39	8	52	39	3	36
110000		39	23	38	39	21	27	39	19	23	39	14	7
100000		39	34	9	39	31	58	39	29	54	39	24	38
90000		39	44	40	39	42	30	39	40	25	39	35	9
80000		39	55	11	39	53	1	39	50	56	39	45	39
70000		40	5	42	40	3	32	40	1	27	39	56	10
60000		40	16	13	40	14	3	40	11	58	40	6	41
50000		40	26	45	40	24	34	40	22	29	40	17	11
40000		40	37	16	40	35	5	40	33	1	40	27	42
30000		40	47	47	40	45	37	40	43	32	40	38	13
20000		40	58	18	40	56	8	40	54	3	40	48	44
10000		41	8	50	41	6	39	41	4	34	40	59	15
00000		41	19	22	41	17	11	41	15	5	41	9	46
10000	Du côté du Midi.	41	29	54	41	27	42	41	25	37	41	20	17
20000		41	40	25	41	38	14	41	36	8	41	30	48
30000		41	50	56	41	48	45	41	46	39	41	41	18
40000		42	1	28	41	59	16	41	57	10	41	51	49
50000		42	12	0	42	9	48	42	7	41	42	2	19
60000		42	22	31	42	20	19	42	18	12	42	12	50
70000		42	33	3	42	30	50	42	28	43	42	23	21
80000		42	43	34	42	41	22	42	39	14	42	33	52
90000		42	54	5	42	51	53	42	49	45	42	44	23
100000		43	4	36	43	2	24	43	0	16	42	54	52
110000		43	15	7	43	12	56	43	10	47	43	5	24
120000		43	25	39	43	23	27	43	21	18	43	15	55
130000		43	36	10	43	33	58	43	31	49	43	26	26
140000		43	46	42	43	44	29	43	42	20	43	36	56
150000		43	57	13	43	55	0	43	52	51	43	47	27
160000		44	7	45	44	5	32	44	3	22	43	57	58
170000		44	18	17	44	16	3	44	13	53	44	8	28
180000		44	28	48	44	26	35	44	24	24	44	18	59
190000		44	39	20	44	37	6	44	34	56	44	29	30
200000		44	49	52	44	47	38	44	45	27	44	40	1
210000		45	0	23	44	58	9	44	55	58	44	50	31
220000		45	10	55	45	8	40	45	6	29	45	1	2
230000		45	21	27	45	19	12	45	17	0	45	11	33
240000		45	31	58	45	29	43	45	27	31	45	22	4
250000		45	42	30	45	40	14	45	38	2	45	32	34
260000		45	53	2	45	50	45	45	48	33	45	43	5
270000		46	3	33	46	1	17	45	59	5	45	53	36
280000		46	14	5	46	11	49	46	9	36	46	4	6
290000		46	24	37	46	22	21	46	20	7	46	14	37
300000		46	35	9	46	32	52	46	30	38	46	25	8
310000		46	45	40	46	43	24	46	41	9	46	35	38
320000		46	58	12	46	53	55	46	51	40	46	46	9
330000		47	6	44	47	4	27	47	2	11	46	56	40
340000		47	17	15	47	14	58	47	12	43	47	7	11
350000		47	27	47	47	25	29	47	23	14	47	17	42
360000		47	38	18	47	36	1	47	33	46	47	28	13
370000		47	48	50	47	46	33	47	44	17	47	38	44
380000		47	59	21	47	57	4	47	54	48	47	49	15

Usage de la Table précédente.

(36) Au moyen de la Table précédente, il est aisé de trouver les valeurs de m'P pour tous les espaces intermédiaires. En effet, si l'on jette les yeux sur cette Table, il sera facile de se convaincre que, relativement aux dégrés de France, quel que soit le rapport des axes de la Terre, l'on a, à très-peu près, une variation de 10'·31,"2 dans les valeurs de m' P, pour dix mille toises de variation dans les distances des perpendiculaires sur la méridienne ; de sorte que si l'on veut trouver une valeur intermédiaire quelconque de m'P, on peut se servir sans erreur sensible de l'équation suivante :

$$(1)\ dK = \frac{dT}{10000}\, 631'',2.$$

Dans l'usage de l'équation (1), l'on doit entendre par

dT le nombre de toises dont la distance intermédiaire pour laquelle on calcule, differe de la distance la plus voisine comprise dans la Table ; cette quantité est positive, si la distance intermédiaire est plus boréale que la distance comprise dans la Table ; elle est négative si la distance intermédiaire est plus australe.

dK le nombre de secondes qu'il faut soustraire de la valeur de m'P la plus voisine comprise dans la Table, pour avoir la valeur de m' P cherchée.

(37) Cherchons par la méthode précédente la valeur de m'P correspondante à une distance de 14823 toises du côté du midi, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178. Dans la Table du §. 35, je vois qu'à la distance de 10000 toises du côté du midi, l'on a pour valeur de m'P correspondante, $41^d\ 29'\ 54''$. Conformément à ce qui a été prescrit dans le §. 36, dans l'équation (1) du paragraphe précédent, je fais $dT = -14823$ toises, attendu que la distance intermédiaire pour laquelle je calcule, est plus méridionale que la distance m' P la plus voisine comprise dans la Table. J'ai en conséquence $dK = -5'\ 4''$, d'où je conclus $m'P = 41^d\ 29'\ 54'' + 5'\ 4'' = 41^d\ 34'\ 58''$.

(38) On trouveroit le même résultat, par le moyen des équations du §. 34. En effet, puisque le point M' est plus méridional que le point M, K est négatif; d'ailleurs dans l'équation (1) du §. 32, $T = -14823$ toises, & $\theta = 56837$ toises, donc $K = -15'\ 39''$; de plus l étant par la supposition, la latitude corrigée de Paris, l'on a $l = 48^d\ 40'\ 38''$; donc $2l + K = 97^d\ 5'\ 37$; $-\frac{1}{4}\Delta^2\,(K - 206265''\cos(2l+K)\sin K) = 3''$; donc $k = -15'\ 39'' + 3'' = -15'\ 36''$; donc $m'P = 41^d\ 19'\ 22'' + 15'\ 36'' = 41^d\ 34'\ 58''$, comme ci-dessus.

Relation entre la variation de l'arc m'P, & la variation correspondante du nombre de toises dans les distances des perpendiculaires sur la méridienne.

(39) Nous avons conclu de l'inspection seule de la Table du §. 35,

que l'on avoit généralement

$$(1)\ dK = \frac{dT}{10000} 631'',2.$$

Si l'on vouloit avoir la relation générale entre la variation de l'arc $m'P$ & la variation correspondante du nombre de toises dans les distances des perpendiculaires sur la méridienne, rien ne seroit plus simple que cette analyse. En effet, si l'on différencie les équations (2) & (3) du §. 34, l'on aura

$$(2)\ dm'P = -dk,$$

$$(3)\ dk = dK - \tfrac{1}{4}\Delta^2\, dK\,(1 - \cos(2l + 2K)).$$

Mais dans l'équation (3), attendu que K est toujours très-petit, on peut traiter cette équation, comme si l'on avoit

$$(4)\ dk = dK - \tfrac{1}{4}\Delta^2\, dK\,(1 - \cos 2l).$$

Et comme sans erreur sensible, attendu que K est très-petit, $90^d - l = m'P$, l'équation (4) deviendra

$$(5)\ dk = dK - \tfrac{1}{4}\Delta^2\, dK\,(1 - \cos(180^d - 2m'P)).$$

Mais (§. 32 eq. (1)) $T = \frac{\theta}{3600}K$; donc $dK = \frac{3600}{\theta}dT$; donc enfin

$$(6)\ dk = \frac{3600}{\theta}\, dT\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\,(1 - \cos(180^d - 2m'P))\right)$$

$$(7)\ dm'P = -\frac{3600}{\theta}\, dT\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\,(1 - \cos(180^d - 2m'P))\right).$$

Telle est la relation générale entre la variation de l'arc $m'P$, & la variation correspondante du nombre de toises dans les distances des perpendiculaires sur la méridienne, du moins pour tous les points de la Carte de France que j'ai principalement en vue dans ces recherches.

Remarque sur l'équation (1) du §. 36.

(40) Le Lecteur verra sans doute avec plaisir, comment l'équation (1) du §. 36 se déduit de l'équation (7) du §. 39; en voici la démonstration. D'après la construction de la Table du §. 35, pour remplir les espaces intermédiaires, nous n'avons jamais à calculer des quantités dT plus grandes que 5000 toises; l'on a donc tout au plus $\frac{dT}{\theta} = \frac{5}{56,8}$, & par conséquent $\frac{3600\ dT}{\theta} = 316''$. Dans l'équation (7) du §. précédent supposons $m'P = 39^d$; c'est relativement aux perpendiculaires à la méridienne de France, le cas le plus défavorable à la formule; l'on aura $\cos(180^d - 2m'P) = \cos 102^d$; $1 - \cos(180^d - 2m'P) = 1,20791$. Calculons maintenant la plus grande valeur de $dm'P$ dans la double hypothese du rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178, & dans celui de 320 à 321; l'on aura dans le premier cas, $dm'P = 316'',510$;

& dans le second, $dm' P = 316'',89$; d'où l'on voit que si l'on prend le rapport intermédiaire, ainsi que je l'ai prescrit, la même équation peut servir pour tous les dégrés de la France, & pour tous les rapports des axes de la Terre.

ARTICLE VI.

Détermination du rapport entre la perpendiculaire à la méridienne sur le sphéroïde, & la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite.

(41) Je dois maintenant déterminer la valeur de la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite. On peut voir (§. 22) la définition de cette perpendiculaire. Comme ce n'est point cette quantité qui est donnée immédiatement par les mesures géodésiques, mais la perpendiculaire sur le sphéroïde, il s'agit de déterminer le rapport entre ces deux perpendiculaires.

Pour y parvenir, soit

X les abscisses communes à l'Ellipse génératrice du sphéroïde & au cercle générateur de la sphere inscrite;
Y l'ordonnée à l'ellipse;
y l'ordonnée correspondante au cercle inscrit;
1 le demi-petit axe de la Terre;
ρ le demi-grand axe;
u l'angle des différens méridiens du sphéroïde, avec le méridien du lieu M;
v l'angle des différens méridiens de la sphere inscrite, avec la méridienne corrigée du lieu M;
Y' l'ordonnée particuliere à l'ellipse, au point où la perpendiculaire à la méridienne tracée sur le sphéroïde, rencontre le méridien du lieu M;
y' l'ordonnée particuliere du cercle inscrit, au point où la perpendiculaire corrigée rencontre le méridien corrigé du lieu M;
X' l'abscisse particuliere du cercle inscrit, correspondante au même point;
P le périmetre de la perpendiculaire à la méridienne sur le sphéroïde;
p le périmetre de la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite;
$\Delta^2 = \rho^2 - 1$.

Nous avons vu précédemment (§. 9 eq. (2)) que l'on a pour équation à la perpendiculaire à la méridienne sur le sphéroïde,

$$(1)\ Y^2 du - Y' \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)} = 0;$$

Pour équation à la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite (§. 23 équation (4))

$$(2)\ y^2 dv - y' \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)} = 0;$$

Pour équation à l'ellipse génératrice du sphéroïde,

$$(3)\ \rho^2 X^2 + Y^2 - \rho^2 = 0;$$

Pour équation au cercle générateur de la sphere inscrite,

$$(4)\ X^2 + y^2 - 1 = 0;$$

Pour expression du périmetre de la perpendiculaire à la méridienne sur

le sphéroïde (§. 4 eq. (1))

(5) $dP = \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}$;

Pour expression du périmetre de la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite (§. 23 équation (2)).

(6) $dp = \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)}$.

De plus, à cause des propriétés de l'ellipse & du cercle

(7) $\rho y - Y = 0$; (8) $\rho y' - Y' = 0$;

(9) $\rho dy - dY = 0$; (10) $XdX + ydy = 0$.

Si dans les équations (5) & (6) l'on substitue à $Y^2 du^2$, & à $y^2 dv^2$, leurs valeurs tirées des équations (1) & (2) l'on aura

(11) $dP = -\frac{Y\sqrt{(dX^2 + dY^2)}}{\sqrt{(Y^2 - Y'^2)}}$,

(12) $dp = -\frac{y\sqrt{(dX^2 + dy^2)}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}$,

Et cette derniere équation devient

(13) $dp = -\frac{ydk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}$,

En supposant d'ailleurs

(14) $dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)}$.

Dans les équations (11) & (12), nous avons donné à dp & à dP le signe *moins*, parce que par la nature de la question, les périmetres des perpendiculaires à la méridienne, soit sur le sphéroïde, soit sur la sphere inscrite, croissent à mesure que les arcs qui ont respectivement pour différentielles $\sqrt{(dX^2 + dy^2)}$, $\sqrt{(dX^2 + dY^2)}$ vont en décroissant.

(42) Je remarque qu'à cause des équations (7) & (8) du §. précédent, l'équation (11) peut avoir la forme suivante

(1) $dP = -\frac{y\sqrt{(dX^2 + \rho^2 dy^2)}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}$,

Ou si l'on veut, attendu que $\rho^2 = 1 + \Delta^2$, & que $dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)}$,

(2) $dP = -\frac{y}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}\sqrt{(dk^2 + \Delta^2 dy^2)}$.

Dans l'expression précédente je réduis $\sqrt{(dk^2 + \Delta^2 dy^2)}$ en série, & j'ai

(3) $dP = -\frac{y}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}\left(dk + \frac{1}{2}\Delta^2 \frac{dy^4}{dk}dy - \frac{1}{8}\Delta^4 \frac{dy^3}{dk^3}dy + \&c.\right)$

Je remarque d'abord (§. 41 eq. (13)) que $-\frac{y}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}dk = dp$;

de plus, (§. 27), $\frac{dy}{dx} = -X$; l'équation (3) peut donc être mise

fous la forme fuivante :

$$(4)\ dP = dp + \frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}\left(\tfrac{1}{2}\Delta^2 X - \tfrac{1}{8}\Delta^4 X^3 + \&c.\right)$$

Mais $ydy = -XdX$: & d'ailleurs $\sqrt{(y^2 - y'^2)} = \sqrt{(X'^2 - X^2)}$; donc

$$(5)\ dP = dp - \tfrac{1}{2}\Delta^2\left(\frac{X^2\,dX}{\sqrt{(X'^2 - X^2)}} - \tfrac{1}{4}\frac{\Delta^2 X^4\,dX}{\sqrt{(X'^2 - X^2)}} + \&c.\right)$$

Donc, fi l'on néglige les termes multipliés par les valeurs de Δ, élevées à une puiffance fupérieure à la feconde, & que l'on intégre, l'on aura

$$(6)\ P + \text{conftante} = p - \tfrac{1}{2}\Delta^2\int\frac{X^2\,dX}{\sqrt{(X'^2 - X^2)}}.$$

(43) Pour avoir l'intégrale du terme $\tfrac{1}{2}\Delta^2\int\frac{X^2\,dX}{\sqrt{(X'^2 - X^2)}}$, je l'écris ainfi $\tfrac{1}{2}\Delta^2 X'\int\frac{X^2\,dX}{X'\sqrt{(X'^2 - X^2)}}$. Soit un cercle particulier dont le rayon $= X'$; prenons dans ce cercle une abfciffe X, & nommons A' l'arc correfpondant à l'abfciffe X, pris dans ce cercle ; l'analyfe nous apprend que $\int\frac{X^2\,dX}{X'\sqrt{(X'^2 - X^2)}} = \tfrac{1}{2}A' - \frac{\tfrac{1}{2}\text{fin } A' \text{ cof } A'}{X'}$; mais $\frac{\text{fin } A' \text{ cof } A'}{X'} = \tfrac{1}{2}\text{fin } 2A'$; donc $\int\frac{X^2\,dX}{X'\sqrt{(X'^2 - X^2)}} = \tfrac{1}{2}(A' - \tfrac{1}{2}\text{fin } 2A')$; donc enfin

$$(1)\ P + \text{conftante} = p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 X'\left(A' - \frac{\text{fin } 2A'}{2}\right).$$

Dans l'équation précédente, A' eft ainfi que nous l'avons dit, l'arc qui a X pour finus, dans le cercle déterminé dont X' eft le rayon ; fi donc l'on veut fubftituer à l'arc A', l'arc homologue A pris dans le cercle dont le rayon $= 1$, l'on aura $\text{fin } A = \frac{X}{X'}$; & comme par cette opération, l'on a multiplié le facteur $A' - \frac{\text{fin } 2A'}{2}$ par $\frac{1}{X'}$, pour ne point troubler l'égalité, il faudra multiplier le facteur $\tfrac{1}{4}\Delta^2 X'$ par X' ; & l'équation (1) deviendra

$$(2)\ P + \text{conftante} = p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 X'^2\left(A - \frac{\text{fin } 2A}{2}\right)$$

A étant d'ailleurs déterminé au moyen de l'équation $\text{fin } A = \frac{X}{X'}$.

Il eft aifé de fe convaincre que X eft le finus de la latitude corrigée du point où fe termine la perpendiculaire à la méridienne fur le fphéroïde ; & que X' eft le cofinus de l'arc $m'P$. Soit donc

A un angle tel que

$$(3)\ \text{fin } A = \frac{\text{fin (latitude corrigée du point où fe termine la perpendiculaire.)}}{\text{cofin. } m'P}.$$

On a

$$(4)\ P + \text{conftante} = p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \text{cof}^2\, m'P\left(A - \frac{\text{fin } 2A}{2}\right).$$

(44) Nous

(44) Nous obſerverons que par la nature de la queſtion, P & p doivent être, à la fois, égaux à zéro, lorſque ſin (latitude corrigée du point où ſe termine la perpendiculaire ſur la ſphere inſcrite) $=$ coſ m'P; & par conſéquent lorſque $A = 90^d$, & $2A = 180^d$; on a donc conſtante $= -\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P$ arc 90^d; l'équation (4) du §. précédent, devient par là

$$(1)\quad P - p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\,(\text{arc}\,(90^d - A) + \tfrac{1}{2}\sin 2A) = 0.$$

Dans la formule précédente, P, p, & arc $(90^d - A)$ ſont exprimés en valeurs du rayon. Si l'on vouloit que ces quantités fuſſent exprimées en dégrés, minutes & ſecondes, on auroit

$$(2)\quad P - p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\left(90^d - A + \frac{206265''\sin 2A}{2}\right) = 0.$$

Nous remarquerons enfin que ſi l'on nomme

θ le nombre de toiſes que contient un dégré de la ſphere inſcrite; nous avons évalué cette quantité dans le §. 30;
t le nombre de toiſes que contient p;
T le nombre de toiſes que contient P;

L'on a

$$(3)\quad \theta p - 3600'' \times t = 0; \qquad (4)\quad \theta P - 3600'' \times T = 0.$$

RAPPORT DES AXES DE LA TERRE.

	Comme 177 *à* 178.	*Comme* 229 *à* 230.
$\text{Log}\ \frac{3600''}{\theta} =$	8·8016714	8·8013123.
$\frac{3600''}{\theta} =$	0'',06334	0'',06329.

	Comme 320 *à* 321.	*Comme* 1 *à* 1.
$\text{Log}\ \frac{3600''}{\theta} =$	8·8008316	8·7798642.
$\frac{3600''}{\theta} =$	0'',06323	0'',06308.

(45) Nous pouvons maintenant réſoudre les queſtions ſuivantes.

PREMIERE QUESTION.

Etant donné l'arc m' P *de la ſphere inſcrite (nous avons vu (§. 34) comment cet arc ſe déduit de la diſtance en toiſes, des points* M, M' *ſur le méridien elliptique), ainſi que la latitude du lieu F, on demande le nombre de toiſes que contient la perpendiculaire menée du lieu* F, *à la méridienne du lieu M, ſur le ſphéroïde*

Cette queſtion ne préſente aucune difficulté; en effet, puiſque l'on

connoît par la ſuppoſition, l'arc m' P de la ſphere inſcrite, & la latitude du lieu F, on connoîtra la latitude corrigée de ce dernier lieu. On aura donc ſur la ſphere inſcrite, un triangle ſphérique m' P F' rectangle
Fig. 3 en m', dans lequel on connoîtra le côté m' P, & le côté P F' complément de la latitude corrigée du lieu F; on conclura donc le côté m' F, ou la quantité p qui lui eſt égale, au moyen de l'équation ſuivante

$$(1)\quad \text{coſ}\, p = \frac{\text{ſin (latitude corrigée du lieu F)}}{\text{coſ}\, m'\text{P}}.$$

On connoîtra donc la valeur de p qu'il faut ſubſtituer dans l'équation (1) du §. 44. On évaluera enſuite l'angle A, au moyen de l'équation (3) du §. 43; & l'on aura l'expreſſion de P en dégrés, minutes & ſecondes, au moyen de l'équation (1) du §. 44. On reduira cette valeur de P en toiſes, au moyen de l'équation (4) du §. 44, & le Problême ſera reſolu.

Nous remarquerons ici que puiſque coſ p coſ m' P = ſin (latitude corrigée du lieu F), & que d'ailleurs (§. 43 eq. (3)), ſin A coſ m' P = ſin (latitude corrigée du lieu F), l'angle A eſt le complément de l'arc p.

L'angle A étant le complément de l'arc p, $90^d - \text{A} = p$; & de plus ſin 2 A = ſin ($180^d - 2p$) = ſin $2p$; les équations (1) & (2) du §. 44 peuvent donc être miſes ſous la forme ſuivante,

$$(2)\quad \text{P} - p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \text{coſ}^2\, m'\text{P}\,(p + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\, 2p) = 0;$$

$$(3)\quad \text{P} - p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \text{coſ}^2\, m'\text{P}\left(p + \frac{206265''\ \text{ſin}\ 2p}{2}\right) = 0.$$

Cette forme eſt la plus ſimple que l'on puiſſe donner à ces équations.

Seconde Question.

(46) La queſtion que nous venons de nous propoſer n'eſt pas celle dont on a généralement beſoin; il nous reſte à réſoudre celle qui eſt véritablement utile dans la pratique, & que l'on peut énoncer de la maniere ſuivante.

Etant donné l'arc m' P de la ſphere inſcrite (nous avons vu (§. 34) comment cet arc ſe déduit de la diſtance en toiſes des points M, M' *ſur le méridien elliptique), ainſi que le nombre de toiſes que contient la perpendiculaire menée du lieu* F, *à la méridienne du lieu* M *ſur le ſphéroïde, on demande la latitude du lieu* F.

Cette queſtion paroît d'abord préſenter plus de difficulté que la premiere. En effet, lorſque l'on connoît le nombre T de toiſes que contient l'arc P, il eſt facile d'avoir l'expreſſion de cet arc en dégrés, au moyen de l'équation (4) du §. 44; mais il ne paroît pas auſſi facile de déduire la valeur de p de celle de P, au moyen de l'équation (3) du §. 45, puiſque l'arc p & ſon ſinus, ſe trouvent mêlés dans cette équation. Heureuſement les circonſtances du Problême permettent d'employer une méthode ſimple & très-exacte dans la pratique.

Pour me faire entendre, je remarque que dans l'équation (3) du §. 45, le facteur $p + \frac{206265'' \sin 2p}{2}$ est multiplié par la fraction très-petite $\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P$; il n'est donc pas absolument nécessaire de connoître la valeur de p avec la derniere exactitude, pour avoir, avec précision, la correction donnée par le terme $\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\left(p + \frac{206265'' \sin 2p}{2}\right)$; il suffit d'avoir une connoissance approchée de cette quantité. On pourra donc, sans erreur sensible, dans le terme $\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\left(p + \frac{206265'' \sin 2p}{2}\right)$ de l'équation (3) du §. 45 substituer P à p ; l'on aura alors,

$$(1)\ p = P - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\left(P + \frac{206265'' \sin 2P}{2}\right);$$

Et cette équation est exacte, aux termes près de l'ordre Δ^4.

EXEMPLE.

(47) Je suppose qu'un lieu situé à la distance de 52902 toises de la méridienne de Paris, prise sur une perpendiculaire qui passe par ce lieu, rencontre la méridienne de Paris, à la distance de 14823 toises du côté du midi ; on demande la valeur de la perpendiculaire corrigée correspondante à ce lieu.

Solution. Nous avons vu qu'en supposant le rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178, on a (§. 38) $m'P = 41^d\ 34'\ 58''$; d'ailleurs puisque P = 52902 toises, & que θ = 56837 toises, on aura $P = 0^d\ 55'\ 51''$; $2P = 1^d\ 51'\ 42''$; $\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\left(P + \frac{206265'' \sin 2P}{2}\right) = 10'',6$; donc

$$p = 55'\ 51'' - 10'',6 = 55'\ 40'',4.$$

(48) Lorsque l'on connoîtra les valeurs de l'arc $m'P$ & de p, on conclura facilement la latitude corrigée du lieu F, en remarquant que le complément de cette latitude, est l'hypothenuse du triangle rectangle $m'PF'$, dans lequel on connoît le côté $m'P$, & le côté $m'F'$ qui est égal à p ; on a donc Fig. 3.

$$(1)\ \sin\ (\text{latitude corrigée du lieu F}) = \cos m'P \cos p.$$

On conclura pareillement la longitude corrigée du lieu F, en remarquant que cette longitude est égale à l'angle P du triangle $m'PF'$; on aura donc

$$(2)\ \text{tang (longitude corrigée du lieu F)} = \frac{\text{tang } p}{\sin m'P}.$$

Dans l'exemple dont il s'agit, la latitude corrigée du lieu F est de $48^d\ 24'\ 30''$, & par conséquent sa latitude vraie de $48^d\ 34'\ 7''$; la longitude corrigée du lieu F est de $1^d\ 23'\ 52''$; nous verrons dans la suite comment on en conclut la longitude vraie.

Forme nouvelle que l'on peut donner à l'équation (2) du §. 44.

Fig. 3. (49) Quelque facile qu'il ſoit, d'exécuter dans tous les cas, les calculs preſcrits, il eſt cependant poſſible de diminuer ce travail, au moyen des Tables que je me propoſe de donner ; mais je dois auparavant expoſer une forme nouvelle que l'on peut donner à l'équation (2) du §. 44.

Pour obtenir cette forme, je remarque que ſi l'on ſuppoſe un arc quelconque d'ellipſe PM′M dont l'origine eſt au ſommet P du petit axe, ainſi que l'arc correſpondant P*mm′* du cercle inſcrit ; que l'on nomme

K l'arc PM′ de l'ellipſe ;
k l'arc correſpondant P*m′* du cercle inſcrit ;

L'on a, en tranſportant l'origine des arcs K, *k* à l'extrêmité du petit axe, & conſéquemment en ſuppoſant $l = 90^d$ dans l'équation (2) du §. 34,

$$(1)\quad k - K + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \left(K - 206265'' \cos(180^d + K)\sin K\right) = 0;$$

Mais $\cos(180^d + K) = -\cos K$; l'équation (1) peut donc être miſe ſous la forme ſuivante

$$(2)\quad k - K + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \left(K + 206265'' \cos K \sin K\right) = 0;$$

Ou, ſi l'on veut, attendu que $\cos K \sin K = \frac{1}{2}\sin 2K$,

$$(3)\quad K - k = \tfrac{1}{4}\Delta^2 \left(K + \frac{206265'' \sin 2K}{2}\right).$$

On voit par là que ſi dans une ellipſe dont le demi-petit axe $= 1$, & dont la demi-excentricité $= \Delta$, on prend un arc P dont l'origine eſt au ſommet du petit axe, le facteur $\frac{1}{4}\Delta^2 \left(P + \frac{206265'' \sin 2P}{2}\right)$ de l'équation (1) du §. 46, repréſente l'excès de l'arc P de l'ellipſe, ſur l'arc correſpondant du cercle inſcrit. Si donc l'on nomme

γ la différence de l'arc P de l'ellipſe & de l'arc correſpondant du cercle inſcrit ;

l'équation (1) du §. 46 pourra être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(4)\quad P - p - \gamma \cos^2 m'P = 0.$$

Cette équation ſe réſoudra avec la derniere facilité, au moyen des Tables que nous allons donner, & qui repréſenteront les valeurs de γ, de ſix minutes en ſix minutes, pour les ſix premiers degrés de l'arc P. Je n'ai point été au-delà de ces valeurs, parce que les Cartes de France n'exigent pas une plus grande étendue.

Dans l'uſage de cette derniere formule, pour [illegible] γ, on prendra dans la Table, un arc d'ellipſe égal à la perpendiculaire P ou *p*, ſuivant que ce ſera la perpendiculaire vraie ou la perpendiculaire corrigée qui ſera donnée. Dans le premier cas, γ ſera poſitif ; il ſera négatif dans le ſecond cas.

TABLE des différences entre les arcs de l'ellipſe & les arcs correſpondans du cercle inſcrit.

		Rapport des axes de la Terre.		
		177 à 178.	229 à 230.	320 à 321.
D.	*M.*	*Sec.*	*Sec.*	*Sec.*
0	0	0,0	0, 0	0, 0
0	10	3,40	2,65	1,90
0	20	6,80	5,30	3,80
0	30	10,20	7,95	5,70
0	40	13,60	10,60	7,60
0	50	17,00	13,35	9,50
1	0	20,40	15,90	11,40
1	10	23,80	18,55	13,30
1	20	27,20	21,20	15,20
1	30	30,60	23,85	17,10
1	40	34, 0	26,50	19,00
1	50	37,40	29,15	20,90
2	0	40,80	31,80	22,80
2	10	44,20	34,44	24,70
2	20	47,60	37,07	26,60
2	30	51, 0	39,70	28,50
2	40	54,40	42,33	30,40
2	50	57,80	44,96	32,30
3	0	61,20	47,60	34,20
3	10	64,60	50,23	36,10
3	20	68, 0	52,86	38,00
3	30	71,40	55,50	39,90
3	40	74,80	58,13	41,80
3	50	78,20	60,76	43,70
4	0	81,60	63,40	45,60
4	10	84,99	66,03	47,50
4	20	88,37	68,66	49,40
4	30	91,75	71,30	51,30
4	40	95,13	73,93	53,20
4	50	98,52	76,56	55,10
5	0	101,90	79,20	57,00
5	10	104,[illegible]	81,82	58,89
5	20	10[illegible],64	84,44	60,77
5	30	112, 1	87,06	62,65
5	40	115,38	89,67	64,53
5	50	118,75	92,28	66,42
6	0	122,12	94,89	68,30

Différences.			
	177 à 178.	229 à 230.	320 à 321.
1′	0″,34	0″,265	0″,19
2′	0″,68	0″,530	0″,38
3′	1″,02	0″,795	0″,57
4′	1″,36	1″,060	0″,76
5′	1″,70	1″,325	0″,95
6′	2″,04	1″,590	1″,14
7′	2″,38	1″,855	1″,33
8′	2″,72	2″,120	1″,52
9′	3″,06	2″,385	1″,71
10′	3″,40	2″,650	1″,90

Usage de la Table précédente.

Fig. 3. (50) Au moyen de la Table précédente, étant donné un arc d'ellipse, on conclura facilement l'arc correspondant du cercle inscrit ; & réciproquement. Si l'arc de l'ellipse est donné, il faudra soustraire de cet arc, la différence calculée dans la Table, pour avoir l'arc correspondant du cercle inscrit. Ce seroit le contraire, si l'arc du cercle inscrit étoit donné.

Non seulement on peut conclure par cette Table, les différences entre les arcs PM′, P*m*′ de l'ellipse & du cercle inscrit qui ont leur origine au sommet P du petit axe de l'ellipse ; on peut avoir également la différence entre deux arcs correspondans quelconques MM′, *mm*′ de l'ellipse & du cercle inscrit, dont l'origine ne seroit pas au point P. Cette différence est égale à la différence des arcs PM, *pm*, moins la différence des arcs PM′, *pm*′.

Application des principes précédens à l'exemple du §. 47.

(51) Rien de plus simple que d'appliquer la Table du §. 49, à l'exemple du §. 47. Dans ce cas, on cherchera dans la colonne qui répond au rapport des axes comme 177 à 178, la différence entre l'arc de l'ellipse & l'arc du cercle qui répond à 55′ 51″. Je vois tout de suite par cette Table, que cette différence est de 19″. Je prends le logarithme de 19″ ; j'ajoute le logarithme de $\cos^2 m'P$, & j'ai comme ci-dessus, $p = 55' \, 51'' - 10'',6 = 55' \, 50'',4$.

Des changemens qu'il faut faire à la solution, lorsque la ligne que l'on considere, n'est pas perpendiculaire à la méridienne, au point de départ.

(52) Dans la solution précédente, nous avons supposé que la ligne dont il s'agit, étoit perpendiculaire à la méridienne au point de départ ; il est question maintenant de faire voir quel changement l'on doit faire à cette solution, lorsque la ligne n'est pas perpendiculaire à la méridienne au point de départ.

Soit

D l'angle que fait la ligne en question, avec la méridienne, au point de départ ;

Et conservons toutes les définitions précédences. On aura pour équation à la ligne dont il s'agit sur le sphéroïde,

$$(1) \quad Y^2 \, du - \sqrt{(Y^2 \, du^2 + dX^2 + dY^2)} \, Y' \sin D = 0 ;$$

Et pour équation à la projection de cette ligne sur la sphere inscrite :

$$(2) \quad y^2 \, dv^2 - \sqrt{(y^2 \, dv^2 + dX^2 + dy^2)} \, y' \sin D = 0.$$

D'ailleurs les équations (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) du §. 41 ne changent point. D'où l'on voit que par une analyse entiérement

ſemblable à celle que nous avons ſuivie dans les §. 41 & 42 ; au lieu de parvenir à l'équation (6) du §. 42, on aura

$$(5)\quad P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\,\Delta^2 \int \frac{X^2\, dX}{\sqrt{(1 - y'^2 \sin^2 D - X^2)}}.$$

(53) Soit un cercle particulier qui ait r pour rayon, & qui ſoit tel que

$$(1)\quad r = \sqrt{(1 - y'^2 \sin^2 D)};$$

Prenons dans ce cercle une abſciſſe égale à X, & nommons A′ l'arc correſpondant à l'abſciſſe X pris dans le cercle dont il s'agit ; nous parviendrons comme dans le §. 43, à l'équation ſuivante

$$(2)\quad P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{4}\,\Delta^2\, r\left(A' - \frac{\sin 2A'}{2}\right).$$

Dans l'équation précédente, A′ eſt, ainſi que nous l'avons dit, l'arc qui a X pour ſinus, dans le cercle determiné dont r eſt le rayon. Si donc l'on veut ſubſtituer à l'arc A′, l'arc homologue A pris dans le cercle dont le rayon = 1, l'on aura pour déterminer cet arc

$$(3)\quad \sin A = \frac{X}{r};$$

Et comme par cette opération l'on a multiplié le facteur $A' - \frac{\sin 2A'}{2}$ par $\frac{1}{r}$, pour ne point troubler l'égalité, il faudra multiplier le facteur $\frac{1}{4}\Delta^2\, r$ par r, & l'équation (2) deviendra

$$(4)\quad P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{4}\,\Delta^2\, r^2 \left(A - \frac{\sin 2A}{2}\right).$$

(54) Nous avons vu dans le §. précédent que $r = \sqrt{(1 - y'^2 \sin^2 D)}$; il eſt aiſé de voir que $\sqrt{(1 - y'^2 \sin^2 D)}$ eſt l'expreſſion du coſinus de la latitude corrigée ſur la ſphere inſcrite, du point particulier de cette ſphere, où le prolongement de la perpendiculaire corrigée, qui coupe le méridien de départ ſous l'angle D, coupe un nouveau méridien à angle droit. Soit en effet, M′ F une ligne du genre des perpendiculaires, tracée ſur le ſphéroïde, mais que l'on ſuppoſe faire un angle D avec le méridien M P, au point de départ ; ſoit m' F′ la portion correſpondante du grand-cercle tracé ſur la ſphere inſcrite. Suppoſons l'arc m' F′ prolongé juſqu'à ce qu'il rencontre un méridien μ' P de la ſphere inſcrite, en un point μ' où il ſoit perpendiculaire à ce méridien ; il eſt évident que dans le triangle ſphérique $m'\,\mu'$ P rectangle en μ', & dont on connoît l'angle en m' que nous avons nommé D, & le côté m' P dont le ſinus = y', on aura Fig. 4.

$$(1)\quad \sin \mu' P = \sin m' P \times \sin D = y' \sin D;$$

$\sqrt{(1 - y'^2 \sin^2 D)}$ eſt donc le coſinus de l'arc μ' P ; & l'on a par conſéquent

$$(2)\quad r = \cos \mu' P.$$

Fig. 4. Nous avons vu d'ailleurs (§. 53) que $\sin A = \frac{X}{r}$; de plus l'angle qui a X pour ſinus dans la ſphere inſcrite, eſt la latitude corrigée du lieu F ; donc

$$(3)\quad \sin A = \frac{\sin(\text{latitude corrigée du lieu F})}{\cos \mu' P}.$$

Et l'équation (4) du §. précédent devient

$$(4)\quad P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P \left(A - \frac{\sin 2A}{2}\right).$$

(55) Nous obſerverons que par la nature de la queſtion, P & p doivent être à la fois égaux à zéro, lorſque ſin (latitude corrigée du lieu F) = coſ m' P. Si dans l'équation (4) du §. précédent, l'on ſuppoſe $P = 0$, $p = 0$; & que l'on ſubſtitue d'ailleurs à l'angle A, un angle particulier a tel que

$$(1)\quad \sin a = \frac{\cos m' P}{\cos \mu' P};$$

C'eſt l'angle A particulier qui a lieu au point du départ ; on aura

$$\text{Conſtante} = -\tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P \left(a - \frac{\sin 2a}{2}\right);\ \text{donc}$$

$$(2)\quad P = p + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P \left(a - A - \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 2A}{2}\right).$$

Mais $-\frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 2A}{2} = -\cos(a + A)\sin(a - A)$; donc enfin

$$(3)\quad P = p + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P\,(a - A - \cos(a + A)\sin(a - A)).$$

(56) Dans le triangle ſphérique $m' P \mu'$ rectangle en μ', ſi l'on cherche l'expreſſion du côté $\mu' m'$, on aura $\cos \mu' m' = \frac{\cos m' P}{\cos \mu' P}$. Par la même raiſon, dans le triangle ſphérique $\mu' P F'$, l'on aura $\cos \mu' F' = \frac{\cos P F'}{\cos \mu' P} = \frac{\sin(\text{latitude corrigée du lieu F})}{\cos \mu' P}$. Il ſuit de là (§. 54 eq. (1)) que a eſt le complément de l'arc $\mu' m'$; & (§. 54 eq. (3)), que A eſt le complément de l'arc $\mu' F'$; l'on a donc $A = 90^d - \mu' F'$; $a = 90^d - \mu' m'$; & par conſéquent, $a - A = \mu' F' - \mu' m'$; $a + A = 180^d - \mu' m' - \mu' F'$. Mais $\mu' F' - \mu' m' = m' F' = p$; $\mu' F' + \mu' m' = 2\mu' m' + m' F' = 180^d - 2a + p$; donc $a - A = p$; $\sin(a - A) = \sin p$; $a + A = 2a - p$; $\cos(a + A) = \cos(2a - p)$; & l'équation (3) du §. 55 devient

$$(1)\quad P = p + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P\,(p - \cos(2a - p)\sin p).$$

Ou ſi l'on veut que les quantités P, p ſoient exprimées en dégrés, minutes & ſecondes,

$$(2)\quad P - p - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P\,(p - 206265''\cos(2a - p)\sin p) = 0.$$

Cette forme eſt la plus ſimple que l'on puiſſe donner à cette équation.

Les

Les réflexions du §. 46 font voir que l'on auroit également l'équation suivante, Fig. 4.

$$(3)\quad p = P - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P \left(P - 206265'' \cos(2a - P) \sin P\right).$$

EXEMPLE.

(57) Etant donné l'arc m' P de la sphere inscrite (nous avons vu (§. 34) comment cet arc se déduit de la distance en toises des points M,M' sur le méridien elliptique), ainsi que le nombre de toises que contient sur le sphéroïde, la ligne M' F, que l'on suppose d'ailleurs faire avec la méridienne M' P, un angle D au point de départ, l'on demande la latitude vraie du lieu F, & sa longitude corrigée.

Solution. Cette question ne présente aucune difficulté. On réduira d'abord la ligne M' F ou P en dégrés, au moyen de l'équation (4) du §. 44. On remarquera ensuite que puisque l'arc m' P & l'angle D sont connus, on connoîtra la valeur de p, au moyen de l'équation (3) du §. précédent. Maintenant puisque (§. 56) $a - A = p$, l'on a $A = a - p$. On connoîtra donc la latitude corrigée du lieu F, au moyen de l'équation (3) du §. 54; la latitude vraie du lieu F sera donc connue.

Quant à la longitude corrigée du lieu F, puisque dans le triangle m' P F', on connoît le côté P F' complément de la latitude corrigée du lieu F, l'angle P m' F' égal à l'angle D, & le côté m' F' égal à p; l'on aura.

$$(1)\quad \sin(\text{longitude corrigée}) = \frac{\sin D \times \sin p}{\cos(\text{latitude corrigée du lieu F})}.$$

(58) Il est aisé de voir que dans les équations (2) & (3) du §. 56, les petits termes $\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P\,(p - 206265'' \cos(2a - p) \sin p)$ ou $\frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 \mu' P\,(P - 206265'' \cos(2a - P) \sin P)$, peuvent se calculer facilement au moyen de la Table du §. 49. En effet, si l'on nomme

γ l'excès de l'arc de l'ellipse, sur l'arc correspondant du cercle inscrit, qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par $90^d - a + P$, ou par $90^d - a + p$; suivant que c'est la perpendiculaire vraie ou la perpendiculaire corrigée qui est donnée;

γ' l'excès de l'arc de l'ellipse, sur l'arc correspondant du cercle inscrit qui répond dans la Table à l'arc exprimé par $90^d - a$;

Il est aisé de démontrer d'après les principes des §. 49 & 50, que l'équation (3) du §. 56 peut être mise sous la forme suivante,

$$(1)\quad P - p - \cos^2 \mu' P\,(\gamma - \gamma') = 0.$$

ARTICLE VII.

Détermination du rapport entre la longitude vraie du lieu F & la longitude corrigée du même lieu.

Du cas où la ligne que l'on considere est perpendiculaire à la méridienne au point de départ.

(59) Dans les paragraphes précédens, nous avons fait voir comment,

Fig. 3. étant donnée la distance FM′ d'un lieu F, au méridien d'un lieu M, mesurée sur la perpendiculaire F M′ à la méridienne du lieu M, ainsi que la distance M′M du pied de cette perpendiculaire, au même lieu M, mesurée sur le méridien du lieu M, on déterminoit la latitude corrigée & la latitude vraie du lieu F, ainsi que sa longitude corrigée ; il s'agit maintenant de conclure la longitude vraie du lieu F.

Pour y parvenir, on se rappellera que si l'on conserve les définitions du §. 41 auquel je renvoye, on a pour équation à la perpendiculaire à la méridienne sur le sphéroïde

$$(1)\ Y^2 du - Y' \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)} = 0;$$

Pour équation à la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite,

$$(2)\ y^2 dv - y' \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)} = 0;$$

Et ces équations peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(3)\ du = -\frac{Y'}{Y\sqrt{(Y^2 - Y'^2)}} \sqrt{(dX^2 + dY^2)};$$

$$(4)\ dv = -\frac{y'}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \sqrt{(dX^2 + dy^2)}.$$

De plus (§. 41)

$$(5)\ py - Y = 0; \quad (6)\ py' - Y' = 0; \quad (7)\ pdy - dY = 0;$$

$$(8)\ XdX + ydy = 0; \quad (9)\ dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)};$$

$$(10)\ dp = -\frac{ydk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}.$$

Maintenant, à cause des équations (5), (6), (7) & (9), & que d'ailleurs $p^2 - 1 - \Delta^2 = 0$; l'équation (3) peut être mise sous la forme suivante,

$$(11)\ du = -\frac{y'}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \sqrt{\left(dk^2 - \frac{\Delta^2 dX^2}{p^2}\right)}.$$

Je réduis $\sqrt{\left(dk^2 - \frac{\Delta^2 dX^2}{p^2}\right)}$ en série, & j'ai, en négligeant les termes de l'ordre Δ^4, & en supposant $p^2 = 1$ dans les termes multipliés par Δ^2,

$$(12)\ du = -\frac{y'}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} \left(dk - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \frac{dX^2}{dk}\right);$$

Mais eq. (2) & (9) $-\frac{y'}{y\sqrt{(y^2 - y'^2)}} dk = dv$; & à cause des équations (8) & (9), $dX^2 = y^2 dk^2$; l'équation (12) deviendra donc

$$(13)\ du = dv + \tfrac{1}{2}\Delta^2 y' \times \frac{ydk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}};$$

Mais équation (10), $\frac{ydk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} = -dp$; donc enfin

$$(14)\ du = dv - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y' dp;$$

Ou, en intégrant,

$$(15)\ u - v + \tfrac{1}{2}\Delta^2 y' p = 0;$$

car il n'y a point de constante à ajouter, puisque, par la nature du Problême, u, v & p sont égaux à zéro, à l'origine des longitudes.

(*60*) Il ſuit des définitions précédentes que $y' = \sin m'P$; de plus P & p ne different que d'une quantité de l'ordre Δ^2 ; l'on a donc indiſtinctement,

(1) Longitude vraie — longit. corrigée $+ \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times$ perpendiculaire corrigée $= 0$

(2) Longitude vraie — longit. corrigée $+ \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times$ perpendiculaire vraie $= 0$.

Rapport des axes de la Terre.

Comme 177 *à* 178.	*Comme* 229 *à* 230.	*Comme* 320 *à* 321.
$\text{Log}\,\frac{1}{2}\Delta^2 = 7{,}75327355$;	$\text{Log}\,\frac{1}{2}\Delta^2 = 7{,}6429589$;	$\text{Log}\,\frac{1}{2}\Delta^2 = 7{,}4985862$.

Exemple.

(*61*) Je ſuppoſe un lieu ſitué à la diſtance de 52902 toiſes de la méridienne de Paris, priſes ſur une perpendiculaire à cette méridienne; je ſuppoſe de plus que la perpendiculaire qui paſſe par ce lieu, rencontre la méridienne de Paris à la diſtance de 14823 toiſes du côté du midi; on demande la longitude vraie de ce lieu.

Solution. Nous avons vu précédemment qu'en ſuppoſant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178, on a dans le cas dont il s'agit (§. 37) $m'P = 41^d\, 34'\, 58''$; d'ailleurs puiſque la diſtance ſur la perpendiculaire eſt de 52902 toiſes, l'on a (§. 47 & 48) $p = 0^d\, 55'\, 40'',4$; longitude corrigée $= 1^d\, 23'\, 52''$; donc longitude vraie $=$ longitude corrigée $- \frac{1}{2}\Delta^2 p \sin m'P = 1^d\, 23'\, 52'' - 12'' = 1^d\, 23'\, 40''$.

Du cas où la ligne que l'on conſidere n'eſt pas perpendiculaire à la méridienne au point du départ.

(*62*) Si l'on conſerve toutes les définitions précédentes, & que l'on nomme de plus,

D l'angle que fait la ligne dont il s'agit avec la méridienne au point de départ,

au lieu des équations (1) & (2) du §. 59, l'on aura

$$(1)\quad Y^2 du - \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}\, Y' \sin D = 0\,;$$

$$(2)\quad y^2 dv - \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)}\, y' \sin D = 0\,;$$

toutes les autres équations du §. 59 reſtant d'ailleurs les mêmes. Donc par une analyſe entiérement ſemblable à celle de ce paragraphe, on parviendra aux réſultats ſuivans;

(3) Longitude vraie — longit. corrigée $+ \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \sin D \times$ perpend. corrigée $= 0$;

(4) Longitude vraie — longit. corrigée $+ \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \sin D \times$ perpendic. vraie $= 0$.

Article VIII.

De l'angle que fait la perpendiculaire à la méridienne, avec le méridien du lieu F ; *& généralement avec les différens méridiens qu'elle rencontre.*

(*63*) Je dois encore déterminer l'angle que fait la perpendiculaire

à la méridienne, avec le méridien du lieu F ; & généralement avec les différens méridiens qu'elle rencontre. Ce problême est facile à résoudre ; nous avons vu en effet (§. 9) que si l'on nomme,

Y' l'ordonnée à l'ellipse au point de départ ;
y' l'ordonnée correspondante du cercle inscrit ;
Y l'ordonnée à l'ellipse à un point F quelconque ;
y l'ordonnée correspondante du cercle inscrit ;

On a

(1) Y sin (angle de la courbe avec le méridien du lieu F) $= Y'$.

Mais $Y = \rho y$; & $Y' = \rho y'$; donc

(2) y sin (angle de la courbe avec le méridien du lieu F) $= y'$;

Ou enfin, attendu que y' est le cosinus de la latitude corrigée du point de départ, & y le cosinus de la latitude corrigée du lieu F,

(3) $$\sin(\text{angle de la courbe avec le méridien du lieu F}) = \frac{\cos(\text{latitude corrigée du point de départ})}{\cos(\text{latitude corrigée du lieu F})}.$$

L'équation précédente a lieu lorsque la courbe dont il s'agit est perpendiculaire au méridien, au point de départ. Si cette ligne, au lieu d'être perpendiculaire, faisoit un angle avec le méridien au point de départ, l'on auroit

(4) $$\sin(\text{angle de la courbe avec le méridien du lieu F}) = \frac{\sin D \cos(\text{latitude corrigée du point de départ})}{\cos(\text{latitude corrigée du lieu F})}.$$

En entendant d'ailleurs par

D l'angle de la ligne avec le méridien, au point de départ.

D'une propriété du grand cercle de la sphere inscrite qui représente la perpendiculaire corrigée.

(64) Si l'on cherche l'angle que fait avec le méridien de la sphere inscrite, le grand cercle de cette sphere qui représente la perpendiculaire corrigée, on verra d'après l'équation (1) du §. 24, que ce grand cercle fait avec les différens méridiens, sous les latitudes corrigées correspondantes aux latitudes vraies du sphéroïde, un angle égal à celui formé sur le sphéroïde par la perpendiculaire à la méridienne, avec les méridiens successifs qu'elle rencontre. Cette propriété méritoit d'être remarquée, & elle caractérise le grand cercle de la sphere inscrite, qui représente la perpendiculaire corrigée.

Usages des propriétés précédentes, pour la vérification des perpendiculaires.

(65) Les propriétés que nous venons de démontrer relativement aux angles que fait la perpendiculaire à la méridienne, avec les différens méridiens qu'elle rencontre, fournissent un moyen simple pour vérifier cette perpendiculaire lorsqu'on la trace sur le sphéroïde. Il ne

s'agit que d'observer la latitude du lieu d'arrivée, & l'angle que fait la perpendiculaire avec le méridien de ce lieu. Comme on connoît alors la latitude corrigée du lieu d'arrivée, ainsi que celle du lieu de départ, l'on vérifiera facilement si l'angle observé de la perpendiculaire avec le méridien dont il s'agit, égale celui donné par le calcul ; cette vérification pourra servir à assurer l'exactitude des opérations, en supposant toutefois que notre globe soit un sphéroïde.

On peut objecter que la méthode est en quelque sorte hypothétique, puisque l'on est obligé de faire usage des latitudes corrigées, dont la détermination dépend du rapport hypothétique des axes de la Terre. Cependant si l'on fait réflexion que pour toutes les hypotheses plausibles sur le rapport des axes de la Terre, l'erreur qui peut résulter dans l'estimation de la fraction $\frac{\text{cos (latitude corrigée du point de départ)}}{\text{cos (latitude corrigée du lieu d'arrivée)}}$ est infiniment plus petite que celle qui peut résulter des opérations géodésiques, on sera tenté de ne pas négliger le moyen que nous présentons.

Pour s'en convaincre, soit

L la latitude corrigée du point de départ, employée dans le calcul ;

L' la latitude corrigée du point d'arrivée, employée dans le calcul ;

$L+\alpha$ la latitude corrigée du point de départ que l'on auroit dû employer ;

$L'+\alpha+d\alpha$ la latitude corrigée du point de départ que l'on auroit dû employer.

La fraction que l'on auroit dû employer dans le calcul sera $\frac{\cos(L+\alpha)}{\cos(L'+\alpha+d\alpha)}$, au lieu de la fraction $\frac{\cos L}{\cos L'}$ que l'on a réellement employée. Mais on sait que $\cos(L+\alpha)=\cos L-\alpha\sin L$, $\cos(L'+\alpha+d\alpha)=\cos L'-(\alpha+d\alpha)\sin L'$. La véritable fraction pourra donc être mise sous la forme suivante $\frac{\cos L-\alpha\sin L}{\cos L'-(\alpha+d\alpha)\sin L'}=\frac{\cos L}{\cos L'}+\frac{\alpha\sin(L'-L)}{\cos^2 L'}+\frac{d\alpha\,\text{tang}\,L'\cos L}{\cos L'}$.

Or cette fraction se réduit, sans erreur sensible, au seul terme $\frac{\cos L}{\cos L'}$, attendu que par tous les rapports probables des axes de la Terre, α ne peut jamais supposer $2'$, & que $d\alpha$ est très-petit.

(66) Au moyen des équations qui expriment l'angle que fait la perpendiculaire à la méridienne avec les différens méridiens successifs qu'elle rencontre, étant donné l'angle que fait une courbe du genre des perpendiculaires, avec un certain méridien sous une latitude donnée, on peut déterminer 1°. l'angle qu'elle fera avec un autre méridien sous une autre latitude ; 2°. le parallele où elle sera perpendiculaire au méridien, c'est-à-dire, la latitude du sommet de la perpendiculaire. Rien n'est plus simple que la solution de ces questions ; en effet, si l'on nomme

D' l'angle de la ligne avec les différens méridiens successifs qu'elle rencontre ;

D l'angle de la ligne avec un certain méridien particulier ;

On a

$$(1)\ \text{ſin D cof (latitude corrigée du lieu qui obſerve l'angle D)} - \text{ſin D}' \text{ cof (latitude corrigée du lieu qui obſerve l'angle D}') = 0.$$

On connoîtra donc facilement l'angle D' qu'elle fera ſous une autre latitude quelconque, au moyen de l'équation,

$$(2)\ \text{ſin D}' = \text{ſin D} \frac{\text{cof (latitude corrigée du lieu qui obſerve l'angle D)}}{\text{cof (latitude corrigée du lieu qui obſerve l'angle D}')}.$$

On connoîtra enfin la latitude du lieu du ſommet, en ſuppoſant ſin D' = 1 ; & l'on aura

$$(3)\ \text{cof latitude corrigée du lieu du ſommet)} = \text{ſin D cof (latitude corrigée du lieu qui obſerve l'angle D)}.$$

Ces méthodes peuvent être utiles, lorſque l'on trace une courbe du genre des perpendiculaires, afin de vérifier les opérations géodeſiques.

Article IX.

Méthode pour conclure la latitude & la longitude d'un lieu, de la latitude & de la longitude connues d'un lieu voiſin ; lorſque d'ailleurs l'on connoît les différences des lignes m' P, & des perpendiculaires qui répondent à ces lieux.

(67) Ce ſeroit un travail conſidérable d'entreprendre de calculer les longitudes & les latitudes de tous les lieux de la France, d'après leurs diſtances à la méridienne ; on ne doit naturellement ſe propoſer un pareil travail que pour les lieux principaux. Il eſt donc utile, pour connoître la poſition des lieux intermédiaires, d'avoir une méthode facile pour conclure la latitude & la longitude d'un lieu quelconque, de la latitude & de la longitude connues d'un autre lieu voiſin, en connoiſſant d'ailleurs les différences des lignes m'P & des perpendiculaires qui répondent à ces lieux. Je vais m'occuper de cet objet.

Nous avons vu (§. 48) que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\ \text{ſin (latitude corrigée du lieu F)} = \text{cof } m'P \text{ cof } p;$$

$$(2)\ \text{Tangente (longitude corrigée du lieu F)} = \frac{\text{tang } p}{\text{ſin } m'P}.$$

De plus (§. 20, 34, 46, 60)

$$(3)\ \text{Tang. (latitude vraie)} = \rho \text{ tang (latitude corrigée)};$$

$$(4)\ m'P = \text{complément (latitude corrigée du lieu M)} - k;$$

$$(5)\ k = K - \tfrac{1}{4}\Delta^2 (K - \text{cof (2 latitude corrigée du lieu M} + K) \text{ ſin K});$$

$$(6)\ p = P - \tfrac{1}{4}\Delta^2 \text{ cof}^2\, m'P \left(P + \frac{\text{ſin } 2P}{2}\right);$$

$$(7)\ \text{Longitude vraie} = \text{longitude corrigée} - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \text{ ſin } m'P \times \text{perpendiculaire corrigée}.$$

Ces équations vont réſoudre la queſtion propoſée.

Méthode pour conclure la latitude.

(68) Si l'on différencie l'équation (1) du §. précédent, l'on aura

$$(1)\ d\,(\text{latitude corrigée F}) = -\frac{\text{ſin } m'\text{P} \text{ coſ}\,p}{\text{coſ (latitude corrigée F)}}\,d\,m'\text{P} - \frac{\text{coſ } m'\text{P ſin}\,p}{\text{coſ (latitude corrigée F)}}\,dp.$$

Je remarque d'abord qu'à cauſe de l'équation (1) du §. 67, l'on a $1 - \text{coſ}^2$ (latitude corrigée F) $= (1 - \text{ſin}^2 p) \times (1 - \text{ſin}^2 m'\text{P})$; & par conſéquent coſ^2 (latitude corrigée F) $- \text{ſin}^2 p - \text{ſin}^2 m'\text{P coſ}^2 p = 0$. De cette équation l'on tire en réduiſant en ſérie, & en négligeant les quatriemes puiſſances de $\text{ſin}\,p$,

$$(2)\ \text{coſ (latitude corrigée F)} - \text{ſin } m'\text{P coſ}\,p - \tfrac{1}{2}\frac{\text{ſin}^2 p}{\text{ſin } m'\text{P coſ}\,p} = 0.$$

Si dans le premier terme de l'équation (1), à coſ (latitude corrigée F) l'on ſubſtitue ſa valeur tirée de l'équation précédente, & que l'on exécute la diviſion, en négligeant les troiſiemes puiſſances de $\text{ſin}\,p$, l'on aura

$$(3)\ d\,(\text{latitude corrigée F}) = -\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\text{tang}^2 p}{\text{ſin}^2 m'\text{P}}\right) d\,m'\text{P}.$$

Si l'on ſubſtitue pareillement dans le ſecond membre de l'équation (1), à coſin (latitude corrigée F), ſa valeur $\text{ſin } m'\text{P coſ}\,p + \tfrac{1}{2}\frac{\text{ſin}^2 p}{\text{ſin } m'\text{P coſ}\,p}$; & que l'on exécute la diviſion en négligeant les troiſiemes puiſſances de $\text{ſin}\,p$, l'on aura

$$(4)\ d\,(\text{latitude corrigée F}) = -\text{cotang. } m'\text{P tang}\,p\,dp.$$

A cauſe de l'équation (3) du §. 67, l'on a d (latitude corrigée) $= \frac{1}{\rho}\frac{\text{coſ}^2 \text{(latitude corrigée)}}{\text{coſ}^2 \text{(latitude vraie)}} \times d$ (latitude vraie). Mais ſi dans les très petits termes multipliés par Δ^2, l'on ſubſtitue ſin m' P coſ p, ou plutôt ſin m' P, à coſ (latitude corrigée), attendu que coſ p peut alors ſe confondre avec le rayon ; l'on conclura de l'équation (3) du §. 67, $\frac{1}{\rho}\frac{\text{coſ}^2 \text{(latitude corrigée)}}{\text{coſ}^2 \text{(latitude vraie)}} = \frac{\rho^2 - \Delta^2 \text{ſin}^2 m'\text{P}}{\rho}$; donc d (latitude corrigée) $= \frac{\rho^2 - \Delta^2 \text{ſin}^2 m'\text{P}}{\rho}\,d$ (latitude vraie; donc enfin

$$(5)\ d\,(\text{latitude vraie}) = -\frac{1 - \dfrac{\frac{1}{2}\text{tang}^2 p}{\text{ſin}^2 m'\text{P}}}{\rho^2 - \Delta^2 \text{ſin}^2 m'\text{P}}\,\rho\,d\,m'\text{P} - \frac{\text{cotang } m'\text{P}}{\rho^2 - \Delta^2 \text{ ſin}^2 m'\text{P}}\,\rho \text{ tang}\,p\,dp.$$

(69) La valeur de dm' P n'eſt pas difficile à évaluer. En effet, à cauſe

des équations (4) & (5) du §. 67, l'on a $dm'P = -dk$; $dk = dK(1 - \frac{1}{4}\Delta^2(1 - \cos(2 \text{ latitude corrigée } M + 2K)))$.

Dans cette différentiation, nous avons confondu arc K & sin K, dans le terme multiplié par Δ^2 ; & nous avons négligé le terme qui résulteroit de la différentiation de cos (2 latitude corrigée $M + 2K$), attendu la petitesse du résultat qui seroit donné par cette différenciation. Mais, à cause de l'équation (4) du §. 67, on peut conclure sans erreur sensible, que latitude corrigée $M + K = 90^d - m'P$; donc 2 latitude corrigée $M + 2K = 180^d - 2m'P$; donc

$$(1)\ dk = dK(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2(1 - \cos(180^d - 2m'P)))\,;$$

Donc

$$(2)\ dm'P = -dK(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2(1 - \cos(180^d - 2m'P))).$$

Dans cette derniere équation dK est un arc de cercle ; si l'on vouloit que dK fût exprimé en toises, l'on auroit, en entendant par

θ le nombre de toises que contient le dégré de la sphere inscrite;

$$(3)\ dm'P = -(1 + \tfrac{1}{4}\Delta^2(1 - \cos(180^d - 2m'P)))\,\frac{3600''}{\theta}\,dK.$$

La valeur de dp n'est pas plus difficile à évaluer. En effet, si l'on différencie l'équation (6) du §. 67, l'on aura $dp = dP - \frac{1}{4}\Delta^2 \cos^2 m'P\,(dP + \frac{1}{2}\cos 2P \times 2dP)$; mais attendu la petitesse du coéficient $\frac{1}{4}\Delta^2$ du second terme de cette derniere équation, & que l'arc P est toujours fort petit, l'on peut sans erreur sensible dans ce petit terme, supposer $\cos 2P = 1$; donc

$$(4)\ dp = (1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \cos^2 m'P)\,dP.$$

Dans cette équation, dP est un arc de cercle ; si l'on vouloit que dP fût exprimé en toises, l'on auroit

$$(5)\ dp = (1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \cos^2 m'P)\,\frac{3600''}{\theta}\,dP.$$

(70) Si dans l'équation (5) du §. 68, l'on substitue à tang p, sa valeur $p + \frac{1}{3}p^3$ & à p sa valeur $P(1 - \frac{1}{2}\Delta^2 \cos^2 m'P)$, à $dm'P$ & à dp, leurs valeurs tirées des équations précédentes, que l'on substitue pareillement à ρ & à ρ^2 leurs valeurs $\rho = 1 + \frac{1}{2}\Delta^2$, $\rho^2 = 1 + \Delta^2$, & que l'on réduise en série la fraction $\frac{\rho}{\rho^2 - \Delta^2 \sin^2 m'P}$, ou $\frac{1 + \frac{1}{2}\Delta^2}{1 + \Delta^2 - \Delta^2 \sin^2 m'P}$, l'on aura en négligeant les termes infiniment plus petits que les autres.

$$(2)\ d(\text{lat. vraie}) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{P^2}{\sin^2 m'P}\right)\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2 + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \cos(180^d - 2m'P) + \Delta^2 \sin^2 m'P\right)$$
$$\times \frac{3600''}{\theta}\,dK - \operatorname{cotang} m'P\,(1 + \tfrac{1}{2}\Delta^2 - 2\Delta^2 \cos^2 m'P)\,\frac{3600''}{\theta}\,P\,dP$$

Méthode

Méthode pour conclure la longitude.

(71) Si l'on différencie l'équation (2)' du §. 67, l'on aura

$$(1)\ d(\text{longitude corrigée F}) = \frac{\text{cof}^2(\text{longitude corrigée F})}{\text{cof}^2 p \text{ fin } m'\text{P}} dp$$

$$- \frac{\text{cof}^2(\text{longitude corrigée F}) \text{ cotang. } m'\text{P tang } p}{\text{fin } m'\text{P}} dm'\text{P}$$

Je remarque d'abord, qu'à caufe de l'équation (2) du §. 67, l'on a, en réduifant en férie, cof^2 (longitude corrigée F) $= 1 - \frac{\text{tang}^2 p}{\text{fin}^2 m'\text{P}}$; d'où l'on conclura $\frac{\text{cof}^2(\text{longitude corrigée F})}{\text{cof}^2 p} = \frac{1}{\text{cof}^2 p} - \frac{\text{fin}^2 p}{\text{cof}^2 p \text{ fin}^2 m'\text{P}} = 1 - \text{fin}^2 p$ $\text{cotang}^2 m'\text{P}$; & par conféquent, en négligeant les troifiemes puiffances de tang p,

$$(2)\ d(\text{longitude corrigée F}) = \frac{1 - \text{fin}^2 p \text{ cotang}^2 m'\text{P}}{\text{fin } m'\text{P}} dp$$

$$- \frac{\text{tang } p \text{ cotang } m'\text{P}}{\text{fin } m'\text{P}} dm'\text{P}.$$

Nous avons vu (§. 69) que $dm'\text{P} = -d\text{K}(1 - \frac{1}{4}\Delta^2(1 - \text{cof}(180^d - 2m'\text{P})))$; & que $dp = (1 - \frac{1}{2}\Delta^2 \text{ cof}^2 m'\text{P})d\text{P}$. Donc fi l'on fubftitue à fin p fa valeur $p - \frac{1}{6}p^3$; à tang p fa valeur $p + \frac{1}{3}p^3$; à p fa valeur $\text{P}(1 - \frac{1}{2}\Delta^2$ $\text{cof}^2 m'\text{P})$; & que l'on néglige les puiffances de P & de Δ fupérieures aux fecondes puiffances ; l'on aura

$$(3)\ d\ (\text{longitude corrigée F}) = \frac{1 - \text{P}^2 \text{ cotang}^2 m'\text{P}}{\text{fin } m'\text{P}}(1 - \frac{1}{2}\Delta^2 \text{ cof}^2 m'\text{P})d\text{P}$$

$$+ \frac{\text{cotang } m'\text{P}}{\text{fin } m'\text{P}}(1 - \frac{1}{4}\Delta^2(1 - \text{cof}(180^d - 2m'\text{P})) - \frac{1}{2}\Delta^2 \text{cof}^2 m'\text{P})\text{P } d\text{K}.$$

Comme d longitude vraie $= d$ longitude corrigée $- \frac{1}{2}\Delta^2 \text{ fin } m'\text{P } d\text{P}$, fi l'on fubftitue à d longitude corrigée fa valeur tirée de l'équation précédente, & que l'on veuille d'ailleurs que dP & dK foient exprimés en toifes, que de plus d longitude vraie foit exprimée en fecondes de tems, l'on aura

$$(4)\ d(\text{longitude vraie}) = \frac{1 - \text{P}^2 \text{ cotang}^2 m'\text{P}}{\text{fin } m'\text{P}}(1 - \frac{1}{2}\Delta^2)\frac{240''}{t} d\text{P}$$

$$+ \frac{\text{cotang } m'\text{P}}{\text{fin } m'\text{P}}(1 - \frac{1}{4}\Delta^2(1 - \text{cof}(180^d - 2m'\text{P})) - \frac{1}{2}\Delta^2 \text{cof}^2 m'\text{P})\text{P}\frac{240''}{t} d\text{K}.$$

(72) Dans les expreffions précédentes P exprime la perpendiculaire vraie. Lorfque l'on calcule, l'on connoît uniquement le nombre de toifes que renferme P ; il faut donc, pour faciliter l'ufage des formules, que P puiffe être exprimé en toifes ; rien n'eft plus facile que cette évaluation. En effet, puifque l'arc P eft divifé par le rayon de la fphere infcrite, P pourra être exprimé en toifes, pourvu que cette

quantité soit divisée par le nombre de toises que contient lerayon de la sphere inscrite. Nous avons vu que θ est le nombre de toisesque contient un arc d'un dégré de la sphere inscrite; cette quantité est (§. 30) de

56837 toises, si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178;
56884 toises, si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230;
56987 toises, si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 320 à 321;
57074 toises, si l'on suppose les axes de la Terre dans le rapport de 1 à 1.

Donc le rayon de la sphere inscrite $= \frac{206265\,\theta}{3600} = 57{,}2958\,\theta$; on aura donc, en entendant par

T le nombre de toises que contient P;

$$(1)\quad P = 0{,}017453\,\frac{T}{\theta}.$$

Et si d'ailleurs dans les petits termes multipliés par P^2, l'on suppose $\theta = 57000$ toises, l'on aura $P^2 = 0{,}0000000000000938\ T^2$.

Application des principes précédens.

(73) Supposons maintenant que l'on veuille conclure la latitude & la longitude d'un lieu F, de la latitude connue d'un autre lieu voisin, A; soit

T la distance en toises du lieu A au méridien d'un lieu M, prise sur la perpendiculaire à la méridienne du lieu M;
T' la distance en toises du lieu A au lieu M, prise sur la méridienne du lieu M;
dT la différence des distances en toises des lieux A & F au méridien du lieu M, prises sur les perpendiculaires à la méridienne du lieu M;
dT' la différence des distances en toises des lieux A & F, au lieu M, prises sur la méridienne du lieu M.

L'on aura, en substituant dans les équations (2) & (4) du §. 70 & 71, dT à dP, dT' à dK, & à P & à P^2 leurs valeurs tirées du paragraphe précédent,

(1) Latitude du lieu F = latitude du lieu A

$$- \text{cotang}\, m'P \left(1 + \tfrac{1}{2}\Delta^2 - 2\Delta^2 \text{cos}^2 m'P\right) \frac{62'',8318\ T\,dT}{\theta^2}$$
$$+ \left(1 - \frac{0{,}0000000000000938\ T^2}{2\,\text{sin}^2\, m'P}\right)\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2 + \tfrac{1}{4}\Delta^2 \text{cos}\,(180^d - 2m'P)\right.$$
$$\left. + \Delta^2 \text{sin}^2\, m'P\right) \frac{3600''\,dT'}{\theta};$$

(2) Longitude du lieu F = longitude du lieu A

$$+ \frac{\text{cotang}\, m'P}{\text{sin}\, m'P}\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\left(1 - \text{cos}(180^d - 2m'P)\right) - \tfrac{1}{2}\Delta^2 \text{cos}^2 m'P\right) \times \frac{4'',18883\,T\,dT'}{\theta^2}$$
$$+ 1 - \frac{(\text{cotang}^2\, m'P \times 0{,}0000000000000938\ T^2)}{\text{sin}\, m'P}\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{240''\,dT}{\theta}.$$

(74) Dans nos latitudes de France, l'angle m'P est toujours d'environ 45^d; l'on pourra donc, dans les petits termes, supposer cotang. $m'P = 1$;

$\text{cos}^2\, m'P = \frac{1}{2}$; $\text{sin}^2\, m'P = \frac{1}{2}$; $\text{cos}\,(180^d - 2\, m'P) = 0$; les équations précédentes deviendront par ces ſuppoſitions, en ſuppoſant d'ailleurs

$\alpha = 0{,}0000000000000938\ T^2$,

(1) Latitude du lieu F = latitude du lieu A

$$-\text{cotang}\, m'P\left(1-\tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{62{,}''8318\ T\,dT}{\theta^2}+(1-\alpha)\left(1-\tfrac{1}{4}\Delta^2\right)\frac{3600''\ dT'}{\theta};$$

(2) longitude du lieu F = longitude du lieu A

$$+\frac{\text{cotang}\, m'P}{\text{sin}\, m'P}\left(1-\tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{4'',18883\ T\,dT'}{\theta^2}+\frac{(1-\alpha)}{\text{sin}\, m'P}\left(1-\tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{240''\,dT}{\theta}.$$

Nous remarquerons ici que

- dT' eſt poſitif, ſi la diſtance en toiſes du lieu F au lieu M, priſe ſur le méridien du lieu M, eſt plus grande en remontant vers le Nord, que la diſtance du lieu A au même lieu M; dT' eſt négatif dans le cas contraire;
- dT eſt poſitif, lorſque la diſtance du lieu F priſe ſur la perpendiculaire à la méridienne du lieu M, eſt plus grande que la diſtance du lieu A priſe pareillement ſur la perpendiculaire à la méridienne du lieu M; dT eſt négatif dans le cas contraire.

Pour faciliter l'uſage des formules précédentes, l'on n'oubliera pas que l'on a

$\text{Log}\ 0{,}0000000000000938 = 6{\cdot}9721042.$

	177 à 178,	229 à 230,	320 à 321,	1 à 1,
$\text{Log}\,\frac{(1-\frac{1}{2}\Delta^2)\,62'',8318}{\theta^2}$ =	2·2864493....	2·2862868....	2·2858667....	2·2853030.
$\text{Log}\,(1-\frac{1}{4}\Delta^2)\,\frac{3600''}{\theta}$ =	8·8004397....	8·8003572....	8·8001464....	8·7998642.
$\text{Log}\,(1-\frac{1}{2}\Delta^2)\,\frac{4'',18883}{\theta^2}$ =	1·1103610....	1·1101985....	1·1097784....	1·1092146.
$\text{Log}\,(1-\frac{1}{2}\Delta^2)\,\frac{240''}{\theta}$ =	7·6231114....	7·6233086....	7·6233697....	7·6237729.

ARTICLE X.

De la figure des perpendiculaires ſur le ſphéroïde.

(75) Quoique la figure que forment les perpendiculaires ſur le ſphéroïde, ſoit indifférente aux queſtions que nous nous ſommes propoſées, j'ai cru cependant que l'on verroit avec plaiſir, avec quelle facilité cette figure peut ſe déterminer, au moyen des équations que nous avons démontrées.

Pour y parvenir, on ſe rappellera que l'on a (§. 60) l'équation ſuivante,

(1) longitude vraie = longitude corrigée $-\frac{1}{2}\Delta^2$ ſin $m'P$ × perpendiculaire corrigée.

De plus, la perpendiculaire corrigée eſt un grand cercle de la ſphere inſcrite.

De cette derniere conſidération, il ſuit que lorſque la perpendicu-

laire corrigée est de 90^d, la longitude corrigée est de 90^d. Lorsque la perpendiculaire corrigée est de 180^d, la longitude corrigée est de 180^d. Cette longitude est de 270^d & de 360^d, lorsque la perpendiculaire est de 270^d & de 360^d, & ainsi de suite ; puisque la propriété de tout grand cercle de la sphere, est de couper l'équateur, à 90^d de longitude de son sommet, & d'avoir son autre sommet, à 180^d de distance en longitude de son premier sommet, sous une même latitude, mais de dénomination contraire, & ainsi de suite. Mais à mesure que la perpendiculaire corrigée augmente, la longitude vraie differe de plus en plus de la longitude corrigée. Lorsque la perpendiculaire corrigée est de 90^d, de 180^d, de 270^d, de 360^d, & ainsi de suite, la différence est de $\frac{1}{2}\Delta^2 \cdot \sin m'P \times 90^d$, $\frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times 180^d$, &c. Et si l'on continue la perpendiculaire, la différence entre les longitudes vraies & les longitudes corrigées augmente toujours de plus en plus ; de sorte qu'à chaque révolution la différence augmente de $\frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times 360^d$. Si donc l'on nomme

n le nombre des révolutions completes de la perpendiculaire corrigée ;

on aura pour expression des longitudes vraies correspondantes aux intersections successives de la perpendiculaire avec l'équateur,

(1) longitude vraie $= 90^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times 90^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times n\,360^d$.

(2) longitude vraie $= 270^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times 270^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times n\,360^d$.

On aura pareillement pour expression des longitudes vraies correspondantes aux sommets successifs de la perpendiculaire,

(3) longitude vraie $= 0^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times n\,360^d$;

(4) longitude vraie $= 180^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times 180^d - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times n\,360^d$.

On voit par là que s'il étoit possible de continuer indéfiniment une perpendiculaire à la méridienne sur un sphéroïde, & que, par exemple, $\frac{1}{2}\Delta^2 \sin m'P \times 90^d$ fût égal à $15'$, cette perpendiculaire rencontreroit l'équateur sous une longitude de $89^d\ 45'$ comptée du point de départ ; elle s'enfonceroit ensuite dans l'hémisphere opposé où elle auroit son sommet, sous une latitude égale à celle du point de départ, avec une longitude de $179^d\ 30'$; elle regagneroit l'équateur qu'elle couperoit avec une longitude de $269^d\ 15'$; elle remonteroit enfin dans l'hémisphere d'où elle est partie, où elle auroit son sommet sous une latitude égale à celle du point du départ, mais avec une longitude de 359^d ; de sorte qu'après cette premiere révolution, la longitude des deux sommets différeroit de 1^d. Et si l'on continuoit cette perpendiculaire, on auroit une suite de points qui sous chaque même latitude, auroient une longitude différente de 1^d de la longitude des points correspondants de la révolution précédente. Cette perpendiculaire formeroit une espece de spirale ; & l'on ne retomberoit sur la premiere perpendiculaire, que lorsque le terme $n\,360^d$ qui exprime la différence des longitudes vraies & corrigées pour un nombre n de révolutions, seroit un multiple de 360^d.

ARTICLE XI.

Application des latitudes corrigées aux loxodromiques tracées ſur le ſphéroïde.

(76) Nous avons donné dans le paragraphe 17, l'équation aux loxodromiques tracéesſur le ſphéroïde. Nous avons développé dans les paragraphes ſuivans, les principales queſtions que l'on a coutume de ſe propoſer relativement aux loxodromiques en général, & nous avons réſolu ces queſtions pour le cas particulier de la ſphere. Nous nous propoſons de réſoudre les mêmes queſtions pour les loxodromiques elliptiques ; ces ſolutions exigent le développement de quelques propriétés préliminaires.

Du rapport entre le périmetre de la loxodromique elliptique & le périmetre de la loxodromique correſpondante de la ſphere inſcrite.

(77) Soit

X l'abſciſſe, Y l'ordonnée { aux différens points de l'ellipſe dont la révolution engendre le ſphéroïde ;

X l'abſciſſe, y l'ordonnée { aux points correſpondans du cercle dont la révolution engendre la ſphere inſcrite ;

1 le demi-petit axe de la Terre, & à la fois le ſinus total ;

ρ le demi-grand axe de la Terre ;

u l'angle des différens méridiens du ſphéroïde, avec un premier méridien donné de poſition ;

v l'angle des méridiens de la ſphere inſcrite, qui ſont rencontrés par la loxodromique tracée ſur la ſphere, ſous les latitudes corrigées correſpondantes aux latitudes vraies de la loxodromique elliptique, avec le même premier méridien donné de poſition ;

D l'angle de la loxodromique elliptique avec les différens méridiens qu'elle coupe ſucceſſivement ;

P le périmetre de la loxodromique ſur le ſphéroïde ;

p le périmetre correſpondant de la loxodromique ſur la ſphere.

Nous avons vu que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\quad dP = \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)}\,;$$

$$(2)\quad \sin D \sqrt{(Y^2 du^2 + dX^2 + dY^2)} - Y\,du = 0\,;$$

$$(3)\quad dp = \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)}\,;$$

$$(4)\quad \sin D \sqrt{(y^2 dv^2 + dX^2 + dy^2)} - y\,dv = 0\,;$$

d'où l'on tire

$$(5)\quad du = \frac{\operatorname{tang} D \sqrt{(dX^2 + dY^2)}}{Y},$$

$$(6)\quad dP = \frac{1}{\operatorname{cof} D} \sqrt{(dX^2 + dY^2)},$$

$$(7)\quad dv = \operatorname{tang} D \frac{\sqrt{(dX^2 + dy^2)}}{y},$$

$$(8)\quad dp = \frac{1}{\operatorname{cof} D} \sqrt{(dX + dy^2)}.$$

L'on a d'ailleurs

$(9)\ \rho^2 X^2 + Y^2 - \rho^2 = 0;$ $(10)\ \rho^2 X dX + Y dY = 0;$

$(11)\ \Delta^2 = \rho^2 - 1;$ $(12)\ X^2 + y^2 - 1 = 0;$

$(13)\ X dX + y dy = 0;$ $(14)\ \rho y - Y = 0;$

$(15)\ \rho dy - dY = 0;\ dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)}.$

(78) Nous venons de voir que

$$(1)\ dP = \frac{1}{\operatorname{cof} D}\sqrt{(dX^2 + dY^2)},$$

$$(2)\ dp = \frac{1}{\operatorname{cof} D}\sqrt{(dX^2 + dy^2)} = \frac{1}{\operatorname{cof} D}\,dk.$$

Mais $dY^2 = dy^2 + \Delta^2 dy^2$; l'équation (1) peut donc avoir la forme suivante,

$$(3)\ dP = \frac{1}{\operatorname{cof} D}\sqrt{(dk^2 + \Delta^2 dy^2)}.$$

Je réduis cette derniere équation en férie, en négligeant les termes de l'ordre Δ^4 ; & j'ai

$$(4)\ dP = \frac{1}{\operatorname{cof} D}\left(dk + \tfrac{1}{2}\Delta^2\frac{dy^2}{dk}\right).$$

Mais $\frac{1}{\operatorname{cof} D}\,dk = dp$; $\frac{dy}{dk} = -X$, & $dy = \frac{-X dX}{\sqrt{(1 - X^2)}}$; donc

$$(5)\ P + \text{conftante} = p + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\operatorname{cof} D}\int\frac{X^2 dX}{\sqrt{(1 - X^2)}}.$$

Nous avons vu (5. 27) que fi l'on entend par

X' l'arc dont X eft le finus,

$\int\frac{X^2 dX}{\sqrt{(1 - X^2)}} = \tfrac{1}{2}X' - \tfrac{1}{4}\operatorname{fin} 2X'$; de plus P & p font à la fois égaux à zéro au point de départ, c'eft-à-dire lorfque X' = latitude corrigée du point de départ.

Si donc l'on nomme

a la latitude corrigée du point de départ ;
X' la latitude corrigée du point d'arrivée,

& que l'on fuppofe d'ailleurs

$$(6)\ k = X' - a = \text{chemin en latitude fur la fphere infcrite},$$

on aura, attendu que $-\tfrac{1}{2}(\operatorname{fin} 2X' - \operatorname{fin} 2a) = -\operatorname{cof}(X' + a)\operatorname{fin}(X' - a) = -\operatorname{cof}(2a + k)\operatorname{fin} k$,

$$(7)\ P = p + \tfrac{1}{4}\frac{\Delta^2}{\operatorname{cof} D}(k - \operatorname{cof}(2a + k)\operatorname{fin} k);$$

Mais éq. (2) $k = p\operatorname{cof} D$; donc

$$(8)\ P = p + \tfrac{1}{4}\frac{\Delta^2}{\operatorname{cof} D}(p\operatorname{cof} D - \operatorname{cof}(2a + p\operatorname{cof} D)\operatorname{fin}(p\operatorname{cof} D)).$$

Comme les quantités P & p ne diffèrent que par des termes de l'ordre Δ^2, l'équation ſuivante ſera exacte, aux termes près de l'ordre Δ^4.

$$(9)\ P - p - \tfrac{1}{4}\frac{\Delta^2}{\cos D}(P \cos D - \cos(2a + P\cos D)\sin(P\cos D)) = 0.$$

Du rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie.

(79) Il eſt facile de déterminer le rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie; nous avons vu en effet, que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\ du = \operatorname{tang} D \frac{\sqrt{(dX^2 + dY^2)}}{Y},$$

$$(2)\ dv = \operatorname{tang} D \frac{\sqrt{(dX^2 + dy^2)}}{y}.$$

On ſait de plus que $Y = \rho y$, que $dY^2 = \rho^2 dy^2$; & que $\rho^2 = 1 + \Delta^2$; que par conſéquent $\sqrt{(dX^2 + \rho^2 dy^2)} = \sqrt{(\rho^2 dX^2 - \Delta^2 dX^2 + \rho^2 dy^2)} = \rho\sqrt{(dX^2 + dy^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^2} dX^2)}$; donc puiſque d'ailleurs $dk = \sqrt{(dX^2 + dy^2)}$, l'on a

$$(3)\ du = \operatorname{tang} D \frac{\sqrt{\left(dk^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^2} dX^2\right)}}{y}.$$

Donc en réduiſant en ſérie, & négligeant les termes de l'ordre Δ^4,

$$(4)\ du = \operatorname{tang} D \left(\frac{dk}{y} - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{dX^2}{y\,dk}\right).$$

Mais (eq. (2)) $\operatorname{tang} D \times \frac{dk}{y} = dv$; de plus $\frac{dX^2}{y\,dk} = dX$; donc en intégrant

$$(5)\ u + \text{conſtante} = v - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2} X \operatorname{tang} D.$$

Mais u & v ſont à la fois égaux à zéro, lorſque $X = \sin a$; donc conſtante $= -\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2} \operatorname{tang} D \sin a$; donc

$$(6)\ u = v - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2} \operatorname{tang} D (\sin X' - \sin a).$$

Mais $\sin X' - \sin a = 2\cos(\frac{1}{2}X' + \frac{1}{2}a)\sin(\frac{1}{2}X' - \frac{1}{2}a) = 2\cos\left(a + \frac{k}{2}\right)\sin\frac{k}{2}$; d'ailleurs $k = p \cos D$; donc en ſuppoſant $\rho^2 = 1$, dans le petit terme multiplié par $\frac{\Delta^2}{\rho}$, & en confondant dans le même petit terme p avec P

$$(7)\ u = v - \Delta^2 \operatorname{tang} D \cos(a + \tfrac{1}{2} P \cos D) \sin(\tfrac{1}{2} P \cos D).$$

Usage des équations précédentes.

(80) L'usage des formules précédentes est très-simple. Supposons en effet que l'on connoisse la latitude vraie du point de départ, ainsi que l'angle D de la route avec les méridiens, & le chemin P du vaisseau, on connoîtra la latitude corrigée du lieu de départ ; & l'on réduira en dégrés, minutes & secondes le chemin P du vaisseau, au moyen de l'équation (4) du §. 44. On aura donc tous les élémens nécessaires pour déterminer p au moyen de l'équation (9) du §. 78. On conclura alors la latitude corrigée du lieu d'arrivée par l'équation (4) du §. 19 ; d'où l'on conclura la latitude vraie du même lieu d'arrivée. On aura ensuite la longitude corrigée du lieu d'arrivée par l'équation (7) du §. 18 ; on conclura enfin la longitude vraie, au moyen de l'équation (7) du §. précédent.

Dans l'usage de ces formules, on fera sin D, cos D, tang D positifs, lorsque l'on s'avancera vers le pole ; on fera sin D positif, cos D & tang D négatifs, lorsqu'on s'avancera vers l'équateur.

(81) Je ne m'étendrai pas d'avantage sur les loxodromiques elliptiques, dont le calcul rigoureux ne présente aucune utilité vraiment réelle dans la pratique ; il me suffit d'avoir fait voir ce que devient le Problême, en y appliquant la considération des latitudes corrigées. Je remarquerai seulement que dans l'équation (9) du §. 78 le terme $\frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{\cos D}$ $(P\cos D - \cos(2a + P\cos D)\sin(P\cos D))$ pourroit se calculer au moyen de la Table du §. 49. En effet, si l'on compare cette expression avec l'expression $\frac{1}{4}\Delta^2(k - \cos(2l + k)\sin k)$ de l'équation (3) du §. 28; on verra que le coéficient $\frac{1}{4}\Delta^2(P\cos D - \cos(2a + P\cos D)\sin(P\cos D))$ peut être exprimé de la maniere suivante. Soit

γ la différence entre l'arc de l'ellipse & l'arc correspondant du cercle inscrit qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par $90^d - a$;

γ' la différence entre l'arc de l'ellipse, & l'arc correspondant du cercle inscrit qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par $90^d - a - P\cos D$;

L'on a

$$\frac{1}{4}\Delta^2(P\cos D - \cos(2a + P\cos D)\sin(P\cos D)) = \gamma' - \gamma;$$

Et l'équation (9) du §. 78 peut être mise sous la forme qui suit,

$$P = p - \frac{1}{\cos D}(\gamma - \gamma').$$

Pour faire usage de la Table du §. 49, il faudroit qu'elle fût continuée jusqu'à 90^d. Je n'ai pas cru devoir entreprendre ce travail qui m'a paru superflu pour les usages ordinaires.

CHAPITRE

CHAPITRE TROISIEME.

Application des recherches précédentes aux principaux uſages géodéſiques, & particuliérement au calcul de la Carte de France; & examen de quelques propriétés de cette Carte.

JE me propoſe, dans ce chapitre, d'appliquer les recherches précédentes aux principaux uſages géodéſiques, & particuliérement au calcul de la Carte de France. Je réduirai le calcul de la poſition d'un lieu quelconque, à une opération infiniment ſimple; je me flatte que les Aſtronomes me ſauront quelque gré de ce travail. J'ajouterai quelques réflexions ſur le rapport des axes de la Terre qui paroît repréſenter le plus exactement, les poſitions des différens points de la France; j'examinerai enfin quelques propriétés de la Carte de France.

ARTICLE PREMIER.

Application des recherches précédentes aux principales queſtions géodéſiques.

(82) Je vais maintenant appliquer les recherches précédentes aux principales queſtions géodéſiques. Dans ces recherches, j'appellerai conformément à ce qui a été dit ci-deſſus,

Diſtance perpendiculaire du lieu F *à la méridienne du lieu* M, la diſtance FM′ du lieu F à la méridienne du lieu M, comptée ſur la perpendiculaire FM′ à cette méridienne. Fig. 3.

Diſtance du lieu M *au pied de la perpendiculaire du lieu* F, la diſtance MM′ du lieu M, au point M′ où la perpendiculaire menée du lieu F au méridien MM′P, rencontre ce méridien.

Longitude vraie du lieu F, l'angle au Pôle P compris entre les méridiens MP, FP.

Angle de la perpendiculaire avec les méridiens ſucceſſifs qu'elle rencontre, l'angle en F formé ſur le ſphéroïde, par les méridiens PF & par la perpendiculaire M′F.

*Arc m′*P, l'arc de la ſphere inſcrite compris entre le pole P & la projection m′ du point M′, interſection du méridien du lieu M, & de la perpendiculaire à ce méridien.

Perpendiculaire corrigée, l'arc m′F′ de la ſphere inſcrite, qui commence au point m′ projection du point M′, & finit ſur la ſphere inſcrite au point F′ qui a une latitude corrigée correſpondante à celle du point F du ſphéroïde.

Longitude corrigée du lieu F, l'angle au pole P du triangle m′PF′ de la ſphere inſcrite.

Latitude corrigée du lieu F, le complément de l'arc F′P du triangle m′PF′.

Angle de la perpendiculaire corrigée avec les méridiens de la ſphere inſcrite, l'angle en F′ du triangle m′PF′; cet angle eſt égal à l'angle de la perpendiculaire vraie avec les méridiens correſpondans du ſphéroïde.

Premiere Question.

Fig. 3. (83) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante,

Etant données la latitude & la longitude vraie d'un lieu F par rapport à un lieu M dont on connoît la latitude; déterminer 1°. la diſtance MM′ du lieu M, au point M′ où la perpendiculaire FM′ qui paſſe par le lieu F, rencontre le mériiden du lieu M; 2°. la diſtance FM′ meſurée ſur la perpendiculaire FM′.

Pour réſoudre ces queſtions, on commencera par déterminer le côté $m'P$ du triangle $m'PF$, au moyen de l'équation ſuivante,

(1) Tang $m'P$ = cotang. (latit. corr. du lieu F) × coſ (longit. vraie).

L'on aura pareillement

(2) ſin (perpendiculaire corrigée) = coſ (latitude corrigée du lieu F) × ſin (longitude vraie du lieu F).

Et quoique ces valeurs ne ſoient exactes qu'aux termes près de l'ordre Δ^2, puiſque nous avons fait uſage de la longitude vraie du lieu F, au lieu de la longitude corrigée que nous aurions dû employer, comme cependant nous nous propoſons d'abord de n'en faire uſage que dans un terme qui eſt lui-même multiplié par Δ^2 (§. 60 éq. (2)) l'on aura exactement l'expreſſion de la longitude corrigée, au moyen de l'équation (2) du §. 60.

Maintenant dans le triangle $m'PF'$, nous connoiſſons exactement le côté PF′ complément de la latitude corrigée du lieu F, & l'angle $m'PF'$ que nous venons de déterminer; on aura donc rigoureuſement l'arc $m'P$, & la perpendiculaire corrigée $m'F'$, au moyen des équations

(3) tang. $m'P$ = cotang (latitude corrigée du lieu F) × coſin (longitude corrigée F)

(4) ſin (perpendiculaire corrigée) = coſ (latitude corrigée du lieu F) ſin (longitude corrigée F).

On conclura enſuite la perpendiculaire vraie, au moyen de l'équation (4) du §. 49; on réduira enfin cette perpendiculaire vraie en toiſes, au moyen de l'équation (4) du §. 44; on connoîtra donc la diſtance FM′ meſurée ſur la perpendiculaire.

Maintenant de la valeur de $m'P$, l'on conclura k au moyen de l'équation (1) du §. 31; on conclura K au moyen de l'équation (3) du §. 28; on réduira K en toiſes, au moyen de l'équation (1) du §. 32; & l'on connoîtra la diſtance du lieu M au point M′ en toiſes.

Si l'on ſuppoſoit que le lieu M fût l'Obſervatoire de Paris, la Table du §. 35 donneroit tout de ſuite la ſolution de cette partie du Problême.

SECONDE QUESTION.

(84) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante.

Etant donnés la latitude vraie du lieu F, *& l'angle que fait la perpendiculaire à la méridienne, avec le méridien du lieu* F; *déterminer* 1°. *la diſtance* M M′ *du lieu* M *dont la latitude eſt pareillement ſuppoſée connue, au point* M′ *où la perpendiculaire* F M′ *rencontre ce méridien;* 2°. *la longueur de la perpendiculaire* F M′ *ſur le ſphéroïde;* 3°. *la longitude du lieu* F *par rapport au lieu* M. Fig. 3.

Pour réſoudre cette queſtion, on commencera par déterminer l'arc $m'P$ du triangle $m'PF'$ de la ſphere inſcrite, en obſervant que le côté PF' eſt le complément de la latitude corrigée du lieu F, & que l'angle $m'F'P$ eſt égal à l'angle de la perpendiculaire à la méridienne, avec le méridien du lieu F ſur le ſphéroïde; on aura donc

(1) $\sin m'P = \sin$ (angle de la perpendiculaire avec le méridien du lieu F) cof (latitude corrigée du lieu F).

Ou conclura k, au moyen de l'équation (1) du §. 31; on conclura K au moyen de l'équation (3) du §. 28; on réduira K en toiſes, au moyen de l'équation (1) du §. 32, & l'on connoîtra la diſtance M M′ du lieu M au point M′. Et ſi l'on ſuppoſoit que le lieu M fût l'Obſervatoire de Paris, la Table du §. 35 donneroit tout de ſuite la ſolution de cette partie du Problême.

Dans le triangle $m'PF'$, on conclura le côté $m'F'$, ou la perpendiculaire corrigée p qui lui eſt égale, au moyen de l'équation

$$(2)\quad \cos p = \frac{\sin\ (\text{latitude corrigée du lieu F})}{\cos m'P}.$$

On conclura la perpendiculaire vraie P, au moyen de l'équation (4) du §. 49; on réduira cette perpendiculaire en toiſes, au moyen de l'équation (4) du §. 44; on connoîtra donc la longueur de la perpendiculaire F M′ ſur le ſphéroïde.

Dans le triangle $m'PF'$ on conclura la longitude corrigée du lieu F, au moyen de l'équation

$$(3)\quad \sin\ (\text{longitude corrigée du lieu F}) = \frac{\sin\ (\text{perpendiculaire corrigée})}{\cos\ (\text{latitude corrigée du lieu F})}.$$

On conclura enfin la longitude vraie du lieu F, au moyen de l'équation (1) du §. 60; & la queſtion ſera complétement réſolue.

TROISIEME QUESTION.

(85) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante :

Fig. 3. *Etant donnée la diſtance* MM′ *du lieu* M *dont la latitude eſt connue, au point* M′ *où la perpendiculaire* F M′ *paſſant par un lieu* F, *rencontre le méridien du lieu* M, *ainſi que la longueur* F M′ *de la perpendiculaire* F M′ *ſur le ſphéroïde ; déterminer la latitude du lieu* F, *& ſa longitude par rapport au lieu* M.

Nous remarquerons que le cas dont il s'agit, eſt de l'uſage le plus général ; c'eſt par lui que l'on peut calculer les latitudes & les longitudes des différens points de la Carte de France, d'après les opérations géodéſiques de Meſſieurs Caſſini.

Puiſque l'on connoît le nombre T de toiſes que contient MM′, on conclura la valeur de K, au moyen de l'équation (1) du §. 32 ; on conclura la valeur de k, au moyen de l'équation (3) du §. 28 ; & enfin la valeur de m'P, au moyen de l'équation (1) du §. 31 ; ou plutôt l'on fera uſage de la Table du §. 35, ſi l'on ſuppoſe que le lieu M eſt l'Obſervatoire de Paris.

On réduira en dégrés la perpendiculaire F M′ au moyen de l'équation (4) du §. 44, & l'on conclura la valeur de p, au moyen de l'équation (1) du §. 49. On calculera enſuite la latitude corrigée du lieu F, ainſi que la longitude corrigée, au moyen des équations

(1) ſin (latitude corrigée du lieu F) $=$ coſ m'P coſ p,

(2) tang (longitude corrigée du lieu F) $= \frac{\text{tang } p}{\text{ſin } m'\text{P}}$

On ramenera la latitude corrigée du lieu F à la latitude vraie, au moyen de l'équation

(3) tang (latitude vraie) $= \rho$ tang (latitude corrigée),

ou, ſi l'on veut, l'on fera uſage des Tables du §. 25. On conclura enfin la longitude vraie, au moyen de l'équation (2) du §. 60 ; & le Problême ſera complétement réſolu.

Si l'on vouloit de plus connoître l'angle de la perpendiculaire à la méridienne, avec le méridien du lieu F, on le détermineroit au moyen de l'équation ſuivante

(4) ſin (angle de la perpendiculaire avec le méridien du lieu F)

$$= \frac{\text{ſin } m'\text{P}}{\text{coſ (latitude corrigée du lieu F)}}.$$

Comme la queſtion préſente eſt du plus grand uſage, je vais donner le type du calcul ; je l'appliquerai à la détermination de la poſition de Breſt.

Exemple.

(86) On demande la longitude & la latitude de Breſt, en ſuppoſant ce lieu ſitué à la diſtance de 259168 toiſes de la méridienne de Paris, priſes ſur une perpendiculaire qui rencontre cette méridienne, à la diſtance de 14614 toiſes du côté du midi; on ſuppoſe de plus que les axes de la Terre ſont dans le rapport de 320 à 321.

Solution. J'obſerve d'abord (§. 35) que la valeur de $m'P$ correſpondante à la diſtance de 10000 toiſes du côté du Midi, eſt de $41^d\ 25'\ 37''$; j'ajoute à cette quantité, la variation de $m'P$ pour 4614 toiſes, & que l'on trouve par la proportion ſuivante, 10000 : 631,2 :: 4614 : 291; j'ai donc 291″ pour cette variation, & je conclus la valeur de $m'P$. Au moyen de l'équation (4) du §. 44, je réduis la perpendiculaire vraie en ſecondes de dégrés; je cherche (§. 35) la valeur de γ correſpondante; & au moyen de l'équation (4) du §. 49, je conclus la valeur de p. Je détermine la latitude corrigée de Breſt, au moyen de l'équation (1) du paragraphe précédent, j'ajoute à cette latitude la différence entre la latitude vraie & la latitude corrigée donnée par les Tables du §. 25, & j'ai la latitude vraie de Breſt. Je détermine la longitude corrigée, au moyen de l'équation (2) du paragraphe précédent; je conclus enfin la longitude vraie, au moyen de l'équation (2) du §. 60.

Type du Calcul.

Détermination de $m'P$

2·8001670.... log 631″,2
3·6640776.... log 4614 toiſes
6·0000000... compl. log 10000.

2·4642446.... log 291″

$$m'P = \begin{cases} 41^d\ 25'\ 37'' \\ +\quad 4\ 51 \\ \hline 41\ \ 30\ \ 28 \end{cases}$$

Détermination de la perpendiculaire corrigée.

5·4135813... log 259168 toiſes
8·8008316... log $\frac{3600''}{6}$

4·2144129... log 16384″

$$P = 4^d\ 33'\ 4''$$

1·7348377... log γ
9·7488006... $\text{coſ}^2\ m'P$

1·4836383... log 30″,2

$$p = 4^d\ 33'\ 4'' - 30'', = 4^d\ 32'\ 34''.$$

Détermination de la latitude.

9·8744060.... log coſ $m'P$
9·9986333.... log coſ p

9·8730393.... log ſin latit. cor.

$$\text{Latit. vraie} = \begin{cases} 48^d\ 17'\ 20'' \\ +\quad 5\ 19 \\ \hline 48\ \ 22\ \ 39 \end{cases}$$

Détermination de la longitude.

8·9001300... log tang p
0·1786700... compl. log ſin $m'P$

9·0788000.. log tang longit. cor.

$$\text{longit. vraie} = \begin{cases} 6^d\ 50'\ 13'' \\ -\quad\quad 34 \\ \hline 6\ \ 49\ \ 39 \end{cases}$$

4·2144129... log p
9·8213300... log ſin $m'P$
7·4985862... log $\frac{1}{2}\Delta^2$

1·5343291... log. 34″

Longitude vraie en tems $= 0^h\ 27'\ 19''$.

QUATRIEME QUESTION.

(87) On peut encore se proposer la question suivante :

Fig. 4. *Etant données la latitude vraie de deux lieux M′, F, & leur différence en longitude, déterminer en toises la distance de ces deux lieux, sur le sphéroïde.*

Pour résoudre cette question, on se rappellera que l'on a l'équation suivante (§. 62),

(1) longitude corrigée $=$ longitude vraie $+ \frac{1}{2} \Delta^2$ sin m'P sin D perpendiculaire corrigée.

Dans cette équation, m'P est le complément de la latitude corrigée du lieu M′. Quant à l'angle D, c'est l'angle de la perpendiculaire vraie avec le méridien du lieu M′ ; & cet angle est égal à l'angle de la perpendiculaire corrigée, avec le grand cercle de la sphere inscrite, projection du méridien du lieu M′. De plus la perpendiculaire corrigée n'est autre chose que l'arc de grand cercle qui joint les points m', F′. Il est évident que dans le triangle sphérique m'PF′, le côté m'P est le complément de la latitude corrigée du lieu M′ ; le côté PF′ est le complément de la latitude corrigée du lieu F, & l'angle m'PF′ est la différence en longitude corrigée de ces deux lieux. Si donc l'on prend pour l'angle m'PF′, la longitude vraie, l'on aura des expressions de l'angle D & du côté m'F′, qui ne différeront des véritables valeurs, que par des termes de l'ordre Δ^2 ; & comme ces quantités (éq. (1)) entrent dans un terme multiplié par Δ^2, on conclura de l'équation (1) une valeur de la longitude corrigée du lieu F par rapport au lieu M′, qui sera exacte aux termes près de l'ordre Δ^4. On recommencera le calcul en employant le véritable angle m'PF′ du triangle sphérique m'PF′, c'est-à-dire, la longitude corrigée du lieu F, & l'on aura la vraie valeur de l'angle D, ainsi que celle de la perpendiculaire corrigée m'F′. Voici au surplus les équations dont on fera usage pour parvenir aux résultats dont il vient d'être question, & que l'on démontre par la Trigonométrie sphérique.

$$(2)\quad \text{Tang}\left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}PF'm'\right) = \frac{\text{cotang}\left(\tfrac{1}{2}\text{ longitude}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\text{latitude corrigée M}' - \text{latit. corrigée F})}{\text{cos}\,\tfrac{1}{2}(\text{latitude corrigée M}' + \text{latitude corrigée F})}.$$

$$(3)\quad \text{tang}\left(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}PF'm'\right) = \frac{\text{cotang}\left(\tfrac{1}{2}\text{ longitude}\right)\cos\tfrac{1}{2}(\text{latitude corrigée M}' - \text{latit. corrigée F})}{\sin\tfrac{1}{2}(\text{latitude corrigée M}' + \text{latitude corrigée F})}.$$

Au moyen de ces deux équations, on conclura l'angle D ; on aura ensuite la perpendiculaire corrigée au moyen de l'équation suivante

$$(4)\quad \sin(\text{perpendiculaire corrigée}) = \frac{\sin(\text{longit. corr. F}) \times (\cos\text{ latit. corr. F})}{\sin D}.$$

Nous connoissons maintenant le véritable angle D, & la véritable perpendiculaire corrigée ; nous pouvons donc déterminer la valeur de μ'P,

c'eſt-à-dire le complément de la latitude du ſommet de la perpendiculaire corrigée, au moyen de l'équation Fig. 4.

$$(5)\ \sin \mu' P = \sin m' P \times \sin D,$$

en remarquant que $m' P$ qui entre dans l'expreſſion de $\sin \mu' P$, eſt le complément de la latitude corrigée du lieu M'. On déterminera pareillement l'angle a (§. 55) au moyen de l'équation

$$(6)\ \sin a = \frac{\cos m' P}{\cos \mu' P}.$$

L'on déterminera enfin la perpendiculaire vraie, au moyen de l'équation (1) du §. 58 ; l'on réduira cette perpendiculaire en toiſes, au moyen de l'équation (4) du §. 49 ; & la queſtion ſera réſolue complétement.

ARTICLE II.

Application des théories précédentes, au calcul de la Carte de France.

(88) Je me propoſe dans cet article, d'appliquer particuliérement les théories précédentes au calcul de la Carte de France ; cette application exige quelques réflexions préliminaires.

Nous avons vu (§. 74) que pour conclure la longitude & la latitude d'un lieu F quelconque, de la longitude & de la latitude connues d'un lieu A, on avoit pour nos latitudes de France, les équations ſuivantes :

$$(1)\ \text{latitude du lieu F} = \text{longitude du lieu A} - \text{cotang. } m'P\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{62'',8318\ T\,dT}{\theta^2} + (1 - 0{,}000000000000938\ T^2)\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\right)\frac{3600''\,dT'}{\theta};$$

$$(2)\ \text{longitude du lieu F} = \text{longitude du lieu A} + \frac{\text{cotang. } m'P}{\sin m'P}\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{4'',18883\ T\,dT'}{\theta^2} + \frac{(1 - 0{,}000000000000938\ T^2)}{\sin m'P}\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{240''\,dT}{\theta}.$$

(89) Je remarque d'abord que ſi dans l'équation (2), l'on ſuppoſe le lieu A ſitué ſous le méridien de Paris, l'on aura longitude $A = 0^d\ 0'\ 0''$, & la longitude du lieu F ſera comptée du méridien de Paris. Je vois de plus que dans les équations (1) & (2), je puis intégrer les différens membres de ces équations, en regardant T' comme conſtant, lorſque j'integre par rapport à dT ; & T comme conſtant lorſque, j'integre par rapport à dT' ; j'aurai alors, en appellant

α la petite quantité $0{,}000000000000938\ T^2$;

$$(1)\ \text{latitude du lieu F} = \text{latitude du lieu A} - \text{cotang. } m'P\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{31'',4159\ T^2}{\theta^2} + (1 - \alpha)\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\right)\frac{3600''\ T'}{\theta}.$$

$$(2)\ \text{longitude du lieu } \dot{F} = \frac{\text{cotang. } m'P}{\text{sin } m'P}\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{4'',18883\ TT'}{\theta^2}$$
$$+ \frac{1 - \frac{1}{3}\alpha}{\text{sin } m'P}\left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{240''\ T}{\theta}.$$

Dans ces équations, l'on entendra par

T la distance en toises du lieu pour lequel on calcule, prise sur la perpendiculaire à la méridienne ;

T' la distance en toises du lieu pour lequel on calcule au lieu A, prise sur la méridienne du lieu A. Cette distance est positive en remontant vers le Nord ; elle est négative en descendant vers le midi.

Les longitudes sont exprimées en tems ; elles sont orientales ou occidentales, suivant le sens de la perpendiculaire que l'on calcule.

Les quantités $m'P$ doivent être évaluées relativement au lieu A.

(90) Dans les équations précédentes, l'on a

$\alpha = 0,0000000000000948\ T^2$;

Log. $0,0000000000000938 = 6\cdot9721042$.

	177 à 178,	229 à 230,	320 à 321,	1 à 1.
$\text{Log}\frac{(1-\frac{1}{2}\Delta^2)\,31'',4159}{\theta^2} =$	1·9854193....	1·9852568....	1·9848367....	1·9842730.
$\text{Log}\,(1-\frac{1}{4}\Delta^2)\frac{3600''}{\theta} =$	8·8004397....	8·8003572....	8·8011464....	8·7998641.
$\text{Log}\,(1-\frac{1}{2}\Delta^2)\frac{4'',18883}{\theta^2} =$	1·1103610....	1·1101985....	1·1097784....	1·1092146.
$\text{Log}\,(1-\frac{1}{2}\Delta^2)\frac{240''}{\theta} =$	7·6231144....	762330 86....	7·6233697....	7·6237729.

Equations aux courbes des longitudes & des latitudes.

(91) Je vais donner maintenant, de 50000 en 50000 toises de distances sur la méridienne de Paris, la latitude des lieux A particuliers correspondans à ces distances, ainsi que les équations relatives aux perpendiculaires passant par ces lieux. Ces équations serviront à résoudre les questions proposées, relativement aux lieux situés sur les perpendiculaires intermédiaires qui ont leurs sommets dans les limites de 25000 toises au Nord ou au midi des perpendiculaires passant par les différens lieux A.

Du côté du Nord.

Distance sur la méridienne. . . . . 140000 *toises*..

177 à 178 { latitude $= 51^d\ 17'\ 25'' - 0'',00000001199\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',00000000255\ TT' + (1 - \frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0066910\ T$;

229 à 230 { latitude $= 51^d\ 17'\ 25'' - 0'',00000001200\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',00000000255\ TT' + (1 - \frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0066976\ T$;

320 à 321 { latitude $= 51^d\ 17'\ 25'' - 0'',0000$[illegible]$01201\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0'',00000000256\ T$[illegible]$ + (1 - \frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0067051\ T$.

1 à 1..... { latitude $= 51^d\ 17'\ 25'' - 0'',00000001203\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',00000000257\ TT' + (1 - \frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0067243\ T$.

Distance

Diſtance ſur la méridienne. . . . . 100000 *toiſes.*

177 à 178 { latitude $= 50^d\ 35'\ 22'' - 0'',00000001170\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000245\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0065912\ T$;

229 à 230 { latitude $= 50^d\ 35'\ 22'' - 0'',00000001171\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000245\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0065940\ T$;

320 à 321 { latitude $= 50^d\ 35'\ 22'' - 0'',00000001172\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000246\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0065951\ T$;

1 à 1..... { latitude $= 50^d\ 35'\ 22'' - 0'',00000001174\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000247\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0066234\ T$.

Diſtance ſur la méridienne. . . . . 50000 *toiſes.*

177 à 178 { latitude $49^d\ 42'\ 49'' - 0'',00000001134\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000234\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0064720\ T$;

229 à 230 { latitude $= 49^d\ 42'\ 49'' - 0'',00000001135\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000235\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0064800\ T$;

320 à 321 { latitude $= 49^d\ 43'\ 49'' - 0'',00000001136\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000236\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0064852\ T$;

1 à 1...... { latitude $= 49^d\ 42'\ 49'' - 0'',00000001138\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000237\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0065033\ T$.

Diſtance ſur la méridienne . . . . 0 *toiſes.*

177 à 178 { latitude $= 48^d\ 50'\ 14'' - 0'',00000001099\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000222\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0063585\ T$;

229 à 230 { latitude $= 48^d\ 50'\ 14'' - 0'',00000001100\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000222\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0''0063660\ T$;

320 à 321 { latitude $= 48^d\ 50'\ 14'' - 0'',00000001101\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000223\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0063715\ T$;

1 à 1..... { latitude $= 48^d\ 50'\ 14'' - 0'',00000001103\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000224\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0063886\ T$.

DU CÔTÉ DU MIDI.

Diſtance ſur la méridienne . . . . 50000 *toiſes*

177 à 178 { latitude $= 47^d\ 57'\ 38'' - 0'',00000001066\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',00000000\ 212\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0062507\ T$;

229 à 230 { latitude $= 47^d\ 57'\ 39'' - 0'',00000001067\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000212\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0062578\ T$;

320 à 321 { latitude $= 47^d\ 57'\ 39'',5 - 0'',00000001068\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0,0000000213\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0062630\ T$;

1 à 1...... { latitude $= 47^d\ 57'\ 41'' - 0'',00000001070\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000214\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0062795\ T$.

Diſtance ſur la méridienne . . . . 100000 *toiſes.*

177 à 178 { latitude $= 47^d\ 5'\ 4'' - 0'',00000001034\ T^2 + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000202\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\ 0'',0061474\ T$;

229 à 230 { latitude $= 47^{d}\ 5'\ 4'',6 - 0'',000000001034\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000202\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0061546\ T$;

320 à 321 { latitude $= 47^{d}\ 5'\ 5'',3 - 0'',000000001035\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000202\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0061598\ T$;

1 à 1..... { latitude $= 47^{d}\ 5'\ 8'' - 0'',000000001037\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000203\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0061758\ T$.

Distance sur la méridienne . . . . 150000 *toises*.

177 à 178 { latitude $= 46^{d}\ 12'\ 28'' - 0'',000000001003\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000193\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0060494\ T$;

229 à 230 { latitude $= 46^{d}\ 12'\ 29'',2 - 0'',000000001003\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000193\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0060561\ T$;

320 à 321 { latitude $= 46^{d}\ 12'\ 30'',5 - 0'',000000001004\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0''06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000193\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0060618\ T$;

1 à 1...... { latitude $= 46^{d}\ 12'\ 33'' - 0''000000001006\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000194\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0060764\ T$.

Distance sur la méridienne. . . . . 200000 *toises*.

177 à 178 { latitude $= 45^{d}\ 19'\ 49'' - 0'',0000000973\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000184\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0059555\ T$;

229 à 230 { latitude $= 45^{d}\ 19'\ 51'' - 0'',0000000973\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000184\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0059618\ T$;

320 à 321 { latitude $= 45^{d}\ 19'\ 54'',0 - 0'',0000000974\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0,06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000184\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0059666\ T$;

1 à 1...... { latitude $= 45^{d}\ 19'\ 59'',0 - 0''0000000976\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000185\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0059818\ T$.

Distance sur la méridienne . . . . 250000 *toises*.

177 à 178 { latitude $= 44^{d}\ 27'\ 11'' - 0'',0000000944\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 8'',0000000176\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0058638\ T$;

229 à 230 { latitude $= 44^{d}\ 27'\ 15'' - 0'',0000000944\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000176\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0058723\ T$;

320 à 321 { latitude $= 44^{d}\ 27'\ 20'' - 0'',0000000945\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $= 0'',0000000176\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0058767\ T$;

1 à 1...... { latitude $= 44^{d}\ 27'\ 26'' - 0,0000000946\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000177\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0058915\ T$.

Distance sur la méridienne . . . . 300000 *toises*.

177 à 178 { latitude $= 43^{d}\ 34'\ 31'',5 - 0'',0000000915\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06316\ T'$;
longitude $= 0'',0000000168\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0057801\ T$;

229 à 230 { latitude $= 43^{d}\ 34'\ 37'' - 0'',0000000916\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06314\ T'$;
longitude $= 0'',0000000168\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0057864\ T$;

320 à 321 { latitude $= 43^{d}\ 34'\ 44'' - 0'',0000000917\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06312\ T'$;
longitude $- 0'',0000000168\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0057909\ T$;

1 à 1...... { latitude $= 43^{d}\ 34'\ 52'' - 0'',0000000918\ T^{2} + (1-\alpha)\ 0'',06308\ T'$;
longitude $= 0'',0000000169\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\ 0'',0058049\ T$.

Diſtance ſur la méridienne . . . . 350000 *toiſes.*

177 à 178 $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,41'\,52'',3 - 0'',0000000887\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06316\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000161\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0''.0056981\ T; \end{cases}$

229 à 230 $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,41'\,59'' - 0'',0000000887\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06314\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000161\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0057042\ T; \end{cases}$

320 à 321 $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,42'\,6'',5 - 0'',0000000888\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06312\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000161\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0057087\ T; \end{cases}$

1 à 1...... $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,42'\,18'' - 0'',0000000890\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06308\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000162\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0057224\ T. \end{cases}$

Diſtance ſur la méridienne . . . . 380000 *toiſes.*

177 à 178 $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,10'\,16'' - 0'',0000000871\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06316\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000156\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0056523\ T; \end{cases}$

229 à 230 $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,10'\,23'' - 0'',0000000872\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06314\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000156\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0056566\ T; \end{cases}$

320 à 321 $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,10'\,32'' - 0'',0000000873\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06312\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000156\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0056609\ T; \end{cases}$

1 à 1...... $\begin{cases} \text{latitude} = 42^d\,10'\,45'' - 0'',0000000874\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06308\ T'; \\ \text{longitude} = 0'',0000000157\ TT' + (1-\frac{1}{3}\alpha)\,0'',0056750\ T. \end{cases}$

Au moyen des équations précédentes, il n'eſt aucun lieu de la France dont on ne puiſſe déterminer la longitude & la latitude, avec autant de facilité dans l'hypotheſe elliptique que dans l'hypotheſe ſphérique, lorſque l'on connoît la diſtance en toiſes de ce lieu ſur la méridienne de Paris, & ſur la perpendiculaire à la méridienne. Un exemple va rendre les procédés ſenſibles.

EXEMPLE.

(92) Suppoſons que l'on veuille déterminer la longitude & la latitude de Breſt que nous avons déja calculée dans le paragraphe 86.

Solution. Nous avons vu que le lieu dont il s'agit eſt ſitué à la diſtance de 259168 toiſes de la méridienne de Paris, ſur une perpendiculaire qui rencontre cette méridienne, à la diſtance de 14614 toiſes du côté du midi. Suppoſons donc les axes de la Terre dans le rapport de 320 à 321. Comme la diſtance la plus prochaine eſt la perpendiculaire même de l'Obſervatoire, je prends (§. 91) les équations qui conviennent à cette hypotheſe, & j'ai

$$\text{Latitude de Breſt} = 48^d\,50'\,14'' - 0'',0000001101\ T^2 + (1-\alpha)\,0'',06312\ T';$$
$$\text{Longitude de Breſt} = 0'',0000000223\ TT' + (1-\tfrac{1}{3}\alpha)\,0'',0063715\ T.$$

J'ai de plus $T' = -14614$ toiſes; $T = 259168$ toiſes.

Type du Calcul.

α

6·9721042 ..... log. conſt.
0·8271636 ..... log. T^2

7·7992678 ..... log. 0,00630

Latitude = (1) — (2) — (3)

(1) . . . . $48^d\ 50'\ 14''$
2·0417873 ..... log. $0'',00000001101$.
0·8271636 ..... log. T^2

(2) 2·2689509 . . . . — 12 19

9·9972553 ..... log $(1 - \alpha)$
8·8001670 ..... log $0'',06312$
4·1647691 ..... log T'

(3) 2·9621914 . . . . . — 15 16

Latitude = ... 48 22 39

$\alpha = 0,00630$;
$1 - \alpha = 0,99370$;
$1 - \frac{1}{3}\alpha = 9.99790$.

Longitude = — (1) + (2)

1·3483049 $0'',0000000223$.
4·1647691 .... log. T'
5·4135818 .... log T

(1) 0·9266558 . . . . — $8'',4$

9·9990870 .... log. $(1 - \frac{1}{3}\alpha)$
7·8042417 .... log. $0'',0063715$
5·4135818 .... log. T

(2) 3 2169105. . . . + $27'\ 27'',8$

Longitude = ... $27'\ 19'',4$

La longitude eſt occidentale, attendu que la perpendiculaire dont il s'agit, s'étend à l'occident du méridien de Paris.

(93) Si l'on demandoit pareillement la longitude & la latitude du lieu nommé *Le Séjour*, ſitué à l'Eſt de Paris, à la diſtance de 3120 toiſes de la Méridienne, ſur une perpendiculaire qui coupe cette Méridienne, à 1100 toiſes du côté du midi, on trouvera que ce lieu a pour latitude $48^d\ 49'\ 5''$, & que ſa longitude eſt de $20''$ orientale.

Article III.

Sur le rapport des axes de la Terre qui repréſente le plus exactement les poſitions des différens points de la France.

(94) C'eſt une queſtion fort controverſée parmi les Aſtronomes, de ſavoir quel eſt le rapport des axes de la Terre que l'on doit préférer. Dans cet Ouvrage, j'ai donné des calculs pour quatre rapports différens, celui de 177 à 178; celui de 229 à 230; celui de 320 à 321; & enfin celui d'égalité des axes. Le premier de ces rapports paroît avoir été adopté par M. de Maupertuis, dans l'Ouvrage qu'il a publié ſur la figure de la Terre; le ſecond eſt donné par la théorie Neutonienne, en ſuppoſant que la Terre ait été primitivement fluide; le troiſieme enfin, indiqué dans un de mes Mémoires, comme probable d'après les meſures géodéſiques faites en France, vient de recevoir un nouveau dégré de probabilité par les recherches théoriques de M. de la Place.

Je me propoſe d'examiner de nouveau, lequel de ces rapports paroît repréſenter le plus exactement, les poſitions obſervées en France. J'examinerai enſuite dans un chapitre particulier, ce que l'on conclut des meſures des Méridiens faites dans les autres parties de notre Globe.

Obſervations faites en France.

(95) Dans l'ouvrage de la Méridienne de Paris, on trouve les obſervations ſuivantes.

	Diſtances ſur la Méridienne en toiſes.	*Latitudes obſervées.*
Dunkerque	125431 du côté du Nord	$51^d\ 2'\ 4''$
Bourges	99990 du côté du Midi	47 5 7
Rhodés	255757	44 21 16
Perpignan	350065	42 42 5

Ces diſtances ſur la Méridienne, & ces latitudes, ſont rapportées aux lieux où les obſervations ont été faites; & elles different de celles marquées dans les Tables de la Méridienne de France, qui ont été réduites à la principale Egliſe de chaque endroit.

Pour faire uſage de l'équation par laquelle on détermine la latitude, il faut connoître les diſtances ſur les perpendiculaires. Dans l'ouvrage de la Meridienne de France, je n'ai point trouvé ces diſtances rapportées aux lieux des obſervations; mais l'on trouve dans les Tables de cette Méridienne, les diſtances pour la principale Egliſe de chaque lieu, & elles ſont ainſi marquées.

Diſtances ſur les perpendiculaires.

Dunkerque	1430 toiſes.
Bourges	2425
Rhodès	9739
Perpignan	23805

Dans le calcul des latitudes, j'emploierai ces dernieres diſtances, & j'aurai rigoureuſement les latitudes, attendu la petiteſſe du terme ſur lequel elles influent, & la très-petite différence entre les diſtances marquées & les diſtances des lieux où l'on a obſervé. On doit ſentir cependant que ſi l'on vouloit calculer les longitudes, il ne faudroit point employer ces diſtances; mais cette conſidération eſt indifférente à mon objet particulier où il n'eſt queſtion que des latitudes.

Si l'on exécute les calculs on aura les réſultats ſuivans.

Latitudes d'après les calculs.

	177 à 178,	229 à 230,	320 à 321,	1 à 1.
Dunkerque	$51^d\ 2'\ 4'',0$	$51^d\ 2'\ 4'',3$	$51^d\ 2'\ 4'',5$	$51^d\ 2'\ 6'',0$;
Bourges	47 5 4,5	47 5 5,0	47 5 6,0	47 5 7,5;
Rhodès	44 21 7,4	44 21 11,5	44 21 16,7	44 21 23,0;
Perpignan	42 41 48,3	42 41 54,0	42 42 2,5	42 42 14,0.

Il me paroît donc incontestable que le rapport de 320 à 321 représente d'une maniere satisfaisante les latitudes observées en France sur la Méridienne de Paris ; & c'est, sans doute, un grand préjugé en faveur de ce rapport, du moins relativement à nos climats. Au reste, il seroit assez indifférent, pour la détermination des différens points de la France, que ce rapport ne satisfit pas rigoureusement à toutes les observations faites dans les différentes parties de l'Univers, si une suite d'observations multipliées, apprenoit qu'il peut servir à calculer exactement la Carte de France.

Article IV.

Examen de quelques propriétés de la Carte de France.

De la construction & des propriétés générales de la Carte de France.

(96) On sait de quelle maniere la Carte de France est construite. Ce monument unique encore dans son espece, sera à jamais la gloire du Gouvernement qui l'a ordonné, & de Mrs. de Cassini qui ont présidé à son exécution. Cette Carte a une propriété caractéristique qui la distingue de toutes les autres. On a pris un premier méridien, celui qui passe par l'Observatoire ; ce méridien est représenté par une ligne droite qui s'étend indéfiniment du Nord au Midi ; sur cette droite, toutes les parties occupent un espace proportionnel à celui qu'elles occupent sur la méridienne de Paris, de sorte que la droite en question n'est que le développement du méridien de Paris rectifié. A différentes distances convenables, on a élevé des perpendiculaires à la Méridienne qui représentent les perpendiculaires terrestres, de maniere que sur ces droites, chaque lieu occupe la place qu'il occupe véritablement sur la perpendiculaire correspondante tracée sur le sphéroïde.

(97) Si l'on rapproche cette construction des propriétés démontrées dans les chapitres précédens, on se convaincra facilement que tous les lieux situés sur une même ligne droite perpendiculaire à la méridienne, n'ont pas la même latitude. En effet (§. 91) à mesure que l'on s'éloigne de l'origine de la perpendiculaire, les latitudes correspondantes diminuent. Les points de la Terre, qui ont la même latitude, s'éloignent donc de plus en plus de cette droite, en remontant vers le Nord ; & le parallele terrestre qui, par exemple, coincidoit avec le sommet de la perpendiculaire à l'origine, s'en écarte du côté du Nord, à mesure que l'on avance sur cette perpendiculaire.

Ce que je dis des paralleles terrestres s'applique également aux méridiens ; & l'on seroit dans l'erreur, si l'on se persuadoit que ces méridiens sont des lignes droites paralleles à la méridienne de Paris. Pour s'en convaincre, il suffit de réfléchir sur l'expression que nous avons donnée de l'angle d'une perpendiculaire quelconque avec les différens méridiens qu'elle coupe successivement ; il faudroit, pour que les méridiens pussent

être repréſentés par une droite parallele à la méridienne, que l'angle en queſtion fût toujours de 90^d ; or cet angle devient de plus en plus aigu. Les méridiens ne ſont donc point des lignes droites. Je me propoſe ici de diſcuter la nature des différentes courbes qui repréſentent, ſoit les méridiens, ſoit les paralleles terreſtres.

ARTICLE V.

Des équations aux courbes qui repréſentent les paralleles terreſtres & les méridiens ſur la Carte de France.

Dans cet Article, je me propoſe de donner les équations aux courbes qui repréſentent les paralleles terreſtres & les méridiens ſur la Carte de France. Je donnerai d'abord les équations rigoureuſes à ces courbes en général ; je donnerai enſuite les équations approchées qui ſeront ſuffiſantes pour l'eſpace qu'occupe la France.

Des équations rigoureuſes aux courbes qui repréſentent les méridiens & les paralleles terreſtres.

(98) Il eſt facile de donner les équations rigoureuſes aux courbes qui repréſentent les méridiens & les paralleles terreſtres. Dans cette recherche, je prendrai pour lignes des coordonnées, la méridienne de France, & la perpendiculaire paſſant par Paris.

Les équations démontrées précédemment vont nous ſervir à réſoudre les queſtions dont il s'agit. En effet, nous avons vu (§. 67) que l'on a les équations ſuivantes,

(1) ſin (latitude corrigée d'un lieu F quelconque) $=$ coſ m'P coſ p ;

(2) Tangente (longitude corrigée d'un lieu F quelconque) $= \frac{\text{tang}\, p}{\text{ſin}\, m'P}$;

(3) $m'P =$ complément (latitude corrigée du lieu M) $- k$;

(4) $k = K - \frac{1}{4}\Delta^2$ (K $-$ coſ (2 latitude corrigée du lieu M $+$ K) ſin K) ;

(5) $p = P - \frac{1}{4}\Delta^2 \text{coſ}^2 m'P \left(P + \frac{\text{ſin}\, 2P}{2}\right)$;

(6) longitude vraie d'un lieu quelconque $=$ longitude corrigée $- \frac{1}{4}\Delta^2$ P ſin m'P.

On ſe rappellera que dans ces équations l'on entend par

P la diſtance vraie du lieu F, à la méridienne de Paris, priſe ſur la perpendiculaire ;

K la diſtance vraie du ſommet de la perpendiculaire paſſant par le lieu F, à la perpendiculaire paſſant par Paris, priſe ſur la méridienne de Paris.

Et comme dans nos ſuppoſitions Paris eſt l'origine des coordonnées, il faut entendre par la latitude corrigée du lieu M, la latitude corrigée de l'Obſervatoire Royal.

Equation aux paralleles terreſtres.

(99) Suppoſons maintenant que l'on veuille avoir l'équation à un parallele terreſtre quelconque ; dans l'équation (1) à ſin (latitude corrigée du lieu F), l'on ſubſtituera ſin (latitude corrigée du parallele) ; l'on aura alors,

(1) ſin (latitude corrigée du parallele) — coſ m' P coſ $p = 0$.

Dans l'équation (3) du §. 98, à K l'on ſubſtituera ſa valeur tirée de l'équation (4) & elle deviendra

(2) m'P = complément (latitude corrigée de Paris) — K + $\frac{1}{4}\Delta^2$ (K — coſ (2 latitude corrigée de Paris + K) ſin K).

L'on ſubſtituera cette valeur de m'P dans l'équation (1) du préſent paragraphe ; l'on ſubſtituera pareillement dans la même équation (1), à p ſa valeur tirée de l'équation (5) du §. 98 ; & l'on aura l'équation aux paralleles terreſtres, dans laquelle les coordonnées ſeront K & P.

Equation aux Méridiens.

(100) L'équation aux Méridiens n'eſt pas plus difficile à déterminer. En effet, ſi dans l'équation (2) du §. 98, l'on ſubſtitue à la longitude corrigée, ſa valeur en longitude vraie tirée de l'équation (6) ; l'on aura

(1) Tang (longitude vraie du méridien dont il s'agit + $\frac{1}{2}\Delta^2$ P ſin m'P) $- \frac{\text{tang } p}{\text{ſin } m'\text{P}} = 0$.

Dans cette équation l'on éliminera m'P & p au moyen des équations (3) & (5) du §. 98, & l'on aura l'équation aux méridiens.

Comme ces dernieres équations préſenteroient des difficultés de calcul dans leur développement, je vais donner les équations approchées aux mêmes courbes, qui ſeront ſuffiſantes pour l'eſpace qu'occupe la France.

Equations approchées aux paralleles terreſtres & aux Méridiens.

(101) Pour déterminer les équations approchées aux paralleles terreſtres & aux différens Méridiens ſur la Carte de France, je reprends les équations du §. 89 ; & j'ai

(1) Latitude d'un lieu F quelconque = latitude du lieu A — cotang m'P $(1 - \frac{1}{2}\Delta^2)\frac{31'',4159\ \text{T}^2}{\theta^2} + (1 - 0{,}000000000000938\ \text{T}^2)(1 - \frac{1}{4}\Delta^2)\frac{3600''\ \text{T}'}{\theta}$;

(2) Longitude d'un lieu F quelconque $= \frac{\text{cotang } m'\text{P}}{\text{ſin } m'\text{P}}(1 - \frac{1}{2}\Delta^2)\frac{4'',18883\ \text{TT}'}{\theta^2}$ $+ \frac{1 - 0{,}000000000000313\ \text{T}^2}{\text{ſin } m'\text{P}}(1 - \frac{1}{2}\Delta^2)\frac{240''\ \text{T}}{\theta}$.

Dans

Dans ces équations, l'on entend par

T la diſtance en toiſes du lieu F priſe ſur la perpendiculaire à la méridienne.

T' le nombre de toiſes qui exprime la diſtance ſur la méridienne du ſommet de la perpendiculaire paſſant par le lieu F, à un lieu A pris ſur la même méridienne, & que l'on prend pour l'origine de la quantité T' ; cette diſtance eſt poſitive en remontant vers le Nord ; elle eſt négative en deſcendant vers le Midi.

θ le nombre de toiſes que contient un dégré de la ſphere inſcrite.

Δ la demi-excentricité des méridiens terreſtres.

$m'P$ le complément de la latitude corrigée du lieu A.

Les longitudes ſont exprimées en tems ; elles ſont comptées du méridien de Paris ; elles ſont orientales ou occidentales, ſuivant le ſens de la perpendiculaire que l'on calcule.

Equation aux paralleles terreſtres ſur la Carte de France.

(102) puiſque le lieu A eſt arbitraire, il eſt évident que l'on peut prendre pour le lieu A, le point où le parallele coupe la méridienne. Il eſt également évident que, comme dans le cas dont il s'agit, les différens points F ſont ſitués ſous un même parallele, que d'ailleurs le lieu A eſt également ſitué ſous le même parallele, l'on aura

(1) Latitude du lieu F — latitude du lieu A = 0.

$m'P$ ſera le complément de la latitude corrigée du parallele ; & T' exprimera le nombre de toiſes ſur la méridienne, dont les ſommets des perpendiculaires paſſant par les différens points F du parallele, ſeront éloignés du ſommet A du parallele. L'on aura donc pour équation aux paralleles terreſtres

$$(2)\ (1 - 0{,}0000000000000938\, T^2)\left(1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2\right)\frac{3600''\, T'}{\theta}$$

$$- \text{cotang (latitude corrigée du parallele)} \left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{31'',4159\, T^2}{\theta^2} = 0.$$

Dans cette équation,

T eſt la diſtance en toiſes de chaque point du parallele priſe ſur la perpendiculaire à la méridienne ;

T' eſt la diſtance en toiſes des ſommets des perpendiculaires paſſant par les différens points F, priſe ſur la Méridienne de France, & comptée du ſommet A du parallele dont il s'agit. Cette diſtance eſt poſitive en remontant vers le Nord ; elle eſt négative en deſcendant vers le midi.

Nous venons de voir que dans l'équation (2) T eſt la diſtance en toiſes de chaque point du parallele, priſe ſur la perpendiculaire à la méridienne ; & que T' eſt la diſtance en toiſes, des ſommets des perpendiculaires paſſant par les différens points F des paralleles, priſe ſur la méridienne de France & comptée du ſommet A du parallele dont il s'agit. Ces conſtructions ne paroiſſent pas, au premier coup-d'œil, donner l'équation aux paralleles terreſtres, ſur le plan de la Carte de France, par rapport à des coordonnées perpendiculaires entr'elles. Si l'on fait cependant attention à la maniere dont cette Carte eſt conſtruite, on ſe convaincra facilement, que l'on a véritablement l'équation à ces pa-

ralleles ; que la ligne qui représente le méridien passant par Paris, est la ligne des abscisses ; que la perpendiculaire passant par le sommet du parallele, est la ligne des ordonnées ; que le point où cette perpendiculaire rencontre le méridien, est l'origine des coordonnées, & qu'enfin les grandeurs T, T' sont respectivement les abscisses & les ordonnées aux différens points F, sur le plan de la Carte.

Pour s'en convaincre, l'on remarquera que sur le plan de la Carte, les différentes perpendiculaires sont chacunes représentées par une ligne droite ; de sorte que tous les lieux qui sur le sphéroïde sont situés sous la même perpendiculaire, sont enfilés sur le plan de la Carte, par la même ligne droite. La distance entre les différentes droites où sont situés les différens points F des paralleles sur le plan de la Carte, est donc égale à la distance des sommets des perpendiculaires qui sur le sphéroïde passent par ces lieux F. Les quantités T, T' sont donc, sur le plan de la Carte, de véritables coordonnées perpendiculaires entr'elles, & déterminent la position des différens lieux F sur cette Carte. L'on doit donc entendre par :

T la distance de chaque point F du parallele, à la méridienne passant par Paris, prise sur la perpendiculaire à la méridienne tracée sur la Carte ;

T' la distance perpendiculaire de chaque point F, à la perpendiculaire menée par le sommet du parallele dont il s'agit.

Si l'on fait abstraction au très-petit terme $0{,}0000000000000938\ T^2$, la courbe est une parabole conique qui a son sommet au point où le parallele terrestre coupe la méridienne de France.

Equation aux méridiens terrestres.

(103) Pour déterminer l'équation aux méridiens terrestres, je remarque que dans l'équation (2) du §. 101, longitude du lieu F = longitude du méridien dont il s'agit comptée de Paris. De plus, relativement à la Carte de France, *m'* P differe peu de 45^d ; l'on aura donc pour équation aux méridiens terrestres

$$(1)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\text{ longitude du méridien exprimée en secondes horaires}$$
$$-\left(1-\tfrac{1}{2}\Delta^2\right)\frac{4'',18883\ T\,T'}{\delta^2}-\left(1-0{,}0000000000000313\ T^2\right)\frac{240''\ T}{\delta}=0.$$

Dans cette équation,

T est la distance en toises de chaque point du méridien prise sur la perpendiculaire à la méridienne menée par Paris ;

T' est la distance en toises de chaque point du méridien, prise sur la méridienne menée par Paris ; cette distance est comptée du point où le parallele de 45^d coupe la méridienne.

Si l'on fait abstraction au très-petit terme $0{,}0000000000000313\ T^2$, la courbe est une hyperbole.

CHAPITRE QUATRIEME.

Examen du rapport des axes de la Terre, que l'on peut conclure des obſervations faites dans les différens climats.

(104) DANS le Chapitre précédent, j'ai fait voir quel étoit le rapport des axes de la Terre qui repréſente de la maniere la plus ſatisfaiſante, les Obſervations faites en France. Je dois examiner maintenant le rapport le plus probable que l'on tire des Obſervations faites dans les autres climats.

Je n'entrerai point dans le détail hiſtorique des voyages qui ont été entrepris pour déterminer la figure de notre Globe ; je ne parlerai point des précautions priſes pour aſſurer aux meſures géodéſiques, toute l'exactitude qu'exigeoit l'importance des Obſervations. On peut voir les ouvrages qui ont traité particuliérement de cet objet. Il me ſuffit de dire que tant que les Sciences ſeront en honneur parmi les hommes, la poſtérité la plus reculée n'oubliera jamais les noms des Aſtronomes, qui, au Pérou, en France, en Suede, au Cap de Bonne-Eſpérance, ont déployé les premiers, tous les efforts qu'une grande & ſublime entrepriſe peut inſpirer au génie. Je partirai de leurs Obſervations ; & je me propoſe d'examiner le rapport le plus probable que l'on peut conclure de leurs travaux réunis.

ARTICLE PREMIER.

De quelques propoſitions préliminaires à l'examen du rapport le plus probable des axes de la Terre.

La détermination du rapport des axes de la Terre, d'après les meſures géodéſiques, exige que l'on ait l'expreſſion du rayon de courbure pour les différens points des méridiens. Je vais d'abord m'occuper de cette recherche.

De l'expreſſion du rayon de courbure pour les différens points des méridiens.

(105) Puiſque par nos ſuppoſitions la terre eſt un ſphéroïde de révolution, les rayons de courbure des différens points de ſes méridiens, que nous ſuppoſons d'ailleurs être des ellipſes, ſont reſpectivement dans le plan de ces méridiens ; & l'on peut les déterminer par les loix qui conviennent à toutes les courbes en général.

On démontre en Géométrie, que dans une courbe quelconque, le rayon de courbure, pour un point quelconque, eſt égal à la partie de a Normale interceptée entre la courbe & la ligne des abſciſſes, plus au

ſinus de l'angle de la Normale avec la ligne des abſciſſes, multiplié par la différentielle de la partie de la Normale interceptée entre la courbe & la ligne des abſciſſes, & diviſé par la differentielle du ſinus de l'angle de la Normale avec la ligne des abſciſſes.

Ainſi, ſi l'on nomme

N la partie de la Normale interceptée entre la courbe & la ligne des abſciſſes;
B l'angle de la Normale avec la ligne des abſciſſes;

l'on a

$$(1) \text{ Rayon de courbure} = N + \text{ſin}\, B \times \frac{dN}{\text{coſ}\, B\, dB}.$$

Cherchons donc, relativement à l'ellipſe, les valeurs de N & de ſin B.

(106) Si l'on prend le grand axe de la Terre pour ligne des abſciſſes, & que de l'obſervateur l'on mene une Normale qui rencontre ce grand axe, l'angle de cette Normale avec le grand axe de la Terre, eſt égal à la latitude vraie de l'obſervateur. Si donc l'on nomme

l la latitude vraie de l'obſervateur;

on aura $(1)\ B = l.$

Nous n'avons plus maintenant qu'à chercher l'expreſſion de la partie N de la Normale interceptée entre l'obſervateur & le diametre de l'équateur.

Soit

1 le demi-petit axe de la Terre;
ρ ſon demi-grand axe.

Il ſuit du paragraphe ſix du premier Volume que l'on a pour expreſſion d'un demi-diametre quelconque de l'ellipſe,

$$(2) \text{ demi-diametre} = \sqrt{(\rho^2 - (\rho^2 - 1)\, \text{ſin}^2 (\text{latit. corrigée de l'obſervateur}))}$$

Fig. 5. Mais ρ tang. latitude corrigée = tang. latitude vraie; donc

$$(3) \text{ Demi-diametre} = \sqrt{\left(\frac{\rho^4\, \text{coſ}^2\, l + \text{ſin}^2\, l}{\rho^2\, \text{coſ}^2\, l + \text{ſin}^2\, l}\right)}.$$

Soit maintenant PFEP, une ellipſe; C le centre de cette ellipſe; CP le demi-petit axe; CE le demi-grand axe; CF le demi-diametre de l'ellipſe paſſant par l'obſervateur; FH la partie de la Normale interceptée entre l'obſervateur & le demi-grand axe; il eſt évident que dans le triangle FCH, l'on a FC : FH :: ſin FHC : ſin FCH. Nous avons vu que FC avoit pour expreſſion $\sqrt{\left(\frac{\rho^4\, \text{coſ}^2\, l + \text{ſin}^2\, l}{\rho^2\, \text{coſ}^2\, l + \text{ſin}^2\, l}\right)}$, & que ſin FHC = ſin l; donc $FH = \sqrt{\left(\frac{\rho^4\, \text{coſ}^2\, l + \text{ſin}^2\, l}{\rho^2\, \text{coſ}^2\, l + \text{ſin}^2\, l}\right)} \times \frac{\text{ſin FCH}}{\text{ſin}\, l}$. Par une propriété de l'ellipſe, ρ^2 tangente FCH = tang l; donc $\frac{\text{ſin FCH}}{\text{ſin}\, l}$ $= \frac{\rho}{\sqrt{(\rho^4\, \text{coſ}^2 l + \text{ſin}^2 l)}}$; donc $N = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2\, \text{coſ}^2 l + \text{ſin}^2 l)}} = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - (\rho^2 - 1)\, \text{ſin}^2 l)}}$;

donc $dN = \frac{(\rho^2 - 1)\,\text{fin}\,l\,\text{cof}\,l\,dl}{(\rho^2 - (\rho^2 - 1)\,\text{fin}^2 l)^{\frac{3}{2}}}$; donc enfin

(5) Rayon de courbure $= \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - (\rho^2 - 1)\text{fin}^2 l)}} + \frac{(\rho^2 - 1)\,\text{fin}^2 l}{(\rho^2 - (\rho^2 - 1)\,\text{fin}^2 l)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{\rho^2}{(\rho^2 - (\rho^2 - 1)\,\text{fin}^2 l)^{\frac{3}{2}}}$.

Telle eft l'expreffion du rayon de courbure dans l'ellipfe.

Méthode pour déterminer le rapport des axes de la Terre, par la comparaifon de deux degrés du méridien.

(107) L'équation (5) du §. précédent fournit un moyen facile pour déterminer le rapport des axes de la Terre, par la comparaifon de deux degrés du méridien ; pourvu toutefois que ces méridiens foient elliptiques. Soit en effet

M l'arc mefuré dans un lieu **A** ;
l la latitude vraie du lieu **A** ;
M' l'arc mefuré dans un lieu **A'** ;
l' la latitude vraie du lieu **A'**.

Puifque dans deux cercles différens, les longueurs de deux arcs qui appartiennent au même nombre de dégrés, font en raifon des rayons de ces cercles ; on a

$$M : M' :: (\rho^2 - (\rho^2 - 1)\,\text{fin}^2 l')^{\frac{3}{2}} : (\rho^2 - (\rho^2 - 1)\,\text{fin}^2 l)^{\frac{3}{2}};$$

Donc

$$(1)\ \rho = \sqrt{\left(\frac{M'^{\frac{2}{3}}\,\text{fin}^2 l' - M^{\frac{2}{3}}\,\text{fin}^2 l}{M^{\frac{2}{3}}\,\text{cof}^2 l - M'^{\frac{2}{3}}\,\text{cof}^2 l'}\right)}.$$

La comparaifon de deux dégrés quelconques du méridien fera donc connoître le demi-grand axe de la Terre, & par conféquent le rapport des axes ; puifque nous avons fuppofé le demi-petit axe = 1.

EXEMPLE.

(108) L'on demande la valeur du demi-grand axe de la Terre, d'après la mefure d'un degré du méridien, de 57074 toifes fous la latitude de $49^d\ 23'$, & d'un autre dégré de 56753 toifes fous l'équateur.

Solution. Nommons M l'arc mefuré fous l'équateur ; M' l'arc mefuré en France ; nous aurons M = 56753 toifes, $l = 0$; M' = 57074 toifes, $l' = 49^d\ 23'$.

TYPE du Calcul.

$\underline{M^{\frac{2}{3}}}$

$4 \cdot 7539888$ ..... log M

$\underline{\quad 2}$

$9 \cdot 5079776$

$\underline{\quad 3}$

$3 \cdot 1693259$ ..... log $M^{\frac{2}{3}}$

$M'^{\frac{2}{3}} \sin^2 l' - M^{\frac{2}{3}} \sin^2 l = (1) - 0.$

$3 \cdot 1709589$ ..... log $M'^{\frac{2}{3}}$
$9 \cdot 7605774$ ..... log $\sin^2 l'$

(1) $2 \cdot 9315363$ ...... $854{,}15$

$\underline{M'^{\frac{2}{3}}}$

$4 \cdot 7564383$

$\underline{\quad 2}$

$9 \cdot 5128766$

$\underline{\quad 3}$

$3 \cdot 1709589$ ..... log $M'^{\frac{2}{3}}$

$M^{\frac{2}{3}} \cos^2 l - M'^{\frac{2}{3}} \cos^2 l' = (1) - (2)$

(1) $3 \cdot 1693259$ .... $+ 1476{,}83$

$3 \cdot 1709589$ ..... log $M'^{\frac{2}{3}}$
$9 \cdot 6271554$ ..... log $\cos^2 l'$

(2) $2 \cdot 7981143$ .... $- 628{,}22$

$+ 848{,}61$

$\underline{p}$

$2 \cdot 9315341$ ..... log. $854{,}15$
$7 \cdot 0712970$ ..... compl. log. $848{,}61$

$0 \cdot 0028311$

$\underline{\quad 2}$

$0 \cdot 0014155$ log p $\qquad p = 1{,}00327.$

(109) Indépendamment des deux dégrés de la Terre que nous venons de comparer, celui de France & celui du Pérou, l'on a encore d'autres mesures de dégrés du méridien. Voici la Table des dégrés mesurés.

Latitudes.		Valeurs en toises.	*Noms des Astronomes qui ont mesuré ces dégrés.*
0d	0'	56753	Mrs. Bouguer, Godin & La Condamine, au Pérou.
33	18	57037	M. l'Abbé de la Caille, au Cap de Bonne-Espérance.
39	12	56888	Mrs Masson & Dixon, dans la Pensilvanie.
43	0	56979	M. l'Abbé Boscowich, dans les Etats du Pape.
44	44	57069	Le Pere Beccaria, en Piémont.
45	57	56881	Le Pere Liesganig, en Hongrie.
48	43	57086	Le Pere Liesganig, en Autriche.
49	23	57074	Les Astronomes de l'Académie, en France;
66	20	57422	Mrs. Clairaut, le Monnier, Maupertuis, au Cercle Polaire.

Rapport des axes de la Terre que l'on conclut des différens dégrés comparés au dégré du Pérou.

(110 Si l'on compare chacune de ces mesures à celle du Pérou, l'on aura les résultats suivans.

	Valeurs de ρ.	Rapport des axes.
Pérou & Cap de Bonne-Espérance	1,00548	182 à 183.
Pérou & Pensilvanie.	1,00199	503 à 504.
Pérou & Etats du Pape	1,00285	351 à 352.
Pérou & Piémont.	1,00375	267 à 268.
Pérou & Hongrie.	1,00146	685 à 686.
Pérou & Autriche.	1,00346	289 à 290.
Pérou & France.	1,00327	306 à 307.
Pérou & Cercle Polaire.	1,00467	214 à 215.

Si l'on prend le milieu entre toutes ces valeurs, l'on aura $\rho = 1,00337$; Rapport des axes comme 297 à 298.

Quelle doit être la relation entre trois dégrés du méridien, pour que ces dégrés donnent le même rapport des axes.

(111) Dans le §. 107, nous avons donné la méthode pour déterminer le rapport des axes de la Terre, par la mesure de deux dégrés du méridien; nous allons dans le présent paragraphe déterminer quelle doit être la relation entre trois dégrés du méridien, pour que ces dégrés donnent le même rapport des axes.

Soit

M l'arc mesuré dans un lieu A;
l la latitude vraie du lieu A;
M' l'arc mesuré dans un lieu A';
l' la latitude vraie du lieu A';
M'' l'arc mesuré dans un lieu A'';
l'' la latitude vraie du lieu A''.

Il est évident que si l'on compare successivement les arcs mesurés dans les lieux A', A'', à l'arc mesuré dans le lieu A; l'on aura

$$\rho^2 = \frac{M'^{\frac{2}{3}} \sin^2 l' - M^{\frac{2}{3}} \sin^2 l}{M^{\frac{2}{3}} \cos^2 l - M'^{\frac{2}{3}} \cos^2 l'};$$

$$\rho^2 = \frac{M''^{\frac{2}{3}} \sin^2 l'' - M^{\frac{2}{3}} \sin^2 l}{M^{\frac{2}{3}} \cos^2 l - M''^{\frac{2}{3}} \cos^2 l''};$$

égalant donc ces deux expressions, l'on aura

$$(1)\; M^{\frac{2}{3}} M'^{\frac{2}{3}} \sin(l'+l)\sin(l'-l) - M^{\frac{2}{3}} M''^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l)\sin(l''-l)$$
$$+ M'^{\frac{2}{3}} M''^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l')\sin(l''-l') = 0.$$

Nous connoissons maintenant quelle doit être la relation entre trois dégrés du méridien, pour que ces trois dégrés donnent le même rapport des axes.

Application de la théorie précédente aux dégrés mesurés en France, au Pérou, & sous le Cercle Polaire.

EXEMPLE.

(112) On demande quelle devroit être la relation entre les dégrés du méridien observés au Pérou, en France & sous le cercle polaire, pour que ces trois dégrés donnassent le même rapport des axes de la Terre.

Solution. Soit

M le dégré mésuré au Pérou ;
l la latitude vraie correspondante ;
M′ le dégré mesuré en France ;
l' la latitude vraie correspondante ;
M″ le dégré mesuré au cercle polaire ;
l'' la latitude vraie correspondante.

Nous avons vu (§. 109) que $M = 56753$ Toises, $l = 0$; $M' = 57074$ toises, $l' = 49^d\,23'$; $M'' = 57422$ toises, $l'' = 66^d\,20'$; donc $\sin(l' + l) = \sin 49^d\,23'$; $\sin(l' - l) = \sin 49^d\,23'$; $\sin(l'' + l) = \sin 66^d\,20'$; $\sin(l'' - l) = \sin 66^d\,20'$; $\sin(l'' + l') = \sin 115^d\,43'$; $\sin(l'' - l') = \sin 16^d\,57'$; on aura donc pour équation

$$(56753 \times 57074)^{\frac{2}{3}} \sin^2 49^d\,23' - (56753 \times 57422)^{\frac{2}{3}} \sin^2 66^d\,20' + (57074 \times 57422)^{\frac{2}{3}} \sin 115^d\,43' \times \sin 16^d\,57' = 0.$$

Si l'on fait le calcul, on verra que cette équation n'est pas nulle ; les dégrés observés au Pérou, en France & au Cercle Polaire ne donnent donc pas le même rapport des axes de la Terre.

Quelle doit être la valeur d'un des trois dégrés quelconques du méridien que l'on compare, en supposant que les deux autres dégrés ont été bien observés.

(113) Nous venons de voir que les dégrés observés au Pérou, en France & au Cercle Polaire, ne donnent pas le même rapport des axes de la Terre. On pourroit être curieux de déterminer quelles devroient être les valeurs de ces dégrés, pour qu'ils donnassent le même rapport des axes de la Terre. L'équation (1) du §. 111, peut encore servir à résoudre cette question ; mais il est évident que le Problême est indéterminé. On peut donc demander quelle doit être la valeur de l'un quelconque de ces dégrés, en supposant que les deux autres ont été bien observés. Supposons, par exemple, que l'on demande quelle auroit dû être la valeur de l'arc mesuré au Cercle Polaire, en partant de l'hypothese que les dégrés de France & du Pérou ont été rigoureu-

sement

sement exacts, l'on ordonneroit alors l'équation (1) du §. 111, par rapport à $M''^{\frac{2}{3}}$, & l'on auroit

$$(1)\ M''^{\frac{2}{3}} = \frac{M^{\frac{2}{3}}\, M'^{\frac{2}{3}} \sin(l'+l)\, \sin(l'-l)}{M^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l)\, \sin(l''-l) - M'^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l')\, \sin(l''-l')}$$

Type du Calcul.

$M^{\frac{2}{3}}$

4·7539888. . . . . log M
$\times$ 2
9·5079776
$\div$ 3
3·1693259. . . . . log $M^{\frac{2}{3}}$

$M'^{\frac{2}{3}}$

4·7564383
$\times$ 2
9·5128766
$\div$ 3
3·1709589. . . . . log $M'^{\frac{2}{3}}$

$M^{\frac{2}{3}} M'^{\frac{2}{3}} \sin(l'+l)\sin(l'-l) = (1)$;

3·1693259. . . . log $M^{\frac{2}{3}}$
3·1709589. . . . log $M'^{\frac{2}{3}}$
9·7605774. . . . log $\sin^2 l'$

(1) 6·1008622. . . . . + 0,0001126143.

$M^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l)\sin(l''-l) - M'^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l')\sin(l''-l') = (1) - (2)$.

3·1693259. . . . log $M^{\frac{2}{3}}$
9·9236926. . . . log $\sin^2 l''$

(1) 3·0930185. . . . . . + 0,000000123885

3·1709589. . . . log $M'^{\frac{2}{3}}$
9·9547011. . . . log sin $(l''+l')$
9·4646938. . . . log sin $(l''-l')$

(2) 2·5903538. . . . . . − 0,000000038936
+ 0,000000084949

M''

6·1008622. . . . . log. 0,0001126143
7·0708417. . . . . compl. log. 0,000000084949

3·1717039. . . . . log $M''^{\frac{2}{3}}$
$\times$ 3
9·5152117
$\div$ 2
4·7576058. . . . . . . log M'' $\qquad$ M'' = 57228.

Le dégré du Cercle Polaire seroit dans cette hypothese de 57228 toises.

D'une forme plus générale que l'on peut donner à l'équation (1) *du* §. 111.

(114) On peut donner une forme plus générale à l'équation (1) du §. 111, qui exprime la relation que doivent avoir trois dégrés du méridien, pour qu'ils donnent le même rapport des axes.

Soit

x l'erreur du dégré M;
y l'erreur du dégré M';
z l'erreur du dégré M'';

L'équation (1) du §. 111 deviendra

$$(1)\ (M+x)^{\frac{2}{3}}\ (M'+y)^{\frac{2}{3}} \sin(l'+l) \sin(l'-l) - (M+x)^{\frac{2}{3}} (M''+z)^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l) \sin(l''-l) + (M'+y)^{\frac{2}{3}} (M''+z)^{\frac{2}{3}} \sin(l''+l') \cdot \sin(l''-l') = 0.$$

Mais, attendu que x, y, & z sont des quantités très-petites vis-à-vis de M, M', M''; à $(M+x)^{\frac{2}{3}}$, $(M'+y)^{\frac{2}{3}}$, $(M''+z)^{\frac{2}{3}}$, l'on pourra substituer, sans erreur sensible, $M^{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}x}{M^{\frac{1}{3}}}$, $M'^{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}y}{M'^{\frac{1}{3}}}$, $M''^{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}z}{M''^{\frac{1}{3}}}$, & l'équation (1) deviendra

$$(2)\ (MM' + \tfrac{2}{3}M'x + \tfrac{2}{3}My)\, M''^{\frac{1}{3}} \sin(l'+l) \sin(l'-l)$$
$$-(MM'' + \tfrac{2}{3}M''x + \tfrac{2}{3}Mz)\, M'^{\frac{1}{3}} \sin(l''+l) \sin(l''-l)$$
$$+(M'M'' + \tfrac{2}{3}M''y + \tfrac{2}{3}M'z)\, M^{\frac{1}{3}} \sin(l''+l') \sin(l''-l') = 0.$$

Cette équation exprimera d'une maniere générale, la relation entre les erreurs des trois dégrés que l'on compare.

Comme cette derniere équation est indéterminée, on pourra supposer telle relation que l'on voudra entre x, y & z.

(115) Si l'on applique le calcul aux trois dégrés du Pérou, de France & du Cercle Polaire, l'on aura $M = 56753$ toises, $l = 0$; $M' = 57074$ toises, $l' = 49^d\ 23'$; $M'' = 57422$ toises, $l'' = 66^d\ 20'$; $l'+l = 49^d\ 23'$; $l'-l = 49^d\ 23'$; $l''+l = 66^d\ 20'$; $l''-l = 66^d\ 20'$; $l''+l' = 115^d\ 43'$; $l''-l' = 16^d\ 57'$; & l'équation (2) du §. précédent deviendra

$$(1)\ 0{,}000039057\,x - 0{,}000122748\,y + 0{,}000083793\,z + 0{,}01680 = 0.$$

Ou, si l'on veut,

$$(2)\ 0{,}0023248\,x - 0{,}0073064\,y + 0{,}0049876\,z + 1{,}00000 = 0.$$

Si l'on vouloit déterminer la supposition qui donne la moindre somme des erreurs de x, y, z, on voit qu'il faudroit supposer $x = 0$, $z = 0$; l'on auroit alors $-0{,}0073064\,y + 1{,}0000 = 0$; d'où l'on tireroit $y = 137$; toute l'erreur tomberoit sur le dégré de France qui seroit trop petit de 137 toises; l'on concluroit $\rho = 1{,}00467$; rapport des axes comme 214 à 215.

Si l'on partage également les erreurs entre x, y, z, les dégrés du Pérou & du Cercle Polaire seront chacun trop grands de 69 toises; celui de France trop petit de 69 toises; & l'on aura $\rho = 1{,}00470$; rapport des axes comme 213 à 214.

Si l'on compare les dégrés de France, du Pérou & du Cap de Bonne-Eſpérance ; l'on aura l'équation ſuivante,

(3) 0,0040671 toiſes qu'il faut ajouter au dégré du Pérou
+ 0,0044208 toiſes qu'il faut ajouter au dégré de France
— 0,0084937 toiſes qu'il faut ajouter au dégré du Cap — 1,00000 = 0.

Si dans cette équation l'on partage également les erreurs entre les dégrés du Pérou, de France & du Cap, on verra que les dégrés du Pérou & de France ſont chacun trop petits de 59 toiſes, celui du Cap trop grand de 59 toiſes ; & l'on aura $\rho = 100385$; rapport des axes comme 260 à 261.

Si l'on compare les dégrés du Pérou, du Cap & du Cercle Polaire, l'on aura

(4) 0,013832 toiſes qu'il faut ajouter au dégré du Pérou
+ 0,0076027 toiſes qu'il faut ajouter au dégré du Cercle polaire
— 0,021439 toiſes qu'il faut ajouter au dégré du Cap — 1,00000 = 0.

Si dans cette équation l'on partage également les erreurs entre les dégrés du Pérou, du Cercle Polaire & du Cap, on verra que les dégrés du Pérou & du Cercle Polaire ſont chacun trop petits de 23 toiſes, celui du Cap trop grand de 23 toiſes ; & l'on aura $\rho = 1{,}00465$; rapport des axes comme 215 à 216.

Quelle doit être la relation entre quatre dégrés du méridien, pour que ces dégrés donnent le même rapport des axes.

(116) Soit

M l'arc meſuré dans un lieu A ;
l la latitude vraie du lieu A ;
M' l'arc meſuré dans un lieu A' ;
l' la latitude vraie du lieu A' ;
M'' l'arc meſuré dans un lieu A'' ;
l'' la latitude vraie du lieu A'' ;
M''' l'arc meſuré dans un lieu A''' ;
l''' la latitude vraie du lieu A'''.

Il eſt évident que ſi l'on compare les arcs meſurés dans les lieux A, A', A'', A''', l'on aura

$$\rho = \frac{M'^{\frac{2}{3}} \sin^2 l' - M^{\frac{2}{3}} \cos^2 l}{M^{\frac{2}{3}} \cos^2 l - M'^{\frac{2}{3}} \cos^2 l'} \; ; \; \rho^2 = \frac{M'''^{\frac{2}{3}} \sin^2 l''' - M''^{\frac{2}{3}} \sin^2 l''}{M''^{\frac{2}{3}} \cos^2 l'' - M'''^{\frac{2}{3}} \cos^2 l'''} ;$$

égalant donc ces deux expreſſions, l'on aura

$$(1) \quad M^{\frac{2}{3}} M''^{\frac{2}{3}} \sin(l'' + l) \sin(l'' - l) - M^{\frac{2}{3}} M'''^{\frac{2}{3}} \sin(l''' + l) \sin(l''' - l)$$
$$+ M'^{\frac{2}{3}} M'''^{\frac{2}{3}} \sin(l''' + l') \sin(l''' - l') - M'^{\frac{2}{3}} M''^{\frac{2}{3}} \sin(l'' + l') \sin(l'' - l') = 0.$$

Nous connoiſſons maintenant quelle doit être la relation entre quatre dégrés du méridien, pour qu'ils donnent le même rapport des axes.

Soit

u l'erreur du dégré M ;
x l'erreur du dégré M' ;
y l'erreur du dégré M'' ;
z l'erreur du dégré M''' ;

D'après les remarques du §. 114, l'équation peut être mise sous la forme qui suit.

$$
\begin{aligned}
(2)\ \tfrac{2}{3}\,u\,\big(&M''M'^{\frac{1}{3}}M'''^{\frac{1}{3}}\sin(l''+l)\sin(l''-l)-M'''M'^{\frac{1}{3}}M''^{\frac{1}{3}}\sin(l'''+l)\sin(l'''-l)\big)\\
+\tfrac{2}{3}\,x\,\big(&M'''M^{\frac{1}{3}}M''^{\frac{1}{3}}\sin(l'''+l')\sin(l'''-l')-M''M^{\frac{1}{3}}M'''^{\frac{1}{3}}\sin(l''+l')\sin(l''-l')\big)\\
+\tfrac{2}{3}\,y\,\big(&M\,M'^{\frac{1}{3}}M'''^{\frac{1}{3}}\sin(l''+l)\sin(l''-l)-M'M^{\frac{1}{3}}M'''^{\frac{1}{3}}\sin(l''+l')\sin(l''-l')\big)\\
+\tfrac{2}{3}\,z\,\big(&M'M^{\frac{1}{3}}M''^{\frac{1}{3}}\sin(l'''+l')\sin(l'''-l')-M\,M'^{\frac{1}{3}}M''^{\frac{1}{3}}\sin(l'''+l)\sin(l'''-l)\big)\\
+&M\,M''M'^{\frac{1}{3}}M'''^{\frac{1}{3}}\sin(l''+l)\sin(l''-l)+M'M'''M^{\frac{1}{3}}M''^{\frac{1}{3}}\sin(l'''+l')\sin(l'''-l')\\
-&M\,M'''M'^{\frac{1}{3}}M''^{\frac{1}{3}}\sin(l'''+l)\sin(l'''-l)-M'M''M^{\frac{1}{3}}M'''^{\frac{1}{3}}\sin(l''+l')\sin(l''-l')=0.
\end{aligned}
$$

Cette équation représente d'une maniere générale la relation entre les erreurs des quatre dégrés que l'on compare.

ARTICLE II.

Du rapport des axes de la Terre que l'on peut conclure des observations géodésiques.

(117) Nous avons maintenant toutes les équations qui peuvent servir à fixer nos idées sur le rapport des axes de la Terre que l'on peut conclure des observations géodésiques ; mais avant de discuter les conclusions que l'on doit tirer de ces équations, il convient de jetter un coup-d'œil sur les calculs que nous avons déja exposés.

Nous avons vu (§. 110) que si l'on compare les différens dégrés mesurés sur la Terre, au dégré du Pérou, l'on a les résultats suivans :

	Valeurs de ρ.	Rapport des axes.
Pérou & Cap de Bonne-Espérance	1,00548	182 à 183.
Pérou & Pensilvanie	1,00199	503 à 504.
Pérou & Etats du Pape	1,00285	351 à 352.
Pérou & Piémont	1,00375	267 à 268.
Pérou & Hongrie	1,00146	685 à 686.
Pérou & Autriche	1,00346	289 à 290.
Pérou & France	1,00327	306 à 307.
Pérou & Cercle Polaire	1,00467	214 à 215.

D'où nous avons conclu pour valeur moyenne, $\rho = 1,00337$; rapport des axes comme 297 à 298.

(118) Si l'on compare ſemblablement les différens dégrés meſurés ſur la Terre, au dégré du Cercle Polaire, l'on aura les réſultats ſuivans.

	Valeurs de ρ.	Rapport des axes.
Cercle Polaire & France	1,00766	130 à 131.
Cercle Polaire & Autriche	1,00707	140 à 141.
Cercle Polaire & Hongrie	1,00977	103 à 104.
Cercle Polaire & Piémont	1,00590	169 à 170.
Cercle Polaire & Etats du Pape	1,00686	145 à 146.
Cercle Polaire & Penſilvanie	1,00784	128 à 129.
Cercle Polaire & Cap de Bonne-Eſpérance	1,00416	240 à 241.
Cercle Polaire & Pérou	1,00467	214 à 21,.

D'où l'on conclura pour valeur moyenne, $\rho = 1{,}00674$; rapport des axes comme 148 à 149.

Que la Terre eſt applatie vers les Poles.

(119) Les équations des paragraphes 117 & 118 démontrent inconteſtablement que la Terre eſt applatie vers les Poles ; en effet, il n'eſt aucune de ces équations qui ne donne pour ρ, une valeur plus grande que 1 ; il ne peut donc plus reſter d'incertitude que ſur la quantité préciſe de l'applatiſſement de la Terre.

Si, lorſque l'on a entrepris de meſurer différens dégrés du méridien, l'on s'eſt flatté de trouver des réſultats abſolument conformes à ceux que donneroit une courbe géométrique, il faut convenir qu'on a été trompé dans ſon attente ; & pour s'en convaincre, il ſuffit de jetter les yeux ſur la Table du §. 109. Dans cette Table, par exemple, le dégré du Cap eſt plus grand que celui de la Penſilvanie, ce qui eſt contraire à la théorie. Il en eſt de même du dégré de Hongrie comparé au dégré du Piémont, & du dégré de l'Autriche comparé à celui de France. Au reſte on ne doit point être étonné de ces irrégularités. Il n'eſt pas probable, en effet, que la nature ſe ſoit aſtreinte à tracer des méridiens réguliers, ce qui ſuppoſeroit une homogénité parfaite entre toutes les parties de notre Globe. Eſt-il probable d'ailleurs, que les Aſtronomes qui ont meſuré ces courbes, n'aient pas commis quelques erreurs dans leurs opérations ? Eſt-on ſûr qu'ils aient employé préciſément la même toiſe, & que cette toiſe ne ſe ſoit point altérée dans les tranſports ? Examinons maintenant une hypotheſe qui m'a paru plauſible & que l'on peut conclure des équations précédentes.

Hypotheſe ſur le rapport que l'on peut conclure des équations précédentes.

(120) Tout le monde ſait les attentions ſcrupuleuſes que M. Bouguer mettoit en général dans ſes Obſervations ; on connoît ſur-tout les ſoins infinis qu'il s'eſt donnés pour aſſurer à la meſure du Pérou toute l'exactitude dont elle étoit ſuſceptible ; on ſait enfin que la méridienne de France a été vérifiée par les Aſtronomes de l'Académie, avec toute la préciſion &

tout le zele dont ils étoient capables. Qu'il me soit permis de supposer ces mesures exactes (je fais abstraction de quelques toises sur lesquelles on peut disputer) & voyons ce qui résultera de cette hypothese. Les équations (3) & (4) du §. 115 deviendront alors

(1) — 0,0084937 toises qu'il faut ajouter au dégré du Cap — 1,0000 = 0

(2) 0,0076027 toises qu'il faut ajouter au dégré du Cercle Polaire — 0,021439 toises qu'il faut ajouter au dégré du Cap — 1,0000 = 0.

De la premiere équation, l'on tire

Nombre de toises qu'il faut soustraire du dégré du Cap = 118;

Substituant cette valeur dans la seconde équation, l'on a

Nombre de toises qu'il faut soustraire du dégré du Cercle Polaire = 200; donc enfin

$\rho = 1{,}00327$; Rapport des axes de la Terre, comme 306 à 307.

Ce rapport differe peu de celui que l'on trouve (§. 110), en supposant que les erreurs des observations en plus & en moins, se sont compensées. Ce rapport se rapproche infiniment de celui que M. de La Place a déduit de la théorie de la Terre; il satisfait aux latitudes observées sur la méridienne de France, depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan. Quelle probabilité ne réunit-il donc pas en sa faveur? Nous verrons d'ailleurs que les longueurs observées du pendule sous les différentes latitudes, viennent à l'appui de ce résultat.

(121) Je sais cependant que l'on peut faire de fortes objections contre cette conclusion. On peut dire qu'une erreur de 118 toises sur la mesure du Cap, & de 200 toises sur la mesure du Cercle Polaire, est hors des limites de toute probabilité; que de plus la comparaison des différens dégrés mesurés sur la Terre, avec celui du Cercle Polaire, donne pour valeur moyenne (§. 118) $\rho = 1{,}00674$, & pour rapport des axes celui de 148 à 149. Je sens toute la force de ce raisonnement; mais pourquoi M. Masson, en Pensilvanie, sous une latitude plus grande que celle du Cap, a-t-il eu un dégré de plus de 150 toises plus petit que celui du Cap, quoique, d'après la théorie, ce dégré dût être plus grand? Pourquoi toutes les mesures faites en Europe vers le 45^e^ dégré de latitude, tendent-elles à confirmer les mesures de France? D'ailleurs le rapport de 148 à 149 que l'on conclut des différens dégrés comparés à celui du Cercle Polaire, n'est-il pas évidemment trop grand? Au reste, on dira, si l'on veut, que toutes les mesures sont exactes; que les différences données par les résultats, ont leur source soit dans l'irrégularité réelle des méridiens, soit dans des attractions locales, qui ont pu déranger la direction du fil à plomb. Quant à moi, je n'entreprendrai point de décider cette question, il me suffit d'avoir présenté au Lecteur le véritable état du problême. L'Angleterre s'occupe maintenant de la mesure d'un dégré, & l'on ne peut qu'attendre avec impatience les résultats de cette mesure.

SECOND LIVRE.

Dans lequel on traite de quelques Phénomenes relatifs à Saturne, & particuliérement de ceux relatifs à l'Anneau de cette Planete.

EXPOSITION DU SUJET.

(122) JE me propose, dans ce second Livre, de traiter de quelques phénomenes relatifs à Saturne, & particuliérement de ceux relatifs à l'anneau de cette Planete. On connoit les disparitions périodiques de cet anneau. M. Huggens a développé le premier, les véritables principes de la matiere ; voici en quoi ils consistent.

Saturne est environné d'un anneau fort mince presque plat & concentrique à cette Planete. Le diametre de l'anneau est à celui du globe de la Planete, comme sept est à trois ; l'espace vide entre le globe & l'anneau est à peu près égal à la largeur de l'anneau, & cette largeur est à peu près un tiers du diametre de Saturne. Son plan est incliné d'environ $31^d\ 20'$ sur l'écliptique. Cet anneau n'est point lumineux par lui-même ; semblable à toutes les Planetes, il réfléchit la lumiere qu'il reçoit du Soleil ; il faut donc, pour qu'il soit visible, que le plan éclairé soit tourné vers l'Observateur.

Deux circonstances font disparoître l'anneau de Saturne ; la premiere, lorsque le plan de l'anneau venant à passer par le Soleil, les rayons lumineux émanés du Soleil parallélement au plan, glissent & ne sont point réfléchis ; la seconde, lorsque le plan situé entre le Soleil & l'Observateur, présente à la Terre sa surface obscure.

Pour calculer les phénomenes relatifs aux disparitions périodiques de l'anneau de Saturne, les élémens qu'il est sur-tout nécessaire de connoître, sont l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique, & la position du nœud de cet anneau pareillement sur l'écliptique ; c'est-à-dire la longitude de l'intersection du plan de l'anneau avec l'écliptique, à l'instant où le plan passe par le Soleil. Ces élémens peuvent donner lieu à un grand nombre de questions intéressantes ; on peut, par exemple, vouloir conclure les phénomenes futurs relatifs aux disparitions & aux apparitions de l'anneau, d'après les élémens donnés. On peut, au contraire, vouloir conclure les élémens, d'après les phénomenes observés. On peut demander si les élémens de l'anneau sont constamment les mêmes, ou si la comparaison des Observations faites à différentes époques, décelent quelqu'altération dans ces élémens. On peut demander enfin quel méchanisme soutient l'anneau au tour de la Planete. Telles sont en général les questions que je me propose de traiter dans cette partie de mon Ouvrage.

CHAPITRE PREMIER.

Expoſition d'une Méthode analytique pour calculer les Phénomenes rélatifs aux diſparitions de l'anneau de Saturne.

JUSQU'ICI l'on n'avoit appliqué que des méthodes trigonométriques au problême de la diſparition de l'anneau de Saturne; il m'a ſemblé qu'il étoit ſuſceptible d'une analyſe aſſez ſimple. Le principal mérite de cette ſolution, conſiſte à préſenter d'une maniere ſenſible, l'enſemble du problême. Au reſte, quoiqu'au premier coup-d'œil, la méthode que je vais expoſer, puiſſe n'être regardée que comme une méthode d'approximation, il eſt cependant ſi facile d'appliquer le calcul rigoureux aux phénomenes, lorſque la méthode d'approximation a mis ſur la voie de la véritable ſolution, que l'on doit regarder ma méthode, comme réſolvant rigoureuſement le problême.

ARTICLE PREMIER.

Expoſition de la Méthode.

Fig. 6. (123) Puiſque Saturne eſt environné d'un anneau qui ſe meut avec cette Planete, en gardant toujours ſon parallélíſme, ſi l'on ſuppoſe le plan de cet anneau indéfiniment prolongé, de ſorte qu'il coupe le plan de l'écliptique terreſtre ſur lequel l'orbite de Saturne eſt inclinée d'environ $2^d\ 30'\ 20''$, il eſt évident, 1°. que ce plan entraîné par le mouvement de Saturne autour du Soleil, aura toujours une interſection avec le plan de l'écliptique; 2°. que ces différentes interſections ſeront toutes paralleles entr'elles, puiſque le plan de l'anneau garde conſtamment ſon parallélíſme; 3°. que ſi le point t' eſt un des points de l'orbite terreſtre où le plan de l'anneau eſt tangent à cette orbite, le point t qui eſt à l'extrêmité du diametre tt', ſera également un point de tangence; 4°. que ſi un corps R ſe mouvoit dans la droite $Rt'St$ ſur le plan de l'écliptique, avec une viteſſe égale à celle de l'interſection mobile du plan de l'anneau, ce corps ſeroit toujours dans le plan de l'anneau, & que par conſéquent l'on peut ſubſtituer le corps R au mouvement de l'anneau; 5°. enfin que ce mouvement ne peut manquer d'être à très-peu près uniforme dans la droite $Rt'St$, puiſque les phénomenes de la diſparition de l'anneau ayant tous lieu, dans un intervalle de tems pendant lequel Saturne décrit environ ſix dégrés, de part & d'autre du point où le plan de l'anneau paſſe par le centre du Soleil, le mouvement ſuivant la droite $t't$ ne peut manquer d'être à

très-peu

très-peu près uniforme, comme le mouvement de Saturne l'eſt dans l'arc correſpondant de ſon orbite. L'exactitude de cette ſuppoſition ſera démontrée dans la ſuite. Les problêmes relatifs aux diſparitions de l'anneau de Saturne, peuvent donc ſe ramener aux conſtructions ſuivantes. Fig. 6.

Je ſuppoſe qu'un corps T circule dans un cercle $t'tPt'$ avec un mouvement uniforme ; que pendant le même tems un corps R ſe meuve d'un mouvement uniforme dans une droite $Rt'St$ paſſant par le centre S du cercle $t'tPt'$; que l'on connoiſſe le rapport du mouvement du corps T dans le cercle, au mouvement du corps R dans la droite $Rt'St$; que de plus l'on connoiſſe le point R où ſe trouvoit le corps R dans la droite $Rt'St$, à l'inſtant où le corps T étoit au point t' ; on demande 1°. l'expreſſion des arcs décrits par le corps T dans ſon orbite circulaire, depuis ſon paſſage par le point t', juſqu'aux inſtans où les corps T & R ſe ſont trouvés dans une même perpendiculaire PQ à la droite $Rt'St$. 2°. l'expreſſion de l'arc décrit par le corps T depuis ſon paſſage par le point t', juſqu'au tems où le corps R ſe trouve au point S.

Equations fondamentales du Problême.

(124) Soit

- z l'arc $t'tP$ décrit par le corps T dans ſon orbite circulaire, depuis ſon paſſage par le point t' que je prends pour l'origine des mouvemens, juſqu'à l'inſtant où les corps T & R ſe ſont trouvés dans une même perpendiculaire PQ à la droite $Rt'St$;
- u la droite RQ correſpondante décrite par le corps R dans ſon orbite rectiligne ;
- 1 le rayon de l'orbite circulaire $t'tPt'$, & à la fois le ſinus total ;
- $\frac{m}{n}$ le rapport de l'arc décrit par le corps T dans ſon orbite circulaire, à la droite RQ correſpondante décrite par le corps R ;
- a la diſtance $t'R$ du point R où ſe trouvoit le corps R dans la droite $Rt'St$ à un certain inſtant, au point t' où le corps T ſe trouvoit au même inſtant dans ſon orbite circulaire.

En vertu des conſtructions précédentes, l'on a $z = \frac{mu}{n}$; de plus puiſque PQ eſt perpendiculaire à la droite $t'St$, PQ eſt le ſinus de l'angle z, & SQ eſt ſon coſinus. Qt' eſt donc égal à $1 - \cos z$; d'ailleurs $Qt' = RQ - t'R = u - a$; donc $u - a = 1 - \cos z$; mais $u = \frac{nz}{m}$; donc

$$(1)\ \frac{n}{m}z + \cos z - 1 - a = 0.$$

Cette derniere équation donnera tous les cas où les corps T & R ſe trouveront dans une même perpendiculaire à la droite $t'St$.

Quant à la circonſtance particuliere où le corps R paſſera par le point S, comme dans ce cas $u = 1 + a$, & que d'ailleurs $u = \frac{n}{m}z$, on aura

$$(2)\ \frac{n}{m}z - 1 - a = 0.$$

Fig. 6. Lorſque l'on fera uſage des équations précédentes, on ne doit point oublier ce que la Géométrie nous apprend relativement au ſigne de coſinus z. Cette quantité eſt poſitive lorſque l'angle z eſt entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; elle eſt négative, lorſque l'angle z eſt entre 90^d & 270^d. On ne doit point auſſi oublier dans l'uſage de ces équations, que l'angle z peut être plus grand que 360^d, & que le ſigne du coſinus eſt le même pour un angle de $360^d + z$ que pour l'angle z.

Les conſtructions précédentes ſuppoſent, ainſi que je l'ai déja remarqué, que l'orbite du corps T eſt circulaire & décrite d'un mouvement uniforme, que la droite R*t*'S*t* eſt pareillement décrite d'un mouvement uniforme. On pourroit cependant avoir la ſolution du Problême quand toutes ces circonſtances n'auroient pas rigoureuſement lieu, ainſi que nous le démontrerons par la ſuite.

ARTICLE II.

Détermination du nombre des racines réelles dont les équations de la forme de l'équation (1) *du* §. *précédent, ſont ſuſceptibles.*

(125) Il eſt aiſé de voir que le nombre des racines réelles dont les équations de la forme $\frac{n}{m} z +$ coſin $z - 1 - a = 0$ ſont ſuſceptibles, dépend de la valeur de a & du rapport de m à n. Il eſt également évident que relativement aux queſtions dont il s'agit, l'on ne doit pas ſuppoſer a plus grand que $\frac{n}{m}$ arc 360^d, ou, ce qui revient au même, plus grand que $\frac{n}{m} \times \frac{2 \times 355}{113}$. En effet, cette derniere quantité étant l'expreſſion du mouvement du corps R dans la droite R*t*'S*t* pendant une revolution du corps T dans ſon orbite circulaire, ſi a ſurpaſſoit cette quantité, en la retranchant, on ne feroit que retrancher une révolution qui n'influe en aucune façon ſur la ſolution.

Je remarque enſuite que l'équation (1) du §. 124 a au moins une valeur réelle, puiſqu'il eſt impoſſible que le corps R décrive ſa ligne droite, ſans qu'il y ait au moins un inſtant où il ſe trouve dans une même perpendiculaire PQ avec le corps T. Je remarque enfin que pour déterminer le nombre des valeurs réelles de z, il faut déterminer les valeurs de a qui donnent à l'équation des racines doubles; puiſque c'eſt par ces valeurs doubles, que les racines de l'équation paſſent de l'imaginaire au réel, ou réciproquement; & que par conſéquent l'équation acquiert ou perd de nouvelles racines.

De la condition qui doit avoir lieu pour que l'équation dont il s'agit ait des racines doubles.

(126) La théorie *de maximis & minimis* nous apprend que l'équa-

tion dont il s'agit a des valeurs doubles, lorsque la condition suivante a lieu,

$$\frac{n}{m} dz + d \operatorname{cosin} z = 0.$$

Mais $d \operatorname{cosin} z = - \operatorname{sin} z \, dz$; donc

$$(1) \ \frac{n}{m} - \operatorname{sin} z = 0.$$

L'équation dont il s'agit a donc des racines doubles, quand les corps R & T se rencontrent dans une même perpendiculaire, lorsque le corps T a parcouru depuis le point t' de son orbite, un angle dont le sinus a pour expression $\frac{n}{m}$. Nous remarquerons que le même sinus appartient à deux angles différens supplémens l'un de l'autre ; c'est-à-dire, dont l'un étant z' l'autre a pour expression $180^d - z'$. Le même sinus appartient aussi aux mêmes angles augmentés de 360^d, de 2×360^d, & ainsi de suite ; de sorte que z' étant le plus petit des angles qui ont pour sinus $\frac{n}{m}$, l'on a les angles suivans qui peuvent satisfaire à la question,

$$z'$$
$$180^d - z'$$
$$360^d + z'$$
$$360^d + 180^d - z'$$
$$2 \times 360^d + z'$$
$$2 \times 360^d + 180^d - z'$$

& ainsi de suite.

Que l'équation (1) *du* §. 124 *ne peut avoir plus d'une racine réelle, qu'autant que n est plus petit que m.*

(127) Puisque le sinus d'un angle ne peut jamais surpasser le rayon, il est aisé de voir qu'à cause de la condition $\frac{n}{m} - \operatorname{sin} z = 0$, l'équation dont il s'agit ne peut avoir de racines doubles qu'autant que n est plus petit que m, ou tout au plus son égal. Car si n étoit plus grand que m, la condition qui donne des racines doubles seroit imaginaire ; l'équation (1) du §. 124 ne pourra donc acquérir des racines réelles, & conséquemment avoir plus d'une racine réelle, qu'autant que n sera plus petit que m.

Du cas où $m = n$.

(128) Supposons maintenant $m = n$, c'est-à-dire, que les corps R & T aient une même vitesse, l'un dans la ligne droite, & l'autre dans le cercle, l'on aura (§. 126 éq. (1)) $\operatorname{sin} z = 1$; $\operatorname{cosin} z = 0$; $z = 90^d$.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1) du §. 124, l'on conclura

$$(1)' \text{ Arc } 90^d - 1 - a = 0.$$

L'équation (1) du §. 124 ne pourra donc avoir de racines doubles dans le cas de $m = n$, qu'autant que l'on aura de plus $a = \text{arc } 90^d - 1$; c'est-à-dire, qu'autant que la distance du corps R au point t', sera égale à arc $90^d - 1$, à l'instant où le corps T passera par le point t'. L'équation (1) du §. 124 aura alors trois racines réelles. Dans tout autre cas, l'équation n'aura qu'une seule racine réelle.

Détermination du nombre des racines de la proposée, d'après l'inspection de la valeur de a, lorsque n est plus petit que m.

(129) Si l'on suppose que n est plus petit que m, l'équation (1) du §. 124 n'a pas essentiellement pour cela, trois, ou un plus grand nombre de racines réelles. Il faut de plus que la valeur de a soit comprise entre de certaines limites.

Pour déterminer ces limites, reprenons l'équation (1) du §. 126; $\frac{n}{m} - \sin z = 0$; & nommons

z' le plus petit des angles déterminés par l'équation $\frac{n}{m} - \sin z' = 0$.

Si l'on porte cette valeur de z' dans l'équation (1) du §. 124, l'on déterminera la valeur de a qui fait acquérir ou perdre des racines réelles à l'équation (1) du §. 124. Mais l'équation $\frac{n}{m} - \sin z' = 0$, désigne non-seulement l'angle z'; elle désigne également les angles suivans; $180^d - z'$; $360^d + z'$; $360^d + 180^d - z'$; $2 \times 360^d + z'$; $2 \times 360^d + 180^d - z'$; & ainsi de suite. Si donc l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1) du §. 124; attendu que $\cos(180^d - z') = -\cos z'$; $\cos(360^d + z') = \cos z'$; $\cos(360^d + 180^d - z') = -\cos z'$, &c.; l'on aura

$$(1)\ \frac{n}{m} z' + \cos z' - 1 - a = 0;$$

$$(2)\ \frac{n}{m}\, 180^d - \frac{n}{m} z' - \cos z' - 1 - a = 0;$$

$$(3)\ \frac{n}{m}\, 360^d + \frac{n}{m} z' + \cos z' - 1 - a = 0;$$

$$(4)\ \frac{n}{m}\, 360^d + \frac{n}{m}\, 180^d - \frac{n}{m} z' - \cos z' - 1 - a = 0;$$

$$(5)\ \frac{n}{m}\, 2 \times 360^d + \frac{n}{m} z' + \cos z' - 1 - a = 0;$$

& ainsi de suite. Ces équations vont servir à résoudre les questions relatives au nombre des racines réelles de la proposée.

Une premiere considération écarte un grand nombre des équations

précédentes comme inutiles à la recherche présente ; ce sont toutes les équations d'où l'on concluroit une valeur de a plus grande que $\frac{n}{m}$ arc 360^d ; nous avons démontré la raison de cette exclusion, dans le §. 125. Cette raison fait d'abord exclure les équations (3), (5) & (7) du présent paragraphe. En effet reprenons l'équation (1) ; si dans cette équation, l'on substitue $\frac{n}{m}$ à sin z', elle deviendra

$$z' \sin z' + \cos z' - 1 - a = 0.$$

De cette équation l'on tire

$$(6)\ a = z' \sin z' + \cos z' - 1.$$

Nous remarquerons ici que, puisque par la supposition, z' ne peut jamais surpasser 90^d, cette derniere valeur de a est évidemment positive ; d'ailleurs elle est plus petite que arc 360^d sin z', & par conséquent plus petite que $\frac{n}{m}$ arc 360^d.

(130) Si l'on nomme a' la valeur particuliere de a tirée de l'équation (6) du paragraphe précédent, & que dans les équations (3), (5), (7), &c. du même paragraphe, l'on substitue à $\frac{n}{m} z' + \cos z' - 1$, sa valeur a' ; ces équations deviendront

$$\frac{n}{m} 360^d + a' - a = 0 ;$$

$$\frac{n}{m} 2 \times 360^d + a' - a = 0 ;$$

& ainsi de suite ; d'où l'on voit que toutes les valeurs de a données par ces équations, seront toutes plus grandes que $\frac{n}{m}$ arc 360^d ; que par conséquent ces équations sont (§. 125) dans le cas d'être rejettées. Nous n'avons donc, pour déterminer le nombre des racines réelles de la proposée, qu'à considérer des équations de la forme suivante

$$(1)\ \frac{n}{m} 180^d - \frac{n}{m} z' - \cos z' - 1 - a = 0 ;$$

$$(2)\ \frac{n}{m} z' + \cos z' - 1 - a = 0 ;$$

$$(3)\ \frac{n}{m} 360^d + \frac{n}{m} 180^d - \frac{n}{m} z' - \cos z' - 1 - a = 0 ;$$

$$(4)\ \frac{n}{m} \times 2 \times 360^d + \frac{n}{m} 180^d - \frac{n}{m} z' - \cos z' - 1 - a = 0 ;$$

$$(5)\ \frac{n}{m} \times 3 \times 360^d + \frac{n}{m} 180^d - \frac{n}{m} z' - \cos z' - 1 - a = 0 ;$$

& ainsi de suite. On ne doit point oublier que dans ces équations, l'angle z' est le plus plus petit des angles déterminés par la relation suivante ; $\frac{n}{m} - \sin z' = 0$.

Du cas où les valeurs de $\frac{n}{m}$ sont comprises entre 1 & 0,2173.

(131) Nous avons vu que lorsque n est plus grand que m, l'équation (1) du §. 124 n'a qu'une seule racine réelle ; nous avons vu de plus, que lorsque $n = m$, cette équation n'a pareillement qu'une seule racine réelle, excepté toutefois dans le cas unique où l'on a d'ailleurs $a =$ arc $90^d - 1$. Nous allons examiner maintenant le cas où les valeurs de $\frac{n}{m}$ sont comprises entre 1 & 0,2173, & nous parcourrons les différentes valeurs de a, pour en conclure le nombre des racines réelles de la proposée. Les limites que nous considérons ici, comprennent tout l'espace où la proposée a essentiellement une racine réelle, & ne peut en avoir plus de trois.

(132) Nous observerons que la premiere des valeurs de a qui puisse donner de nouvelles racines réelles à la proposée, est celle que l'on conclut de l'équation (1) du §. précédent

$$(1)\; a = \frac{n}{m}\, 180^d - \frac{n}{m}\, z' - \cos z - 1.$$

Tant que a est plus petit que la valeur précédente, la proposée n'a qu'une seule racine réelle ; mais lorsque a atteint la valeur donnée par l'équation (1) la proposée acquiert deux nouvelles racines réelles, & par conséquent, elle commence à avoir trois racines réelles. Elle conserve ces trois racines réelles jusqu'à ce que a soit parvenu à la valeur déterminée par l'équation (2) du §. 130,

$$(2)\; a = \frac{n}{m}\, z' + \cos z' + 1.$$

La proposée perd alors les deux racines réelles qu'elle avoit acquises ; de sorte que dans le cas des valeurs de $\frac{n}{m}$ dont il s'agit, la proposée ne peut avoir trois racines réelles que lorsque les valeurs de a sont comprises entre les limites données par les équations (1) & (2). En deçà & au-delà de ces limites, la proposée n'a qu'une seule racine réelle.

Quelle doit être la valeur de $\frac{n}{m}$ pour que l'équation (1) du §. 130 donne pour valeur de a ; $a = 0$.

(133) Si l'on suppose $a = 0$, dans l'équation (1) du §. 130, & que l'on substitue à $\frac{n}{m}$, sa valeur $\sin z'$; l'équation deviendra

$$(1)\; \sin z' \,(180^d - z') - \cos z' - 1 = 0.$$

De cette équation, l'on tire $z' = 46^d\ 26'$; ſubſtituant maintenant cette valeur de z' dans l'équation $\frac{n}{m} - \sin z' = 0$; l'on conclura $\frac{n}{m} = 0{,}7246$.

(134) Si la valeur de $\frac{n}{m}$ continue à diminuer de plus en plus, l'équation (1) du §. 130 donnera pour a une valeur négative ; l'on aura alors recours à l'équation (3) du même paragraphe

$$(1)\ a = \frac{n}{m}\ 360^d + \frac{n}{m}\ 180^d - \frac{n}{m}\ z' - \cos z' - 1 ;$$

& cette équation donnera des valeurs de a poſitives, mais plus petites que $\frac{n}{m}\ 360^d$; puiſqu'en effet, par la ſuppoſition, la quantité $\frac{n}{m}\ 180^d - \frac{n}{m}\ z' - 1$ eſt une quantité négative.

Dans ce cas, la propoſée aura trois racines réelles, depuis $a = 0$; juſqu'à la valeur de a déterminée par l'équation (2) du §. 130

$$(2)\ a = \frac{n}{m}\ z' + \cos z' - 1.$$

Elle perdra deux de ſes racines réelles, lorſque a ſera parvenu à la valeur déterminée par l'équation précédente ; & elle n'aura qu'une ſeule racine dans tout l'intervalle compris entre cette derniere valeur de a, & celle donnée par l'équation (1) du préſent paragraphe. Lorſqu'enfin a aura atteint la valeur donnée par cette équation, la propoſée reprendra deux nouvelles racines réelles.

Réſumé de ce qui vient d'être démontré.

(135) Pour nous réſumer, nommons

a' la valeur de a donnée par l'équation (1) du §. 130 ;
a'' la valeur de a donnée par l'équation (2) du §. 130 ;
a''' la valeur de a donnée par l'équation (3) du §. 130 ;
a'''' la valeur de a donnée par l'équation $a = \frac{n}{m}\ 360^d$;

& ſuppoſons les valeurs de $\frac{n}{m}$ compriſes entre 1 & 0,7246. Dans ce cas

Depuis $a = 0$ juſqu'à $a = a'$, la propoſée n'aura qu'une ſeule racine réelle ;
Depuis $a = a'$, juſqu'à $a = a''$, la propoſée aura trois racines réelles ;
Depuis $a = a''$ juſqu'à $a = a'''$, la propoſée n'aura qu'une racine réelle.

Si l'on ſuppoſe les valeurs de $\frac{n}{m}$ compriſes entre 0,7246 & 0,2173 ;

Depuis $a = 0$, juſqu'à $a = a''$, la propoſée aura trois racines réelles ;
Depuis $a = a''$ juſqu'à $a = a'''$, la propoſée n'aura qu'une ſeule racine ;
Depuis $a = a'''$ juſqu'à $a = a''''$, la propoſée aura trois racines réelles.

Quelle doit être la valeur de $\frac{n}{m}$ pour que la proposée ait essentiellement trois racines réelles, & commence à pouvoir en avoir cinq?

(136) Dans le dernier cas que nous venons de considérer, on a pu remarquer que la proposée a toujours trois racines reelles, excepté toutes-fois dans l'intervalle de a'' à a'''. Si l'on suppose cet intervalle nul, on aura la condition qui donnera essentiellement à la proposée trois racines réelles. Cette supposition est celle de $a'' = a'''$; il faut donc que les éq. (2) & (3) du §. 130 donnent une même valeur de a. Si l'on égale les deux valeurs de a tirées de ces équations, & que l'on substitue à $\frac{n}{m}$ sa valeur sin z', l'on aura pour condition du Problême,

$$(1)\ \sin z'\,(270^d - z') - \cos z' = 0.$$

De cette équation, l'on tire $z' = 12^d\ 32'\ 50''$; $\frac{n}{m} = 0{,}2173$; & cette valeur de $\frac{n}{m}$ est celle qui assure essentiellement trois racines réelles à l'équation (1) du §. 124.

Du cas où les valeurs de $\frac{n}{m}$ sont comprises entre 0,2173 & 0,1284.

(137) Nous allons parcourir maintenant l'espace dans lequel l'équation (1) du §. 124 a essentiellement trois racines réelles, & peut en avoir cinq.

Nous observerons que la premiere des valeurs de a qui puisse donner de nouvelles racines réelles à la proposée est celle que l'on conclut de l'équation (3) du §. 130.

$$(1)\ a = \frac{n}{m}\,360^d + \frac{n}{m}\,180^d - \frac{n}{m}\,z' - \cos z' - 1.$$

Tant que a est plus petit que la valeur précédente, la proposée n'a que trois racines réelles; mais lorsque a atteint la valeur donnée par l'équation (1) la proposée acquiert deux nouvelles racines réelles, & par conséquent elle commence à avoir cinq racines. Elle conserve ces cinq racines jusqu'à ce que a soit parvenu à la valeur déterminée par l'équation (2) du §. 130

$$(2)\ a = \frac{n}{m}\,z' + \cos z' - 1.$$

La proposée perd alors les deux racines réelles qu'elle avoit acquises; de sorte que dans le cas des valeurs de $\frac{n}{m}$ dont il s'agit, la proposée

ne.

ne peut avoir cinq racines réelles, que lorſque les valeurs de a ſont compriſes entre les limites données par les équations (1) & (2).

Quelle doit être la valeur de $\frac{n}{m}$ pour que l'équation (3) du §. 130 donne pour valeur de a, $a = 0$?

(138) Si l'on ſuppoſe $a = 0$ dans l'équation (3) du §. 130, & que l'on ſubſtitue à $\frac{n}{m}$ ſa valeur ſin z', l'équation deviendra

$$(1)\quad (360^d + 180^d - z') \sin z' - \cos z' - 1 = 0.$$

De cette équation l'on tire $z' = 12^d\ 23'\ 48''$. Subſtituant maintenant cette valeur de z' dans l'équation $\frac{n}{m} - \sin z' = 0$, l'on conclura $\frac{n}{m} = 0,2147$.

(139) Si la valeur de $\frac{n}{m}$ continue à diminuer de plus en plus, l'équation (3) du §. 130 donnera pour a une valeur négative; l'on aura alors recours à l'équation (4) du même paragraphe

$$(1)\quad a = \frac{n}{m}\, 720^d + \frac{n}{m}\, 180^d - \frac{n}{m}\, z' - \cos z' - 1.$$

Et cette équation donnera des valeurs de a poſitives, mais plus petites que $\frac{n}{m}\, 360^d$; puiſqu'en effet, par la ſuppoſition, $\frac{n}{m}\, 360^d + \frac{n}{m}\, 180^d - \frac{n}{m}\, z' - \cos z' - 1$ eſt une quantité négative.

Dans ce cas, la propoſée aura cinq racines réelles depuis $a = 0$, juſqu'à la valeur de a déterminée par l'équation (2) du §. 130,

$$(2)\quad a = \frac{n}{m}\, z' + \cos z' - 1.$$

Elle perdra deux de ſes racines, lorſque a ſera parvenu à la valeur déterminée par l'équation précédente; & elle n'aura que trois racines réelles dans tout l'intervalle compris entre cette derniere valeur de a & celle donnée par l'équation (1) du préſent paragraphe. Lorſqu'enfin a aura atteint la valeur donnée par cette derniere équation, la propoſée reprendra deux nouvelles racines réelles.

Réſumé de ce qui vient d'être déterminé.

(140) Pour nous réſumer, nommons

a' la valeur de a donnée par l'équation (3) du §. 130;
a'' la valeur de a donnée par l'équation (2) du §. 130;
a''' la valeur de a donnée par l'équation (4) du §. 130;
a'''' la valeur de a donnée par l'équation $a = \frac{n}{m}\, 360^d$;

& ſuppoſons les valeurs de $\frac{n}{m}$ compriſes entre 0,2173 & 0,2147. Dans ce cas

Depuis $a=0$, juſqu'à $a=a'$, la propoſée n'aura que trois racines réelles;
Depuis $a=a'$ juſqu'à $a=a''$, la propoſée aura cinq racines réelles;
Depuis $a=a''$ juſqu'à $a=a''''$, la propoſée n'aura que trois racines réelles.

Si les valeurs de $\frac{n}{m}$ ſont compriſes entre 0,2147 & 0,1284; alors,

Depuis $a=0$, juſqu'à $a=a''$, la propoſée aura cinq racines réelles;
Depuis $a=a''$ juſqu'à $a=a'''$, la propoſée n'aura que trois racines réelles;
Depuis $a=a'''$, juſqu'à $a=a''''$ la propoſée aura cinq racines réelles.

Quelle doit être la valeur de $\frac{n}{m}$ pour que la propoſée ait eſſentiellement cinq racines réelles, & commence à pouvoir en avoir ſept?

(141) Dans le dernier cas que nous venons de conſidérer, on a pu remarquer que la propoſée a toujours cinq racines réelles, excepté toutefois dans l'intervalle de a'' à a'''. Si l'on ſuppoſe cet intervalle nul, on aura la condition qui donnera eſſentiellement à la propoſée cinq racines réelles; cette ſuppoſition eſt celle de $a''=a'''$; il faut donc que les équations (2) & (4) du §. 130 donnent une même valeur de a. Si l'on égale les deux valeurs de a tirées de ces équations, & que l'on ſubſtitue à $\frac{n}{m}$ ſa valeur ſin z', l'on aura pour condition du problême,

$$(1)\ \sin z'\,(450^d - z') - \cos z' = 0.$$

De cette équation l'on tire $z = 7^d\ 22'\ 31''$; $\frac{n}{m} = 0,1284$; & cette valeur de $\frac{n}{m}$ eſt celle qui aſſure eſſentiellement cinq racines réelles à l'équation (1) du §. 124.

Généraliſation des principes précédens, pour déterminer dans tous les cas le nombre des racines réelles de l'équation (1) *du* §. 124.

(142) La méthode par laquelle nous avons déterminé le nombre des racines réelles de l'équation (1) du §. 124, eſt générale; & comme nous avons diſcuté tous les cas dont nous aurons beſoin par la ſuite, nous pourrions ne rien ajouter à cette diſcuſſion. Si l'on vouloit cependant généraliſer les principes précédens pour déterminer tout de ſuite, dans toutes les ſuppoſitions poſſibles ſur la valeur de $\frac{n}{m}$, le nombre des racines réelles de la propoſée, on feroit la réflexion ſuivante.

Nous avons vu que la condition qui aſſure à l'équation (1) du §. 124,

une racine réelle, & lui donne la possibilité d'avoir trois racines réelles suivant les différentes valeurs de a, se détermine par l'équation suivante,

$$(1)\ \sin z' (\text{arc } 90^d - z') - \cos z' = 0\,;$$

la valeur de $\frac{n}{m}$ correspondante étant déterminée dans tous les cas, par l'équation $\frac{n}{m} - \sin z' = 0$.

Nous avons vu (§. 136) que la condition qui assure à l'équation (1) du §. 124, trois racines réelles & lui donne la possibilité d'avoir cinq racines réelles suivant les différentes valeurs de a, se détermine par l'équation

$$(2)\ \sin z' (3 \times \text{arc } 90^d - z') - \cos z' = 0.$$

Nous avons vu enfin (§. 141) que la condition qui assure à l'équation (1) du §. 124, cinq racines réelles, & lui donne la possibilité d'avoir sept racines réelles suivant les différentes valeurs de a, se détermine par l'équation

$$(3)\ \sin z' (5 \times \text{arc } 90^d - z') - \cos z' = 0.$$

Et comme la loi est établie, il est aisé de sentir que si l'on nomme

ν le nombre des racines réelles de l'équation (1) du §. 124,

l'on aura pour déterminer la supposition sur $\frac{n}{m}$ qui assure à l'équation (1) du §. 124 un nombre ν de racines réelles, & lui donne la possibilité d'avoir un nombre $\nu + 2$ de racines réelles suivant les différentes valeurs de a,

$$(4)\ \sin z' (\nu \times \text{arc } 90^d - z') - \cos z' = 0.$$

On cherchera donc l'angle z' qui satisfait à cette derniere équation ; l'on portera cette valeur dans l'équation

$$(5)\ \frac{n}{m} - \sin z' = 0\,;$$

& l'on aura la valeur de $\frac{n}{m}$ demandée.

(143) Les équations (4) & (5) du §. précédent donnent bien la condition qui assure à l'équation (1) du §. 124 un nombre ν de racines réelles ; mais elle laisse encore dans l'incertitude de savoir si cette équation n'a pas un nombre $\nu + 2$ de racines réelles ; & nous avons dit que la condition dépend des valeurs particulieres de a dans la proposée.

Il est encore aisé de lever cette difficulté. En effet, si l'on nomme

ν le nombre des racines réelles qu'a essentiellement la proposée dans une certaine supposition sur la valeur de $\frac{n}{m}$;

$\nu + 2$ le nombre des racines réelles qu'elle peut avoir dans la même supposition sur $\frac{n}{m}$, mais qui dépendent des différentes valeurs de a ;

arc b le plus petit des arcs qui a $\frac{n}{m}$ pour sinus ;

& que l'on confidere trois équations de la forme fuivante,

$$(1)\ \frac{n}{m}\ \text{arc}\ b + \text{cof. arc}\ b - 1 - a = 0;$$

$$(2)\ \frac{n}{m}\left(\nu\ \text{arc}\ 180^d - \text{arc}\ b\right) - \text{cof. arc}\ b - 1 - a = 0;$$

$$(3)\ \frac{n}{m}\left((\nu + 2)\ \text{arc}\ 180^d - \text{arc}\ b\right) - \text{cof. arc}\ b - 1 - a = 0.$$

L'infpection de ces équations diffipera toute incertitude.

(144) On examinera d'abord fi l'équation (2) du §. précédent donne une valeur pofitive de a, en fubftituant dans cette équation la valeur de $\frac{n}{m}$ qui a lieu dans la propofée.

Si cette valeur eft pofitive, foit

a' cette valeur pofitive ;

a'' la valeur de a que l'on conclut de l'équation (1) du paragraphe précédent, en fubftituant pareillement dans cette équation, la valeur de $\frac{n}{m}$ qui a lieu dans la propofée;

a'''' la valeur de a donnée par l'équation $a = \frac{n}{m}$ arc 360^d;

Alors,

Depuis $a = 0$, jufqu'à $a = a'$, la propofée n'aura qu'un nombre ν de racines réelles.

Depuis $a = a'$, jufqu'à $a = a''$, la propofée aura un nombre $\nu + 2$ de racines réelles.

Depuis $a = a''$ jufqu'à $a = a''''$, la propofée n'aura qu'un nombre ν de racines réelles.

(145) Si l'équation (2) donne une valeur négative de a, alors on aura recours à l'équation (3) qui donnera effentiellement une valeur pofitive, mais plus petite que $\frac{n}{m}$ arc 360^d. Soit

a''' cette valeur pofitive ;

& confervons les définitions de a'', a'''' du §. précédent ;

Depuis $a = 0$, jufqu'à $a = a''$, la propofée aura un nombre $\nu + 2$ de racines réelles.

Depuis $a = a''$, jufqu'à $a = a'''$, la propofée n'aura qu'un nombre ν de racines réelles.

Depuis $a = a'''$, jufqu'à $a = a''''$, la propofée aura un nombre $\nu + 2$ de racines réelles.

Remarque ſur les recherches précédentes.

(146) Les recherches précédentes ſont fondées ſur une remarque du §. 125, dans laquelle nous avons dit que pour déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (1) du §. 124, il faut déterminer les valeurs de a qui donnent à l'équation des racines doubles; puiſque c'eſt par ces valeurs doubles que les racines de l'équation paſſent de l'imaginaire au réel, ou réciproquement; & que par conſéquent, l'équation acquiert ou perd des racines réelles. Quoique cette propoſition n'ait peut-être beſoin que d'être énoncée, en voici cependant la démonſtration.

Pour démontrer analytiquement cette propoſition, je me ſers du Théorême de Taylor connu de tous les Géometres, par lequel on enſeigne à trouver la valeur analytique d'une fonction, lorſque la variable que cette fonction renferme, croît ou décroît d'une petite quantité.

Soit

φx une fonction de la variable x;
$dx\, \Delta x$ la différentielle de cette fonction;
$dx\, \Gamma x$, la différentielle de la fonction Δx;
$dx\, \Psi x$, la différentielle de la fonction Γx;

& ainſi de ſuite. Soit enſuite

$\varphi(x+z)$ une fonction de $x+z$ dans laquelle $x+z$ eſt combinée de la même maniere que x eſt combinée dans φx.

On démontre que l'on a généralement

$$(1)\quad \varphi(x+z)=\varphi x+z\Delta x+\frac{z^2\,\Gamma x}{1\times 2}+\frac{z^3\,\Psi x}{1\times 2\times 3}+\&c.$$

(147) Appliquons ce principe au cas dont il s'agit.

Nous avons en général

$$(1)\quad a=\frac{n}{m}z+\operatorname{cof} z-1.$$

Reduiſons en ſérie chacun des membres de cette équation, au moyen du théorême précédent. Il eſt aiſé de voir que ſi l'on ſuppoſe que, tandis que la variable a qui compoſe le premier membre de l'équation, croît d'une petite quantité α, la variable z qui entre dans le ſecond membre, croît d'une autre petite quantité β; l'on aura en vertu du théorême,

$$(2)\quad a+\alpha=\frac{n}{m}z+\operatorname{cof} z-1+\beta\left(\frac{n}{m}-\operatorname{fin} z\right)-\frac{\beta^2\operatorname{cof} z}{1\times 2}+\frac{\beta^3\operatorname{fin} z}{1\times 2\times 3}\&c.$$

Mais en vertu de l'équation (1), $a=\frac{n}{m}z+\operatorname{cof} z-1$. De plus, puiſque les valeurs particulieres de z que nous conſidérons ſont celles qui répondent aux racines doubles de la propoſée; l'on a relativement à ces points, l'équation ſuivante (§. 126) $\frac{n}{m}-\operatorname{fin} z=0$; donc dans le

53073

cas où la quantité β est infiniment petite, l'on a

$$(3)\quad 2\alpha + \beta^2 \cos z = 0\,;$$

Donc la réalité de la valeur de β dépend du signe de α ; donc c'est par la valeur particuliere de a correspondante aux racines doubles de l'équation, que cette équation acquiert de nouvelles valeurs réelles, ou réciproquement ; puisqu'en-deçà de cette valeur, β est réel, & qu'au-delà de cette valeur β, est imaginaire ; ou réciproquement.

(148) On démontre par la même analyse, que l'équation ne peut perdre ou acquérir de nouvelles valeurs réelles, que par les points particuliers qui répondent aux racines doubles. En effet, s'il n'étoit pas question de ces points, la quantité $\frac{n}{m} - \sin z$ ne seroit pas nulle, & l'on auroit en vertu du théorême, dans le cas où β est une quantité infiniment petite,

$$\alpha - \beta\left(\frac{n}{m} - \sin z\right) = 0.$$

D'où l'on voit que, soit que l'on suppose α positif ou négatif, l'on aura toujours une valeur de β réelle.

Fig. 6. (149) Cette même proposition se démontre synthétiquement, de la maniere suivante.

Puisque l'anneau se meut uniformement suivant la direction Rt'St, & que la Terre ne quitte point le cercle t' t P, si du lieu P de la Terre dans son orbite, l'on abaisse sur la droite Rt'St une perpendiculaire PQ, il est aisé de voir que toutes les fois que le point d'intersection de cette perpendiculaire avec la droite Rt'St, précédera l'intersection du plan de l'anneau avec la même ligne droite, il faudra nécessairement que la Terre passe par le plan de l'anneau. Prenons les positions respectives de la Terre & de l'anneau à l'époque du commencement des mouvemens. A cet instant, l'anneau est en R, & la Terre est en t' ; la perpendiculaire abaissée du lieu de la Terre sur la droite Rt'St précede donc le lieu de l'anneau ; & il y a essentiellement un passage de la Terre par le plan de l'anneau. Après ce passage, l'anneau précede la Terre ; & il ne peut y avoir de nouveau passage de la Terre par le plan de l'anneau, qu'autant qu'en vertu des mouvemens respectifs, la Terre regagnera l'anneau & le dépassera une seconde fois. Mais si la Terre dépasse l'anneau, la perpendiculaire abaissée du lieu de la Terre sur la droite Rt'St précédera le plan de l'anneau ; il faudra donc nécessairement, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, que la Terre passe encore une fois par le plan de l'anneau. Et comme ce raisonnement est général, on voit que la proposée dont les racines réelles représentent les passages de la Terre par le plan de l'anneau, ne peut acquérir une nouvelle racine, sans qu'elle en acquiere deux, ou réciproquement. C'est donc par les racines doubles de la proposée que les valeurs passent de l'imaginaire au réel, ou réciproquement,

c'eſt-à-dire, par les racines correſpondantes aux points où la Terre s'éloigne de l'interſection du plan de l'anneau avec l'écliptique, à l'inſtant où elle vient de l'atteindre.

ARTICLE III.

Détermination approchée des équations qui ont lieu pour la Terre & pour les autres Planetes.

(150) Je me propoſe dans cet Article, de donner une détermination approchée des équations qui ont lieu pour la Terre & pour les autres Planetes. Ces équations ſuffiront pour donner une idée ſenſible des phénomenes des diſparitions & des réapparitions de l'anneau pour toutes les Planetes. Je donnerai, dans la ſuite, aux équations relatives à la Terre, toute l'exactitude dont elles ſont ſuſceptibles.

Elémens dont on fera uſage dans les Calculs ſuivans.

	Moyennes diſtances.	Révolutions ſidérales.			
Mercure	0,3870988	87 jours	23h	15′	37″
Vénus	0,7233324	224	16	49	13
La Terre	1,0000000	365	6	9	11
Mars	1,5236927	686	23	30	43
Jupiter	5,2009791	4332	8	51	26
Saturne	9,5393683	10761	14	36	42
Herſchell	19,0818000	30445	18	0	0

Des équations qui ont lieu pour Mercure.

(151) Puiſque la moyenne diſtance de Mercure au Soleil eſt à la moyenne diſtance de Saturne au Soleil, comme 0,3870988 eſt à 9,5393683, le rayon de l'orbite de Mercure ſoutend un angle de $2^d\ 19'\ 40''$ dans l'orbite de Saturne. Saturne parcourt donc un angle de $2^d\ 19'\ 40''$ dans ſon orbite, dans l'intervalle de tems qui s'écoule depuis l'inſtant où le plan de ſon anneau eſt tangent à l'orbite de Mercure, juſqu'à l'inſtant où ce plan paſſe par le Soleil; & comme Saturne emploie, en nombres ronds, 10762 jours à décrire 360^d dans ſon orbite, l'intervalle qu'il emploie à décrire $2^d\ 19'\ 40''$, eſt de 69,7 jours. Le plan de l'anneau emploie donc 139,4 jours à parcourir le diametre de l'orbite de Mercure, ou, ce qui revient au même, une quantité égale à la $\frac{113^e}{355}$ partie de l'orbite de Mercure. Il emploieroit donc $\frac{355}{113} \times 139{,}4$ jours à parcourir l'orbite de Mercure rectifiée. Mais Mercure emploie 88 jours à parcourir le même eſpace; donc la viteſſe de Mercure dans ſon orbite

eſt à la viteſſe ſimultanée de l'anneau de Saturne, dans la ligne droite qu'il parcourt, comme $\frac{355}{113}$ × 139,4 eſt à 88. Donc $n : m :: 88 : \frac{355}{113}$ × 139,4 :: 0,2009 : 1. Les équations qui ont lieu pour Mercure ſont donc

$$(1)\ 0,2009\, z + \cos z - 1 - a = 0;$$

$$(2)\ 0,2009\, z - 1 - a = 0.$$

(152) Puiſque la valeur de $\frac{n}{m}$, relativement à Mercure, eſt entre 0,2147 & 0,1284, on voit (§. 140) que l'équation (1) a eſſentiellement trois racines réelles ; & que même elle peut en avoir cinq, ſuivant les différentes valeurs de a. D'ailleurs l'équation (2) a toujours une valeur réelle. La ſomme des racines réelles des équations (1) & (2) eſt donc toujours au moins égale à quatre ; & le nombre de ces racines peut, dans de certains cas, être égal à ſix. Et comme chaque racine réelle donne, ou une diſparition, ou une réapparition de l'anneau, on voit que, par rapport à Mercure, il y a telles circonſtances qui peuvent donner trois diſparitions & trois réapparitions ſucceſſives de l'anneau de Saturne ; & que de plus il y a toujours eſſentiellement deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

Des équations qui ont lieu pour Vénus.

(153) Par des calculs analogues, on trouvera que les équations qui ont lieu pour Vénus, ſont

$$(1)\ 0,2751\, z + \cos z - 1 - a = 0;$$

$$(2)\ 0,2751\, z - 1 - a = 0.$$

Puiſque relativement à Vénus, la valeur de $\frac{n}{m}$ eſt entre 0,7246 & 0,2173, on voit (§. 135) que l'équation (1) a eſſentiellement une racine réelle, & qu'elle peut en avoir trois, ſuivant les différentes valeurs de a ; d'ailleurs l'équation (2) a toujours une racine réelle. La ſomme des racines réelles des équations (1) & (2) eſt donc toujours au moins égale à 2, & le nombre de ces racines peut même, dans de certains cas, être égal à quatre. Et comme chaque racine réelle donne ou une diſparition ou une réapparition, on voit que par rapport à Vénus il y a des circonſtances qui ne donnent qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau, tandis que d'autres circonſtances donnent deux diſparitions & deux réapparitions.

Des équations qui ont lieu pour la Terre.

(154) Par de ſemblables calculs, on trouvera que les équations qui ont

ont lieu ponr la Terre, sont

(1) $0,3228\ z + \cos z - 1 - a = 0$;

(2) $0,3228\ z - 1 + a = 0$.

Ces équations ne sont qu'approchées, & nous nous proposons d'en donner de plus exactes. On voit seulement que la Terre est dans le cas de Vénus, & qu'il y a des circonstances qui ne donnent qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau, tandis que d'autres circonstances donnent deux disparitions & deux réapparitions. Nous discuterons toutes ces questions dans la suite.

Des équations qui ont lieu pour Mars.

(155) Les équations qui ont lieu pour Mars, sont

(1) $0,3976\ z + \cos z - 1 - a = 0$;

(2) $0,3976\ z - 1 - a = 0$.

On voit par-là, que Mars est dans le cas de Vénus & de la Terre, & qu'il y a des circonstances qui ne donnent qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau, tandis que d'autres circonstances donnent deux disparitions & deux réapparitions.

Des équations qui ont lieu pour Jupiter.

(156) La distance de Jupiter au Soleil est à la distance de Saturne au Soleil, comme 5,2009791 est à 9,5393683. Le rayon de l'orbite de Jupiter soutend donc un angle de $33^d\ 2'\ 20''$ dans l'orbite de Saturne ; Saturne parcourt donc un angle de $33^d\ 2'\ 20''$ dans son orbite, dans l'intervalle de tems qui s'écoule depuis l'instant où le plan de l'anneau est tangent à l'orbite de Jupiter, jusqu'à l'instant où ce plan passe par le Soleil ; & comme Saturne emploie 10762 jours à décrire 360^d, il emploie 988 jours à décrire $33^d\ 2'\ 20''$. Le plan de l'anneau emploie donc 1976 jours à parcourir le diametre de l'orbite de Jupiter; ou, ce qui revient au même, une quantité égale à la $\frac{113^e}{355}$ partie de l'orbite de Jupiter. Il emploieroit donc $\frac{355}{113} \times 1976$ jours à parcourir l'orbite de Jupiter rectifiée. Mais Jupiter emploie 4332 jours à parcourir la même quantité ; donc la vitesse de Jupiter dans son orbite est à la vitesse simultanée de l'anneau de Saturne dans le sens du diametre de l'orbite de Jupiter, comme $\frac{355}{113} \times 1976 : 4332$; donc $n : m :: 4332 : \frac{355}{113} \times 1976$; donc $\frac{n}{m} = 0,6978$; les équations qui ont lieu pour Jupiter sont donc

(1) $0,6978\ z + \cos z - 1 - a = 0$;

(2) $0,6978\ z - 1 - a = 0$.

On voit par-là que Jupiter est dans le cas de Mars, de la Terre & de Vénus, & qu'il y a des circonstances qui ne donnent qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau, tandis que d'autres circonstances donnent deux disparitions & deux réapparitions.

Remarque sur les équations relatives à Jupiter.

(157) Relativement à Jupiter, l'on a pu remarquer que Saturne parcourt un angle de $33^d\ 2'\ 20''$ dans son orbite, dans l'intervalle de tems qui s'écoule depuis l'instant où le plan de l'anneau est tangent à l'orbite de Jupiter, jusqu'à l'instant où ce plan passe par le Soleil. Si l'on se rappelle les constructions primitives, l'on pourra peut-être avoir quelque scrupule sur l'uniformité du mouvement de l'intersection de l'anneau dans le sens du diametre de l'orbite de Jupiter. Pour ne rien laisser à désirer à ce sujet, nous allons donner, en peu de mots, la forme des équations rigoureuses qui résolvent le Problême ; bien entendu que ces équations s'appliqueroient également à la Terre.

Fig. 7. Au lieu de supposer que le corps R se meut d'un mouvement uniforme suivant la droite $t''t'Stt'''$, on supposera que pendant que le corps T parcourt son orbite circulaire $t'Tt$, le corps R parcourt un autre orbite circulaire $t''R'Rt'''$, en menant avec lui un plan RQ toujours parallele à lui-même, & perpendiculaire à la droite $t''t'Stt'''$ passant par le centre S des deux cercles.

Soit

- 1 le rayon St' du cercle $t'Tt$ que je prends pour sinus total ;
- r le rayon du cercle $t''R'Rt'''$;
- a l'angle $t''SR'$ compris entre le point t'' & le point R' où se trouvoit le corps R dans son orbite, à l'instant où le corps T se trouvoit au point t' de son orbite ;
- z l'angle $t'ST$ décrit par le corps T dans son orbite, depuis son passage par le point t' que je prends pour l'origine des mouvemens, jusqu'à l'instant où le corps T s'est trouvé dans le plan RQ que le corps R mene avec lui ;
- u l'angle R'SR correspondant décrit pendant le même tems par le corps R dans son orbite ;
- $\frac{n}{m}$ le rapport des angles décrits dans le même tems par les corps R & T dans leurs orbites respectives.

En vertu des constructions précédentes, l'on a

$$(1)\quad nz - mu = 0.$$

De plus, puisque par la supposition, les corps R & T sont dans une même droite RQ perpendiculaire au diametre $t''t'SQtt'''$ du cercle $t''Rt'''$; on a

$$(2)\quad \cos z - r\cos(u+a) = 0.$$

D'ailleurs l'analyse nous apprend que si deux angles u & z sont entr'eux comme n est à m, l'on a l'équation suivante entre leurs cosinus

$$(3)\quad (\cos z + \sqrt{(\cos^2 z - 1)})^n - (\cos u + \sqrt{(\cos^2 u - 1)})^m = 0.$$

Si dans cette derniere équation l'on élimine coſ. z au moyen de l'équation (2), l'on aura

$$(4)\ (r\ \text{coſ.}(u+a)+\sqrt{(r^2\ \text{coſ}^2(u+a)-1)})^n$$
$$-(\text{coſ}\ u+\sqrt{(\text{coſ}^2 u-1)})^m=0.$$

C'eſt l'équation qu'auroit à diſcuter un Obſervateur placé dans Jupiter.

(158) On pourroit faire ſur l'équation (4) du §. précédent, des recherches analogues à celles auxquelles nous nous ſommes livrés, relativement à l'équation (1) du §. 124, pour déterminer le nombre de ſes racines réelles. Les procédés ſeroient à peu près les mêmes que ceux dont nous avons fait uſage. Il faudroit avant tout déterminer quelles ſont les valeurs de a qui donnent à l'équation des valeurs doubles relativement à u. Et d'abord, ſi l'on différencie l'équation (2) du paragraphe précédent, & que dans cette équation differenciée l'on faſſe $da=0$, l'on aura

$$(1)\ \text{ſin}\ z\,dz-r\ \text{ſin}\ (u+a)\,du=0.$$

Mais à cauſe de l'équation (1) du même paragraphe, $ndz-m\,du=0$; donc

$$(2)\ m\ \text{ſin}\ z-nr\ \text{ſin}\ (u+a)=0.$$

D'ailleurs de l'équation (2) du §. 157, l'on tire

$$(3)\ 1-\text{ſin}^2 z-r^2+r^2\ \text{ſin}^2\ (u+a)=0.$$

Si dans cette équation l'on élimine ſin z au moyen de l'équation précédente, l'on conclura

$$(4)\ \text{ſin}\ (u+a)=\pm\frac{m}{r}\sqrt{\left(\frac{r^2-1}{m^2-n^2}\right)}.$$

Ces recherches m'éloigneroient trop de mon objet; je remarquerai ſeulement que puiſque Jupiter & Saturne ont le ſoleil pour centre de leurs mouvemens, & que l'on ſuppoſe leurs orbites circulaires, les quarrés des angles traverſés par ces corps dans un même tems, ſont en raiſon inverſe du cube de leurs grands axes; on a donc $m^2 : n^2 :: r^3 : 1$; donc $r\sqrt{(m^2-n^2)}=m\sqrt{\left(\frac{r^3-1}{r}\right)}$; l'équation (4) peut donc être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(5)\ \text{ſin}\ (u+a)=\pm\sqrt{\left(\frac{r^3-r}{r^3-1}\right)}.$$

Des équations qui ont lieu pour la Planete d'Herſchell.

(159) La Planete d'Herſchell préſente une ſingularité relativement aux calculs dont il s'agit. Cette Planete eſt ſupérieure par rapport à Saturne; & juſqu'ici nous n'avons conſidéré que des Planetes inférieures. Le calcul n'en eſt pas cependant plus difficile; en effet, ſi l'on réfléchit ſur la nature du Problême, on verra facilement que, relativement aux diſparitions & aux réapparitions de l'anneau, il eſt indifférent que ce ſoit l'une ou l'autre des Planetes, ſupérieure ou inférieure, qui ait un anneau,

puisque les mouvemens relatifs de cet anneau sont absolument les mêmes dans les deux hypothèses. Pour conserver, en conséquence, l'uniformité dans les solutions, nous supposerons que c'est la Planete d'Herschell qui est environnée d'un anneau.

(160) Suivant M. de la Place, la moyenne distance de la Planete d'Herschell au Soleil est de 19,0818000, & sa révolution sidérale est de 30446 jours en nombres ronds. Maintenant puisque la moyenne distance de Saturne au Soleil est à la moyenne distance de la Planete d'Herschell au Soleil, comme 9,5393683 est à 19,0818000, le rayon de l'orbite de Saturne soutend un angle de $29^d\ 59'\ 36''$ dans l'orbite de la Planete d'Herschell. La Planete d'Herschell parcourt donc un angle de $29^d\ 59'\ 36''$ dans son orbite, dans l'intervalle de tems qui s'écoule depuis l'instant où le plan de l'anneau que je la suppose mener après elle, est tangent à l'orbite de Saturne, jusqu'à l'instant où ce plan passe par le Soleil; & comme la Planete d'Herschell emploie 30446 jours à décrire 360^d, elle emploie 2537 jours à décrire $29^d\ 59'\ 36''$; le plan de l'anneau de la Planete d'Herschell emploieroit donc 5074 jours à parcourir le diametre de l'orbite de Saturne. D'après ces données, on trouvera facilement que les équations qui ont lieu pour la Planete d'Herschell, sont

$$(1)\quad 0,6751\, z + \cos z - 1 - a = 0,$$

$$(2)\quad 0,6751\, z - 1 - a = 0.$$

On voit par-là que la Planete d'Herschell est dans le cas de Vénus, de la Terre, de Mars & de Jupiter.

Remarque sur les équations qui ont lieu pour la Lune.

(161) Il est bien évident que pour la Lune, les équations sont à peu près les mêmes que pour la Terre. Si l'on fait réflexion cependant que, tandis que la Terre entraîne la Lune par son mouvement annuel, cette Planete a un mouvement particulier au-tour de la Terre, on pourroit croire que les équations qui ont lieu pour la Terre, ne seroient pas celles qui auroient lieu pour un Observateur placé dans la Lune. Mais une attention plus réfléchie convaincra facilement que la correction qu'il faudroit faire aux formules, & qui consisteroit à avoir égard au mouvement de la Lune au-tour de la Terre, est absolument nulle. En effet, le rayon de l'orbite terrestre étant au rayon de l'orbite de la Lune, dans le rapport de 380 à 1, le petit mouvement d'oscillation qu'il faudroit supposer à la Terre pour représenter les phénomenes dans la Lune, ne pourroient donner que des différences infiniment petites dans les résultats. Cette remarque devient encore plus sensible, si l'on fait attention que la Terre parcourant 600000 lieues par jour dans son orbite, & que la Lune ne s'éloignant de la Terre que de 90000 lieues, l'erreur des résultats équivaut tout-au-plus à une erreur de quatre heures sur les instans des phénomenes.

CHAPITRE SECOND.

Des équations qui ont lieu pour la Terre.

JE me propoſe, dans ce Chapitre, de donner les équations qui ont lieu pour la Terre ; j'en tirerai enſuite les conſéquences les plus intéreſſantes relativement à notre Planete. Ces équations exigent que nous nous occupions de quelques recherches préliminaires.

ARTICLE PREMIER.

Des équations aux Sections Coniques par rapport au Foyer.

Equation polaire à l'ellipſe par rapport au foyer. Fig. 8.

(162) Soit

a le demi-grand axe AC de l'Ellipſe ;
F le foyer ;
C le centre ;
E la diſtance FC du foyer au centre de l'ellipſe ;
P le parametre du grand axe ;
R le rayon vecteur FM ;
Z l'angle du rayon vecteur FM avec le grand axe ;
1 le ſinus total.

Si l'on prend une troiſieme proportionnelle CD à FC & AC, cette ligne qui aura pour expreſſion $\frac{a^2}{E}$, ſera la diſtance DC de la directrice DE, au centre C de l'ellipſe. Par la propriété de l'Ellipſe on a toujours cette proportion HM : FM :: AD : AF. Si du point M l'on abaiſſe ſur AF la perpendiculaire MN, on aura, en vertu des conſtructions précédentes, $FN = R \cos Z$; d'ailleurs $AF = AC - FC = a - E$; $AD = DC - AC = \frac{a^2}{E} - a$; donc $HM = AF + AD - FN = a - E + \frac{a^2}{E} - a - R \cos Z = \frac{a^2 - E^2 - ER \cos Z}{E}$; donc la proportion HM : FM :: AD : AF, donne $R(E \cos Z + a) - a^2 + E^2 = 0$. Mais $\frac{a^2 - E^2}{a} = \frac{P}{2}$, puiſque par la propriété de l'ellipſe, $\sqrt{(a^2 - E^2)}$ = demi-petit axe, & que P eſt troiſieme proportionnelle au grand axe & au petit axe ; on aura donc

$$(1) \quad 2R(E \cos Z + a) - aP = 0.$$

C'eſt l'équation polaire à l'ellipſe par rapport au foyer.

Dans le cas de l'ellipse, si l'on nomme

D la distance FA du foyer à l'apside inférieure;

Fig. 8. D' la distance du foyer à l'apside supérieure;

comme pour l'apside inférieure l'on a cos $Z=1$, $R=D$, $D=a-E$; & que pour l'apside supérieure l'on a cos $Z=-1$, $R=D'$, $D'=a+E$; on conclura des constructions précédentes,

(2) $D(a+E)-\frac{aP}{2}=0$; (5) $D'(a-E)-\frac{aP}{2}=0$;

(3) $D^2-2aD+\frac{aP}{2}=0$; (6) $D'^2-2aD'+\frac{aP}{2}=0$;

(4) $D^2+2ED-\frac{aP}{2}=0$; (7) $D'^2-2ED'-\frac{aP}{2}=0$.

Equation polaire à l'hyperbole par rapport au foyer.

(163) Soit

a le demi-grand axe AC' d'une hyperbole;

F le foyer;

E la distance FC' du foyer au centre de l'hyperbole;

& conservons toutes les autres constructions.

Si l'on prend une troisieme proportionnelle C'D à C'F & C'A; cette troisieme proportionnelle qui aura pour expression $\frac{a^2}{E}$, sera la distance C'D de la directrice DE, au centre C' de l'hyperbole. Par la propriété de l'hyperbole, on a toujours cette proportion, HM : FM :: DA : AF. Si du point M l'on abaisse sur AF, la perpendiculaire MN, on aura, en vertu des constructions précédentes, $FN=R\cos Z$; d'ailleurs $AF=C'F-C'A=E-a$; $AD=C'A-C'D=a-\frac{a^2}{E}$; donc $HM=AF+AD-FN=E-a+a-\frac{a^2}{E}-R\cos Z=\frac{E^2-a^2-ER\cos Z}{E}$; donc la proportion HM : FM :: DA : AF donne $R(E\cos Z+a)-E^2+a^2=0$; mais $\frac{E^2-a^2}{a}=\frac{P}{2}$ donc

(1) $R(E\cos Z+a)-\frac{aP}{2}=0$.

C'est l'équation polaire à l'hyperbole par rapport au foyer.

Dans le cas de l'hyperbole, si l'on nomme

D la distance du foyer à l'apside inférieure,

comme dans ce cas, cosin $Z=1$; $R=D$; $D=E-a$; on a

(2) $D(E+a)-\frac{aP}{2}=0$;

(3) $D^2+2aD-\frac{aP}{2}=0$;

(4) $D^2-2DE+\frac{aP}{2}=0$.

Equation polaire à la parabole par rapport au foyer.

(164) Soit comme ci-dessus, Fig. 8.

D la distance FA du foyer à l'apside inférieure.

Dans la parabole, la distance AD de la directrice DE au sommet A de la parabole, est égale à la distance AF du sommet au foyer; de plus FM = HM; d'ailleurs HM = AF + AD − FN = 2AF − FN = 2D − R cos Z; donc 2D − R cos Z = R; mais par la propriété de la parabole, $2D = \frac{P}{2}$; donc

$$(1)\ R(\cos Z + 1) - \frac{P}{2} = 0.$$

Equation générale aux Sections Coniques par rapport au foyer.

(165) Puisque l'équation polaire à l'ellipse par rapport au foyer, est (§. 162) $2R\left(\frac{E}{a}\cos Z + 1\right) - P = 0$; que l'équation polaire à l'hyperbole est (§. 163) $2R\left(\frac{E}{a}\cos Z + 1\right) - P = 0$; que l'équation polaire à la parabole est (§. 164) $2R(\cos Z + 1) - P = 0$; on voit que l'équation générale aux sections coniques, par rapport au foyer, est

$$(1)\ 2R\left(\frac{E}{a}\cos Z + 1\right) - P = 0.$$

Dans le cas de l'ellipse a surpasse E; dans le cas de la parabole $a = E$; dans le cas de l'hyperbole a est moindre que E.

(166) Dans cette derniere équation, l'origine de l'angle Z, que l'on nomme ordinairement l'angle traversé, répond à l'apside inférieure A. Si l'on transporte l'origine de cet angle, en un point A' quelconque, & que l'on nomme

β l'angle de la droite FA' correspondante au point A' origine des nouveaux angles traversés, avec le grand axe FA de la section conique;

Z' l'angle traversé compté depuis le point A'.

Comme à un instant quelconque, l'on a $Z = Z' + \beta$, l'équation (1) du paragraphe précédent deviendra

$$(1)\ 2R\left(\frac{E}{a}\cos(Z' + \beta) + 1\right) - P = 0.$$

ARTICLE II.

Application des recherches précédentes aux orbites de Saturne & de la Terre.

(167) Dans les recherches dont nous allons nous occuper, nous partirons des élémens suivans ; ce sont ceux qui avoient lieu à l'époque du 1^er^. Janvier 1774.

TERRE.

Demi-grand axe de l'orbite terrestre.	1,00000
Demi-excentricité de l'orbite terrestre.	0,01680
Parametre du grand axe de l'orbite terrestre.	1,99944
Longitude du Perihélie de la Terre vue du Soleil.	$3^s 9^d 4' 16''$

SATURNE.

Demi-grand axe de l'orbite de Saturne.	9,53937
Demi-excentricité de l'orbite de Saturne	0,53163
Parametre du grand axe de l'orbite de Saturne	19,01948
Longitude du Perihélie de Saturne vue du Soleil.	$3^s 0^d 30' 30''$
Longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne vue du Soleil.	3 21 43 17
Longitude du nœud de l'anneau sur l'écliptique.	5 17 5 0
Inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique.	2 30 20
Inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique.	31 20 0

Des équations aux orbites de Saturne & de la Terre, en supposant que les angles traversés sont comptés du nœud ascendant de l'orbite de Saturne.

(168) Il est facile de déterminer les équations aux orbites de Saturne & de la Terre, en supposant que les angles traversés sont comptés dans chacune de ces orbites, en partant du nœud ascendant de l'orbite de Saturne.

Soit relativement à la Terre

R le rayon vecteur ;
Z l'angle traversé depuis le Perihélie ;
Z' l'angle traversé depuis le passage de la Terre par le nœud ascendant de l'orbite de Saturne.

On aura d'abord évidemment pour équation à l'orbite de la Terre, l'angle traversé étant compté depuis la perihélie,

$$(1)\ 2R(0{,}01680 \cos Z + 1) - 1{,}99944 = 0.$$

Mais si l'on suppose que l'angle traversé soit compté depuis le nœud ascendant de l'orbite de Saturne ; comme la longitude de ce nœud vue du Soleil, est de 3 s. $21^d 43' 17''$, la ligne qui passe par le nœud, fait avec celle qui passe par le Perihélie de la Terre, un angle de $12^d 39' 1''$; il

il faut donc dans l'équation (1) du §. 166, ſuppoſer $\beta = 12^d\ 39'\ 1''$; & l'on aura pour équation à l'orbite de la Terre, dans la ſuppoſition dont il s'agit,

$$(2)\quad 2R\,(0{,}01680\ \text{cof}\,(Z' + 12^d\ 39'\ 1'') + 1) - 1{,}99944 = 0.$$

(169) Par une ſemblable analyſe, on trouvera relativement à Saturne, qu'en nommant

R′ le rayon vecteur de Saturne ;
u′ l'angle traverſé compté depuis le nœud aſcendant de la Planete,

l'on a pour équation à l'orbite de Saturne

$$(1)\quad 2R'(0{,}05573\ \text{cof}(u' + 21^d\ 12'\ 47'') + 1) - 19{,}01948 = 0.$$

Nous remarquerons ici que *u′* eſt égal au lieu de Saturne ſur l'orbite vu du Soleil, moins la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de Saturne. Et comme, par la ſuppoſition, la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de Saturne vue du Soleil eſt de $111^d\ 43'\ 17''$, l'équation (1) pourra avoir la forme ſuivante,

$$(2)\quad 2R'(0{,}05573\ \text{cof}(\text{lieu de Saturne ſur l'orbite} - 90^d\ 30'\ 30'') + 1) - 19{,}01948 = 0.$$

ARTICLE III.

Détermination des points de l'orbite de la Terre où le plan de l'anneau de Saturne eſt tangent à cette orbite ; des points de l'orbite de Saturne dans leſquels cet Aſtre doit ſe trouver, pour que le plan de l'anneau ſoit tangent à l'orbite de la Terre ; & des équations qui ont lieu lorſque le plan de l'anneau paſſe par les centres du Soleil & de la Terre.

De la longitude des points de l'orbite de la Terre, où le plan de l'anneau de Saturne eſt tangent à cette orbite.

(170) Au moyen des équations précédentes, il eſt aiſé de réſoudre les queſtions que nous venons de propoſer ; je commence par la premiere. Fig. 9.

Soit S le Soleil ; SB une droite menée par le Soleil ſur le plan de l'écliptique perpendiculairement à l'interſection du plan de l'anneau & de l'écliptique ; BAE l'orbite terreſtre ; B le point de l'orbite terreſtre où la droite SB coupe cette orbite ; A le lieu du Perihélie de la Terre ; EC une poſition quelconque de l'interſection du plan de l'anneau & de l'écliptique. Il eſt évident d'après les conſtructions précédentes que ſi l'on nomme

R le rayon vecteur de l'orbite terreſtre ;
Z′ l'angle traverſé compté depuis le point B ;
β l'angle de la droite SB avec la droite SA paſſant par le Perihélie de la Terre ;

on a (§. 166) pour équation à l'orbite de la Terre,

$$(1)\quad 2R\,(0{,}01680\ \text{cof}\,(Z' + \beta) + 1) - 1{,}99944 = 0.$$

Fig. 9. Soit G le point où la perpendiculaire abaissée d'un point *a* quelconque de l'orbite de la Terre, sur la droite SB, rencontre cette droite, on a $SG = R \cos Z'$. Mais aux points où le plan de l'anneau est tangent à l'orbite de la Terre, SG est un *maximum* ; on a donc pour condition du Problême

$$(2)\quad \cos Z' dR - R \sin Z' dZ' = 0.$$

Maintenant à cause de l'équation (1) l'on a $dR\,(0{,}01680 \cos(Z'+\beta)+1) - 0{,}01680\, R \sin(Z'+\beta)\, dZ' = 0$. Si au moyen de cette derniere équation l'on élimine dR dans l'équation (2) l'on aura

$$(3)\quad \text{Tang}\, Z' = \frac{0{,}01680 \sin(Z'+\beta)}{1+0{,}01680 \cos(Z'+\beta)}.$$

(171) Nous avons dit que la longitude du nœud de l'anneau de Saturne sur l'écliptique, étoit à l'époque du 1er Janvier 1774, de $5^s\, 17^d\, 5'\, 0''$; nous verrons dans la suite comment cet élément a été déterminé ; la longitude de la perpendiculaire à l'interfection du plan de l'anneau de Saturne & de l'écliptique, étoit donc de $2^s\, 17^d\, 5'\, 0''$; cette perpendiculaire faisoit donc un angle de $338^d\, 0'\, 44''$ avec la droite passant par le Périhélie de la Terre ; il convient donc de supposer dans l'équation (3) du §. précédent, $\beta = 338^d\, 0'\, 44''$. Si l'on emploie cette valeur on parviendra aux résultats suivans,

$Z' = 359^d\, 38'\, 22''$; $\qquad Z' = 179^d\, 37'\, 41''$;

$SG = 0{,}98441$; $\qquad SG = 1{,}01548$.

Dans l'hypothese circulaire on auroit eu

$Z' = 0^d\, 0'\, 0''$; $\qquad Z' = 180^d\, 0'\, 0''$;

$SG = 1{,}00000$; $\qquad SG = 1{,}00000$.

On voit par ces calculs que la longitude des points de l'orbite de la Terre, où le plan de l'anneau est tangent à cette orbite dans l'hypothese elliptique, differe infiniment peu des points où cet anneau seroit tangent dans l'hypothese circulaire. La plus grande différence tombe sur les valeurs de SG qui ne sont plus égales à 1,00000 comme dans le cercle. Comme cette différence est d'environ 0,01550, & que l'anneau de Saturne parcourt un espace d'environ 0,00560 par jour dans sa ligne droite, il suit qu'il y a environ trois jours de différence dus à l'ellipticité de l'orbite de la Terre, entre les instans où le plan de l'anneau est tangent à cette orbite.

De quelques questions préliminaires à la détermination des points de l'orbite de Saturne où cet Astre doit se trouver pour que son anneau soit actuellement tangent à l'orbite de la Terre.

(172) Je dois maintenant déterminer les points de l'orbite de Saturne où cet Astre doit se trouver, pour que son anneau soit actuellement tangent à l'orbite de la Terre ; mais avant de résoudre ce Problême,

il faut déterminer généralement sur le plan de l'écliptique, la distance du centre du Soleil, au point où l'intersection mobile de l'écliptique & du plan de l'anneau indéfiniment prolongé, coupe la perpendiculaire à cette intersection mobile, menée par le centre du Soleil. Nous allons d'abord nous occuper de ce Problême. Fig. 9.

De la distance du centre du Soleil au point où l'intersection mobile de l'écliptique & du plan de l'anneau, coupe la perpendiculaire à cette intersection mobile menée par le centre du Soleil.

(173) Pour déterminer la distance S C du centre du Soleil, au point où l'intersection mobile sC de l'écliptique & du plan de l'anneau coupe la perpendiculaire S B à cette intersection mobile menée par le centre du Soleil, supposons que du centre s de Saturne dans son orbite, on ait abaissé une perpendiculaire s P sur l'écliptique, & nommons

R' le rayon vecteur de Saturne;
R'' la projection de ce rayon vecteur sur le plan de l'écliptique;
δ la distance perpendiculaire de Saturne à l'écliptique.

Il est évident que si l'on considere le triangle rectiligne rectangle formé par le rayon mené du Soleil à Saturne, par la perpendiculaire abaissée de Saturne sur le plan de l'écliptique, & par la droite menée du Soleil au pied de cette perpendiculaire, l'on aura

(1) $\delta = R'$ (sin latitude héliocentrique de Saturne).

On aura par la même raison

(2) $R'' = R'$ (cos latitude héliocentrique de Saturne).

De plus, à cause du triangle sphérique rectangle formé par l'arc de l'orbite de Saturne intercepté entre le lieu de Saturne & le lieu du nœud ascendant de l'orbite; par l'arc de latitude abaissé de Saturne sur l'écliptique, & par l'arc de l'écliptique intercepté entre le pied de ce dernier arc & le nœud de l'orbite; & que l'on nomme

u' l'angle traversé par Saturne dans son orbite depuis le nœud ascendant;

l'on aura

(3) sin (latitude héliocentrique de Saturne)
= sin u' sin (inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique).

Comme d'ailleurs (§. 169) u' = lieu de Saturne dans l'orbite — $111^d\,43'\,17''$, on pourra avoir également

(4) sin (latitude héliocentrique de Saturne)
= sin (inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique)
× sin (lieu de Saturne dans l'orbite — $111^d\,43'\,17''$).

Maintenant, si du point P où la perpendiculaire abaissée de Saturne sur l'écliptique rencontre le plan de l'écliptique, l'on abaisse une perpendiculaire Pp sur la droite SB menée du centre du Soleil perpendiculairement à l'inter-

Fig. 9. section mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, l'on aura un triangle rectiligne rectangle, dans lequel l'hypothénuse S P sera égale à R″, & dont un des côtés sera égal à la distance du centre du Soleil, au point où la droite P*p* menée de la projection de Saturne sur l'écliptique parallélement à l'intersection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, rencontre la droite SB menée par le centre du Soleil perpendiculairement à cette intersection. Dans ce triangle, l'angle au centre du Soleil sera égal à la longitude héliocentrique de Saturne moins la longitude de la ligne SB, ou ce qui revient au même, égal à la longitude héliocentrique de Saturne sur l'écliptique plus 90^d moins la longitude héliocentrique du nœud de l'anneau sur l'écliptique. On aura donc

(5) Distance du centre du Soleil au point où la perpendiculaire S B à l'intersection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, est coupée par la droite P*p* menée par la projection de Saturne sur l'écliptique parallélement à l'intersection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique $= R''$ cos (longitude héliocent. de Saturne sur l'éclipt. $+ 90^d -$ longit. du nœud de l'anneau).

D'ailleurs, si l'on suppose le plan de l'anneau indéfiniment prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre le plan de l'écliptique ; il est clair que l'on aura toujours un triangle rectiligne rectangle, dans lequel un des côtés sera la distance perpendiculaire *s*P de Saturne au plan de l'écliptique ; l'hypothénuse sera la distance $s\sigma$ du centre de Saturne au point où le plan de l'anneau rencontrera l'écliptique, & l'autre côté $P\sigma$ sera la distance du point σ à la projection P de Saturne sur l'écliptique mesurée sur une droite perpendiculaire à l'intersection du plan de l'anneau & de l'écliptique. Dans ce triangle, l'angle à Saturne sera le complément de l'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique ; & l'on aura

(6) Distance de la ligne P*p* à l'intersection du plan de l'anneau de Saturne & de l'écliptique, prise sur la perpendiculaire S B à cette intersection $= \delta$ cotang. (incl. de l'anneau sur l'éclipt.).

(174) Il est aisé maintenant d'avoir l'expression de la distance S C du centre du Soleil, au point où l'intersection mobile de l'écliptique & du plan de l'anneau coupe la perpendiculaire S B à cette intersection mobile menée par le centre du Soleil ; en effet cette distance est égale à celle déterminée par l'équation (5) du paragraphe précédent plus celle déterminée par l'équation (6) ; on a donc en éliminant δ & R″ au moyen des équations (1) & (2) du §. précédent

(1) Distance du centre du Soleil à l'intersection mobile de l'anneau de Saturne & de l'écliptique mésurée sur la perpendiculaire à cette intersection $= R'$ cos (latitude héliocent. de Saturne) cos (longit. hélioc. de Saturne sur l'éclipt. $+ 90^d -$ longit. du nœud de l'anneau) $+ R'$ sin (latitude héliocentrique de Saturne) cotang. (Inclinaison de l'anneau sur l'écliptique).

(175) Dans cette équation l'on pourra éliminer R′, au moyen de l'équation (2) du §. 169, & la latitude héliocentrique de Saturne, au

moyen de l'équation (4) du §. 173 ; de ſorte qu'il ne reſtera plus de variables dans le ſecond membre de l'équation, que le lieu de Saturne dans ſon orbite, & ſa longitude héliocentrique ſur l'écliptique. On pourroit même, ſi l'on vouloit, réduire le ſecond membre à ne renfermer qu'une ſeule variable, au moyen de l'équation ſuivante,

(1) Tang. (longitude héliocentrique de Saturne ſur l'écliptique — longit. du nœud aſcendant de l'orbite) = coſ (incl. de l'orb.) tang (lieu de Sat. dans l'orbite — longit. du nœud aſc. de l'orb.).

Des points de l'orbite de Saturne où cet Aſtre doit ſe trouver pour que ſon anneau ſoit actuellement tangent à l'orbite de la Terre.

(176) Rien n'eſt plus facile que de déterminer maintenant les points de l'orbite de Saturne, où cet Aſtre doit ſe trouver pour que ſon anneau ſoit actuellement tangent à l'orbite de la Terre ; en effet, à l'inſtant de ce phénomene, la diſtance du centre de la Terre à l'interſection du plan de l'anneau de Saturne & de l'écliptique, meſurée ſur la perpendiculaire à cette interſection, eſt égale aux valeurs de SG déterminées dans le §. 171 ; l'on a donc les deux équations ſuivantes

(1) R′ ſin (latit. hélioc. de Saturne) cotang (inclinaiſon de l'anneau) + R′ coſ (latit. hélioc. de Sat.) coſ (longit. hélioc. de Saturne ſur l'écliptique + 90^d — longit. hélioc. du nœud de l'anneau) — 0,98441 = 0 ;

(2) R′ ſin (latitude hélioc. de Sat.) cotang (inclinaiſon de l'anneau) + R′ coſ (latit. hélioc de Sat.) coſ (longit. hélioc. de Saturne ſur l'écliptique + 90^d — longit. hélioc. du nœud de l'anneau) + 1,01548 = 0.

(177) Si dans ces dernieres équations l'on élimine R′, au moyen de l'équation (2) du §. 169 ; que l'on élimine pareillement la latitude héliocentrique de Saturne, au moyen de l'équation (4) du §. 173 ; & enfin la longitude héliocentrique de Saturne dans l'écliptique, au moyen de l'équation (1) du §. 175, de ſorte que les équations du §. précédent ne renferment que le lieu héliocentrique de Saturne dans ſon orbite, à l'inſtant où le plan de l'anneau eſt tangent à l'orbite de la Terre, on parviendra aux réſultats ſuivans.

Lorſque Saturne parcourt la partie boréale de ſon orbite,

Lieux de Saturne dans ſon orbite.	
$5^s\ 14^d\ 21'\ 13''$	l'anneau entre dans l'orbite terreſtre ;
5 27 2 20	l'anneau ſort de l'orbite terreſtre.

Lorſque Saturne parcourt la partie auſtrale de ſon orbite,

Lieux de Saturne dans ſon orbite.	
$11^s\ 14^d\ 21'\ 8''$	l'anneau entre dans l'orbite terreſtre ;
11 26 47 59	l'anneau ſort de l'orbite terreſtre.

On voit par ces calculs que dans la partie boréale de l'orbite de Saturne, cette Planete parcourt $12^d\ 41'\ 7''$ dans ſon orbite, depuis l'inſtant où le plan de l'anneau eſt tangent à l'orbite terreſtre, lors de ſon entrée dans cette orbite, jusqu'à l'inſtant où le plan de l'anneau eſt pareillement tangent à l'orbite terreſtre, lors de ſa ſortie. Dans la partie auſtrale de l'orbite de Saturne, la Planete parcourt $12^d\ 26'\ 51''$ dans les mêmes circonſtances.

Remarque ſur les ſolutions précédentes relativement à l'épaiſſeur de l'anneau de Saturne.

(178) Dans les ſolutions précédentes, nous avons ſuppoſé que l'anneau de Saturne étoit infiniment mince ; & nous avons déterminé les équations qui ont lieu lorſque le plan de l'anneau eſt tangent à l'orbite terreſtre. Si l'on ſuppoſoit quelqu'épaiſſeur à l'anneau de Saturne, rien ne ſeroit plus ſimple que d'avoir égard à cette épaiſſeur. Nous remarquerons d'abord que le plan de l'anneau étant incliné ſur l'écliptique, la diſtance perpendiculaire de ſes deux ſurfaces, eſt plus petite que la diſtance interceptée entre ces deux ſurfaces ſur l'écliptique ; ces diſtances ſont entr'elles comme le ſinus total eſt au ſinus de l'inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique.

Soit donc

$2e'$ la diſtance perpendiculaire des deux ſurfaces ;

$2e$ la diſtance interceptée ſur l'écliptique entre ces deux ſurfaces ;

l'on aura

$$(1)\ e' = e \text{ ſin (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique)}.$$

Si donc dans les calculs l'on vouloit avoir égard à l'épaiſſeur de l'anneau ; alors au lieu des termes conſtans $-0{,}98441$, $+1{,}01548$ des équations (1) & (2) du §. 176, on auroit des termes de la forme ſuivante $-0{,}98441 \pm e$, $+1{,}01558 \mp e$; & l'on pourroit avoir égard à l'épaiſſeur de l'anneau.

D'une équation qui a lieu lorſque le plan de l'anneau paſſe par le Soleil.

(179) De l'équation (1) du §. 174, il eſt aiſé de conclure celle qui a lieu lorſque le plan de l'anneau paſſe par le Soleil ; en effet, puiſque dans cette circonſtance la diſtance du centre du Soleil à l'interſection du plan de l'anneau de Saturne & de l'écliptique meſurée ſur la perpendiculaire à cette interſection, eſt nulle, l'on a évidemment

(1) R' coſ (latit. hélioc. de Sat.) coſ (longit. hélioc. de Sat. ſur l'éclipt. $+ 90^d -$ longit. du nœud de l'anneau) $+ R'$ ſin (latit. hélioc. de Saturne) cotang. (incl. de l'anneau ſur l'écliptique) $\mp e = 0$;

Dans cette équation le terme e a été introduit pour avoir égard à l'épaiſ-

ſeur de l'anneau. Si l'on ſuppoſoit cette épaiſſeur nulle, l'on auroit

(2) coſ (longit. hélioc. de Sat. ſur l'écliptique + 90^d — longit. hélioc. du nœud de l'anneau) + tang (latitude héliocentrique de Saturne) cotang. (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) = o.

D'une équation qui a lieu lorſque la Terre paſſe par le plan de l'anneau.

(180) De l'équation (1) du §. 174, il eſt également aiſé de conclure celle qui a lieu, lorſque le plan de l'anneau paſſe par le centre de la Terre. En effet, puiſque dans cette circonſtance le plan de l'anneau paſſe par la Terre, ſi l'on nomme

R le rayon vecteur de la Terre ;

l'on a

Diſtance du centre du Soleil à l'interſection mobile de l'anneau de Saturne & de l'écliptique meſurée ſur la perpendiculaire à cette interſection =

R coſ (longitude de la Terre + 90^d — longitude du nœud de l'anneau).

Mais cette même diſtance eſt égale à

R′ coſ (latit. hélioc. de Saturne) coſ (longit. hélioc. de Sat. ſur l'éclipt. + 90^d — longit. du nœud de l'anneau) + R′ ſin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) ∓ *e* ;

Donc

(1) R coſ (longitude de la Terre + 90^d — longit. du nœud de l'anneau) — R′ coſ (latit. hélioc. de Saturne) coſ (longit. hélioc. de Saturne ſur l'éclipt. + 90^d — longit. du nœud de l'anneau) — R′ ſin (latit. hélioc. de Saturne) cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptiq.) ± *e* = o.

On doit ſentir d'avance l'uſage que nous ferons des équations précédentes ; elles nous ſerviront à déterminer rigoureuſement les inſtans des paſſages de l'anneau par le centre du Soleil & de la Terre, lorſqu'une équation plus ſimple aura fait connoître d'une maniere approchée, les inſtans de ces paſſages.

(181) Nous allons déterminer maintenant, d'une maniere plus rigoureuſe que nous n'avons fait dans le §. 154, les équations qui ont lieu pour la Terre, lors des diſparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne. Pour mettre dans cette recherche toute l'exactitude néceſſaire, nous diſtinguerons les phénomenes des diſparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne qui arrivent dans le nœud boréal de l'anneau, des phénomenes analogues qui arrivent dans le nœud auſtral. Nous appellerons nœud boréal de l'anneau, celui qui répond à la partie boréale de l'orbite de la Planete ; nous appellerons nœud auſtral, celui qui répond à la partie auſtrale de l'orbite.

ARTICLE IV.

Détermination des équations qui ont lieu pour le nœud boréal de l'anneau.

(182) Nous avons vu (§. 177) que relativement au nœud boréal de l'anneau, l'anneau entre dans l'orbite terrestre, lorsque le lieu de Saturne dans son orbite, est de $5^{s}\ 14^{d}\ 21'\ 13''$; & que l'anneau sort de l'orbite terrestre, lorsque le lieu de Saturne dans son orbite est de $5^{s}\ 27^{d}\ 2'\ 20''$. Au moyen des Tables de Saturne, je cherche le tems que cette Planete emploie à parcourir dans son orbite, depuis $5^{s}\ 14^{d}\ 21'\ 13''$ jusqu'à $5^{s}\ 27^{d}\ 2'\ 20''$; je vois que ce tems est de 370 jours; l'anneau de Saturne emploie donc 370 jours à parcourir le diametre de l'orbite de la Terre; il emploieroit donc $\frac{355}{113} \times 370$ jours à parcourir avec la même vitesse, l'orbite de la Terre rectifiée. Mais la terre emploie 365,25 jours à parcourir le même espace; donc $n : m :: 365,25 : \frac{355}{113} \times 370$; donc $\frac{n}{m} = 0,3142$. Les équations qui ont lieu pour le nœud boréal de l'anneau sont donc

$$(1)\quad 0,3142\,z + \cos z - 1 - a = 0;$$
$$(2)\quad 0,3142\,z - 1 - a = 0.$$

(183) Puisque la valeur de $\frac{n}{m}$ est comprise entre 0,7246 & 0,2173, l'équation (1) du §. précédent a essentiellement (§. 135) une racine réelle, & peut avoir trois racines réelles suivant les différentes valeurs de a. De plus, il suit du §. 135 que si la valeur de a dans la proposée, est comprise entre 0 & 0,4978, ou entre 0,91166 & 1,97429, cette proposée a trois racines réelles. Si au contraire la valeur de a est comprise entre 0,4978 & 0,91166, la proposée n'a qu'une seule racine réelle.

Symptôme pour déterminer le nombre des racines réelles de l'équation (1) du §. 182, par l'inspection du lieu de la Terre dans son orbite, à l'instant où le plan de l'anneau est tangent à cette orbite.

(184) Nous avons vu (§. 181) que le mouvement de l'intersection du plan de l'anneau de Saturne & de l'écliptique dans le sens du diametre de l'orbite de la Terre auquel cette intersection est perpendiculaire, est au mouvement de la Terre dans son orbite, comme 0,3142 est à 1. Donc lorsque l'anneau de Saturne parcourt un espace égal à 0,4978 dans le sens du diametre dont il s'agit, la Terre parcourt $9^{d}\ 4'\ 37''$ dans son orbite. Lorsque l'anneau parcourt un espace égal à 0,91166, la Terre décrit $166^{d}\ 14'\ 8''$ dans son orbite; enfin la Terre fait une révolution entiere, pendant le tems que l'anneau parcourt un espace égal 1,97429. Il suit de là que si, à l'instant où le plan de l'anneau de Saturne est tangent

tangent à l'orbite de la Terre & où par conſéquent le lieu de Saturne dans ſon orbite eſt dans $5^{f}\ 14^{d}\ 21'\ 13''$ (§. 177), la Terre a parcouru moins de $9^{d}\ 4'.37''$ ou plus de $166^{d}\ 14'\ 8''$ depuis ſon paſſage par le point de l'orbite auquel l'anneau eſt tangent, l'équation (1) du §. 18, a trois racines réelles; & cette équation n'a qu'une ſeule racine réelle, ſi la terre a parcouru depuis la même époque, plus de $9^{d}\ 4'\ 37''$ & moins de $166^{d}\ 14'\ 8''$. Suppoſons, en effet, qu'à l'inſtant où le plan de l'anneau de Saturne devient tangent à l'orbite terreſtre, la Terre ait parcouru moins de $9^{d}\ 4'\ 37''$ depuis ſon paſſage par le point de l'orbite auquel l'anneau eſt tangent, il eſt évident, d'après ce qui vient d'être dit, qu'à l'inſtant où la Terre a paſſé par le point de ſon orbite, l'anneau en étoit éloigné d'une quantité moindre que 0,4978; l'équation a donc trois racines réelles. Le même raiſonnement s'applique aux autres cas.

Dans l'équation (1) du §. 182, ſi a égaloit 0,4978, l'équation auroit une valeur double; c'eſt le cas où deux des racines de l'équation paſſent du réel à l'imaginaire.

Si $a = 0{,}91166$, l'équation auroit encore une valeur double; c'eſt le cas où deux des racines de l'équation paſſent de l'imaginaire au réel.

(185) Pour avoir l'intelligence complette des réſultats précédens, développons cette analyſe, & rendons-la plus ſenſible, en l'appliquant à des cas particuliers. Suppoſons d'abord que la valeur de a ſoit compriſe entre 0 & 0,4978; comme alors le mouvement de la Terre dans ſon orbite commence par être perpendiculaire au diametre que parcourt l'interſection de l'anneau de Saturne & de l'écliptique, on conçoit facilement, que, quoique le mouvement de l'anneau dans le ſens du diametre dont il s'agit ſoit plus petit que celui de la Terre dans ſon orbite, & que la Terre devance l'anneau, l'anneau cependant l'aura bientôt atteint avant que la Terre ait parcouru un arc de $18^{d}\ 18'\ 49''$ depuis ſon paſſage par le point de l'orbite auquel l'anneau eſt tangent. Il y aura donc dans cet intervalle, une premiere rencontre de la Terre & de l'anneau. La viteſſe de la Terre augmentera enſuite dans le ſens du diametre dont il s'agit, & l'on conçoit facilement que par ce changement de viteſſe, elle rencontrera l'interſection de l'anneau qu'elle devancera à ſon tour; l'on aura donc une ſeconde rencontre de la Terre & de l'anneau. Il y aura enfin une troiſieme rencontre de la Terre & de l'anneau, lorſque dans la branche inférieure de l'orbite terreſtre, le ſens du mouvement de la Terre étant contraire à celui qu'elle avoit dans la branche ſupérieure de l'orbite, la Terre & l'anneau s'approcheront avec la ſomme de leurs mouvemens, dans la direction du diametre dont il s'agit.

Suppoſons maintenant que $a = 0{,}4978$; alors l'anneau atteindra la Terre, lorſqu'elle aura parcouru un arc de $18^{d}\ 18'\ 49''$ depuis ſon paſſage par le point de l'orbite auquel le plan de l'anneau eſt tangent.

Mais à l'instant où l'anneau atteindra la Terre, le mouvement de la Terre dans le sens du diametre dont il s'agit, devenant plus grand que celui de l'anneau dans le sens du même diametre, la Terre se dégagera tout de suite du plan de l'anneau ; les deux rencontres qui avoient lieu à peu près à égale distance de $18^d\ 18'\ 49''$ comptés depuis le point de l'orbite auquel l'anneau est tangent, se confondent, & l'équation (1) du §. 181 a une racine double ; c'est le cas où deux des racines de l'équation passent du réel à l'imaginaire.

Si a surpasse 0,4978 ; on conçoit facilement que l'anneau n'atteignant plus la Terre vers $18^d\ 18'\ 49''$ comptés depuis le point de l'orbite auquel l'anneau est tangent, la Terre ne passera plus qu'une fois dans le plan de l'anneau ; & cette combinaison aura lieu jusqu'à ce que a étant devenu égal à 0,91166, la Terre qui aura rencontré une premiere fois l'anneau dans la partie inférieure de son orbite, atteindra une seconde fois le plan de l'anneau lorsqu'elle aura parcouru $521^d\ 41'\ 11''$ depuis son passage par le point de l'orbite auquel l'anneau est tangent. Cette rencontre est double ; & c'est le premier état des deux nouveaux points de rencontre de la Terre & de l'anneau, qui se sépareront ensuite, lorsque a deviendra plus grand que 0,91166. Le cas que nous venons de considérer est celui où deux des racines de l'équation (1) du §. 182 passent de l'imaginaire au réel.

Formule pour déterminer, à une époque quelconque, le nombre des disparitions de l'anneau de Saturne, dans le nœud boréal.

(186) Il est facile de réduire en formule le symptôme du §. 184. Soit en effet

Y la distance de la Terre au point de son orbite auquel le plan de l'anneau est tangent à l'instant de la tangence de cet anneau, pour une époque quelconque ;

A la distance de la Terre au point de son orbite auquel le plan de l'anneau est tangent, à l'instant de la tangence de cet anneau, pour une certaine époque déterminée d'où l'on part ;

dA l'erreur de cette premiere détermination ;

N le nombre des révolutions de Saturne depuis cette premiere époque, jusqu'à celle pour laquelle on calcule ;

B le nombre de dégrés décrits par la Terre dans son orbire par-delà vingt-neuf révolutions sidérales, pendant une révolution sidérale de Saturne dans son orbite ;

dB l'erreur de cette détermination. Au moyen de ce terme, on pourra avoir égard au mouvement vrai du nœud de l'anneau dans l'écliptique, correspondant à une révolution de Saturne.

Il est évident que puisqu'à une certaine époque déterminée, $A+dA$ exprime la distance de la Terre au point de son orbite auquel le plan de l'anneau est tangent, à l'instant de la tangence de cet anneau, l'on aura à une autre époque quelconque qui en differe d'un nombre N de révolutions de Saturne,

$$(1)\ Y = A + dA + N(B + dB).$$

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer la valeur de A pour

une certaine époque, & le nombre B de dégrés décrits par la Terre dans son orbite par-delà vingt-neuf révolutions sidérales, pendant une révolution sidérale de Saturne dans son orbite.

Comme la premiere époque est arbitraire, nous prendrons celle de 1774.

(187) Nous avons dit que la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur l'écliptique, étoit à l'époque de 1774, de $3^s\,21^d\,43'\,17''$; que l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique étoit de $2^d\,30'\,20''$; & que l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique étoit de $31^d\,20'$. Ces élémens déterminent le lieu de Saturne sur son orbite lorsque le plan de l'anneau passe par le Soleil, dans $5^s\,20^d\,38'\,9''$; c'est ce qu'on appelle le lieu de l'anneau sur l'orbite.

Le 10 Janvier 1774 à 0^h, les Tables de Saturne insérées dans l'Astronomie de M. de la Lande, donnoient pour le lieu de Saturne dans son orbite, $5^s\,20^d\,48'\,22''$. L'opposition observée au mois de Mars de la même année, a fait voir que ces Tables supposoient Saturne trop avancé dans son orbite, de $8'\,40''$; donc le 10 Janvier 1774 à 0^h, le vrai lieu de Saturne dans son orbite étoit de $5^s\,20^d\,39'\,42''$; il avoit donc dépassé le lieu du nœud de l'anneau, d'environ $1'\,33''$; & comme Saturne parcouroit alors chaque jour, $2'\,2''$ dans son orbite, il y avoit à l'instant du 10 Janvier 0^h, trois quarts de jour que Saturne avoit passé par le nœud de l'anneau. Il y avoit donc passé le 9 Janvier vers 6^h du soir. De plus (§. 182) le plan de l'anneau emploie 370 jours à traverser l'orbite terrestre; il emploie donc 185 jours à parcourir le rayon de cet orbite; le plan de l'anneau étoit donc tangent à l'orbite de la Terre, 185 jours avant le 9 janvier 1774, c'est-à-dire, le 8 Juillet 1773, lorsque la longitude de la Terre vue du Soleil étoit de $9^s\,16^d\,35'$, ou de $286^d\,35'$. Si de cette derniere quantité, l'on soustrait $77^d\,5'$ longitude du point de l'orbite de la Terre par lequel le plan de l'anneau entre dans cette orbite, l'on aura $A = 209^d\,30'$.

Nous avons dit que la révolution sidérale de Saturne est à la révolution sidérale de la Terre, comme 10761,6150 est à 365,2565; donc, pendant une révolution sidérale de Saturne, la Terre parcourt vingt-neuf fois son orbite, plus la portion de son orbite correspondante à 0,46318 d'une révolution entiere; c'est-à-dire, $166^d\,44'\,41''$; donc $B = 166^d\,44'\,41''$; si donc l'on part de l'époque de 1774, l'on aura

$$(1)\quad Y = 209^d\,30' + dA + N\,(166^d\,44'\,41'' + dB)$$

Il ne s'agira donc, pour déterminer le nombre des disparitions de l'anneau de Saturne à une époque quelconque, que de substituer dans la formule précédente, à dA, N, dB leurs valeurs, & de voir si la valeur de Y est entre 0^d & $9^d\,4'\,37''$; entre $9^d\,4'\,37''$ & $166^d\,14'\,8''$; entre $166^d\,14'\,8''$ & 360^d. Dans le premier & dans le dernier cas, il y aura deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau; dans le second cas, il n'y aura qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau.

Application de la formule du §. précédent, aux disparitions de l'anneau de Saturne dans le nœud boréal, depuis l'année 1600 jusqu'en 1900.

(188) Je vais appliquer la formule du §. précédent aux phénomenes qui ont eu lieu dans le nœud boréal, depuis l'année 1600 jusqu'à nos jours; & je continuerai le calcul jusqu'en 1900. J'ai choisi la premiere époque, parce que c'est celle de l'invention des Lunetes, tems auquel on a commencé à observer l'anneau de Saturne; quant à la seconde époque, je m'y suis arrêté pour ne pas continuer les calculs à l'infini. Je supposerai que dA & dB sont nuls. Les phénomenes dont je vais m'occuper dans cette premiere époque, sont ceux des années 1626, 1656, 1685, 1715, 1744, 1774, 1803, 1832, 1861, 1891.

(189) Dans l'intervalle de tems, que nous considérons, la premiere disparition de l'anneau qui ait eu lieu dans le nœud boréal, est celle de 1626. Il s'est écoulé depuis ce tems-là jusqu'à nos jours, cinq révolutions de Saturne; d'ailleurs la quantité N est négative, attendu que l'époque précede 1774. Si l'on fait le calcul en conséquence, l'équation du §. 187 deviendra

$$Y = 95^d\ 46'\ 35''.$$

Comme ce résultat est compris entre $9^d\ 4'\ 37''$ & $166^d\ 14'\ 8''$, il n'y a eu en 1626, qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau.

En 1656, l'on avoit $N = -4$; $Y = 262^d\ 31'\ 16''$. Il y a donc eu en 1656, deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1685, l'on avoit $N = -3$; $Y = 69^d\ 15'\ 57''$; il n'y a donc eu en 1685, qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau.

En 1715, l'on avoit $N = -2$; $Y = 236^d\ 0'\ 38''$; il y a donc eu en 1715, deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1744, l'on avoit $N = -1$; $Y = 42^d\ 45'\ 19''$; il n'y a donc eu en 1744, qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau.

En 1774, l'on avoit $N = 0$; $Y = 209^d\ 30'$; il y a donc eu en 1774, deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1803, l'on aura $N = 1$; $Y = 16^d\ 14'\ 41''$.

La théorie ne donne pour l'année 1803, qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau; puisque la valeur de Y est comprise entre $9^d\ 4'\ 37''$ & $166^d\ 14'\ 8''$. Il faut cependant remarquer que le résultat est assés près de la limite par laquelle deux des racines passent de l'imaginaire au réel; il pourroit donc arriver que quoique la théorie ne donne qu'une seule disparition de l'anneau de Saturne, on observât néanmoins le phénomene de la double disparition & de la double réapparition, soit à cause de l'épaisseur de l'anneau, soit à cause de l'incertitude des élémens de Saturne; mais en tout cas, cette disparition ne sera qu'instantanée.

En 1832, l'on aura $N = 2$; $Y = 182^d\ 59'\ 22''$; on obſervera donc en 1832, deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1862, l'on aura $N = 3$; $Y = 349^d\ 44'\ 3''$; on obſervera donc deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1891, l'on aura $N = 4$; $Y = 156^d\ 48'\ 40''$; on n'obſervera donc qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau.

Formule pour déterminer les valeurs de a qu'il faut ſubſtituer dans les équations du §. 182, pour une époque quelconque.

(190) Les recherches précédentes nous donnent un moyen bien facile de déterminer les valeurs de *a* qu'il faut ſubſtituer dans les équations du §. 182, pour une époque quelconque. En effet, puiſque *a* eſt la diſtance de l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, au point de l'orbite de la Terre par lequel le plan de l'anneau entre dans cette orbite, à l'inſtant où la Terre paſſe par ce point, & que d'ailleurs (§. 183) 1,97429 exprime le chemin de l'anneau pendant une révolution ſidérale de la Terre dans ſon orbite, il eſt évident que l'on a la proportion ſuivante, $a : 1{,}97429 :: Y : 360^d$; donc $a = 1{,}97429 \times \frac{Y}{360^d}$; donc

$$(1)\quad a = 1{,}97429 \times \frac{A + dA + N(B + dB)}{360^d}.$$

De la maniere d'avoir égard à l'épaiſſeur de l'anneau de Saturne.

(191) La quantité *a* que nous venons de déterminer, eſt celle qui a lieu pour un plan infiniment mince qui paſſeroit par le milieu de l'anneau de Saturne ; mais cette ſuppoſition n'eſt pas rigoureuſement celle de la nature. En effet, il n'eſt pas phyſiquement vrai que l'anneau de Saturne ſoit infiniment mince ; d'ailleurs cet anneau peut n'être pas viſible, à l'inſtant précis où la Terre & le Soleil ſe trouvent dans le plan de ſa ſurface. Il y a probablement un petit intervalle pendant lequel, quoique la théorie indique que l'anneau ſoit viſible, il peut cependant n'être pas apperçu. Il faut donc conſidérer l'anneau de Saturne comme compoſé de deux ſurfaces, l'une antérieure & l'autre poſtérieure, paralleles toutes deux au plan infiniment mince que nous venons de conſidérer. L'éloignement de ces deux ſurfaces hypothétiques dépend beaucoup des circonſtances phyſiques qui accompagnent l'obſervation ; il faut donc, ainſi que nous l'avons dit dans le §. 178, ajouter un petit terme à la valeur de *a*. Et ſi l'on nomme, comme dans le §. 178,

$2e'$ la diſtance perpendiculaire des deux ſurfaces ;

$2e$ la diſtance interceptée ſur l'écliptique entre ces deux ſurfaces ;

de ſorte que l'on ait comme dans le §. 178,

$$e' = e \sin (\text{inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique}),$$

l'expreſſion la plus générale de a ſera

$$(1)\quad a = 1{,}97429 \times \frac{A + dA + N\,(B + dB)}{360} \mp e.$$

Nous remarquerons que $A + dA + N\,(B + dB)$ n'eſt autre choſe que la quantité Y dont nous avons donné les valeurs (§. 189) pour les différentes époques depuis 1626 juſqu'en 1900.

(192) Puiſque a eſt la diſtance de l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, au point de l'orbite de la Terre par lequel le plan de l'anneau entre dans cette orbite, à l'inſtant où la Terre paſſe par ce point; ſi l'on nomme *plan antérieur de l'anneau* celui qui entre le premier dans l'orbite de la Terre, & par conſéquent avant le plan infiniment mince qui paſſeroit par le milieu de l'anneau; & *plan poſtérieur de l'anneau* celui qui entame le dernier l'orbite de la Terre; il eſt évident que le plan antérieur de l'anneau peut être conſidéré comme un plan qui précede le plan infiniment mince paſſant par le milieu de l'anneau. La diſtance de ce plan antérieur au point de l'orbite de la Terre par lequel le plan de l'anneau entre dans cette orbite, à l'inſtant où la Terre paſſe par ce point, eſt donc moindre de toute la quantité e que celle du plan paſſant par le milieu de l'anneau; & comme l'expreſſion de a qui appartient au plan paſſant par le milieu de l'anneau égale $\frac{A + dA + N(B + dB)}{360^d}$, l'on a évidemment

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad a = 1{,}97429 \times \frac{A + dA + N(B + dB)}{360^d} - e;$$

Plan central.

$$(2)\quad a = 1{,}97429 \times \frac{A + dA + N\,(B + dB)}{360^d};$$

Surface poſtérieure du plan de l'anneau.

$$(3)\quad a = 1{,}97429 \times \frac{A + dA + N\,(B + dB)}{360^d} + e.$$

(193) Au lieu de conſidérer deux plans hypothétiques paralleles tous deux au plan infiniment mince paſſant par le milieu de l'anneau, on pourroit vouloir déterminer aux inſtans des diſparitions, & des réapparitions de l'anneau, l'angle formé au centre de Saturne, par le plan central de l'anneau, & par la droite menée de la Terre ou du Soleil à Saturne. C'eſt l'angle que l'on a défini, *élévation de la Terre ou du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau*; je me propoſe d'en donner l'expreſſion dans la ſuite. Quoique la même valeur de a ne réponde pas toujours rigoureuſement à la même élévation de la Terre ou du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau, je ferai voir cependant,

par un réfultat moyen fuffifamment exact pour toutes les pofitions de la Terre & du Soleil à l'égard de Saturne, que relativement aux phénomenes que nous confidérons, chaque 0,00001 dont on fuppofera compofée la valeur de a, répond à 0",112 d'élévation de la Terre ou du Soleil au-deffus du plan central de l'anneau.

Table des différentes valeurs de a pour les époques que nous avons confidérées dans le §. 189.

(194) Si l'on part des valeurs de Y déterminées dans le §. 189, & que l'on fuppofe $e = 0{,}02500$, l'on aura les réfultats fuivans.

Années.	Valeurs de a.		
	Surface antérieure.	Plan central.	Surface poftérieure.
1626. . .	0,50440.	0,52940.	0,55440
1656. . .	1,41885.	1,44385.	1,46885
1685. . .	0,35901.	0,38401.	0,40901
1715. . .	1,27346.	1,29846.	1,32346
1744. . .	0,21362.	0,23862.	0.26362
1774. . .	1,12807.	1,115307.	1,17807
1803. . .	0,06823.	0,09323.	0,11823
1832. . .	0,98268.	1,00768.	1,03268
1862. . .	1,89713.	1,92213.	1,94713
1891. . .	0,83729.	0,86229.	0,88729

De la longitude des points de l'orbite de la Terre d'où font comptés les angles z des équations (1) *&* (2) *du* §. 182, *pour les différentes époques que nous avons confidérées dans le* §. 189.

(195) Nous avons vu précédemment que l'origine des angles z eft au point de l'orbite de la Terre par lequel le plan de l'anneau entre dans cette orbite. Ce point répondoit à l'époque de 1774, à $2^{s}\ 17^{d}\ 5'$. Quant on fuppoferoit ce point immobile dans l'efpace, de maniere qu'il répondit toujours aux mêmes étoiles, la préceffion des équinoxes empêcheroit néanmoins qu'il parût avoir la même longitude. En effet, comme dans l'ufage ordinaire de l'Aftronomie, la pofition des différens points de l'écliptique fe rapporte à l'interfection de l'écliptique & de l'équateur, & que cette interfection eft mobile, le même point de l'écliptique n'a pas toujours la même longitude. L'origine des angles z, entant qu'elle eft rapportée au premier point d'*Ariés*, eft donc une quantité variable. Afin d'éviter toute incertitude à ce fujet, je vais donner la longitude de l'origine des angles z pour les époques que nous avons confidérées ci-deffus.

Années.	Longitude de l'origine des angles z.
1626	75^d 2′
1656	75 27
1685	75 51
1715	76 16
1744	76 40
1774	77 5
1803	77 29
1832	77 53
1862	78 18
1891	78 42

Si l'on suppofoit un mouvement propre au nœud de l'anneau fur l'écliptique, ou une erreur fur la pofition en 1774, on corrigeroit en conféquence, la longitude de l'origine des angles z pour les différentes époques.

Article V.

Détermination des équations qui ont lieu pour le nœud auftral de l'anneau.

(196) Nous avons vu (§. 177) que relativement au nœud auftral de l'anneau, l'anneau entre dans l'orbite terreftre, lorfque le lieu de Saturne dans fon orbite eft de $11^f\ 14^d\ 21'\ 8''$; & que l'anneau fort de l'orbite terreftre, lorfque le lieu de Saturne dans fon orbite eft de $11^f\ 26^d\ 47'\ 59''$. Au moyen des Tables de Saturne, je cherche le tems que cette Planete emploie à parcourir dans fon orbite, depuis $11^f\ 14^d\ 21'\ 8''$, jufqu'à $11^f\ 26^d\ 47'\ 59''$; je vois que ce tems eft de 376,85 jours. L'anneau de Saturne emploie donc 376,85 jours à parcourir le diametre de l'orbite de la Terre; il emploieroit donc $\frac{355}{113}$ 376,85 jours à parcourir avec la même viteffe, l'orbite de la Terre rectifiée. Mais la Terre emploie 365,25 jours à parcourir le même efpace; donc $n:m::365,25:\frac{355}{113}\times 376,85$; donc $\frac{n}{m}=0,3085$; les équations qui ont lieu pour le nœud auftral de l'anneau font donc

$$(1)\quad 0,3085\,z+\operatorname{cof} z-1-a=0;$$

$$(2)\quad 0,3085\,z-1-a=0.$$

Puifque la valeur de $\frac{n}{m}$ eft comprife entre 0,2173 & 0,7246, l'équation (1) a effentiellement une racine réelle, & peut avoir trois racines réelles fuivant les différentes valeurs de a. De plus il fuit du §. 135 que fi la valeur de a dans la propofée, eft comprife entre 0 & 0,4798, ou entre 0,85964 & 1,93841, la propofée a trois racines réelles. Si au contraire la valeur de a eft comprife entre 0,4798 & 0,85964, la propofée n'a qu'une feule racine réelle. Nous remarquerons que lorfque

l'anneau

l'anneau de Saturne parcourt un espace égal à 0,4798 dans le sens du diametre de l'orbite de la Terre auquel son intersection est perpendiculaire, la Terre parcourt $8^d\ 54'\ 39''$ dans son orbite ; lorsque l'anneau de Saturne parcourt un espace égal à 0,85964 toujours dans le sens du diametre de l'orbite de la Terre auquel son intersection est perpendiculaire, la Terre décrit $159^d\ 39'\ 4''$ dans son orbite ; enfin la Terre fait une révolution entiere, pendant le tems que l'anneau parcourt un espace égal à 1,93841.

Dans l'équation (1) si a égaloit 0,4798, l'équation auroit une valeur double ; c'est le cas où deux des racines de l'équation passent du réel à l'imaginaire. La Terre rencontreroit le plan de l'anneau après avoir parcouru $17^d\ 58'\ 10''$ depuis son passage par le point de l'orbite auquel l'anneau est tangent ; & cette rencontre seroit double. Si a égaloit 0,85964, l'équation auroit encore une valeur double ; c'est le cas où deux des racines de l'équation passent de l'imaginaire au réel. La Terre rencontreroit le plan de l'anneau, après avoir parcouru $522^d\ 1'\ 50''$ depuis son passage par le point de l'orbite auquel l'anneau est tangent ; & cette rencontre seroit encore double. Comme ces dernieres recherches sont entiérement analogues à celles du §. 185, on pourra relire ce paragraphe.

Formules pour déterminer à une époque quelconque, le nombre des disparitions de l'anneau de Saturne dans le nœud austral, & les valeurs de a.

(197) Nous avons vu (§. 186) que si l'on nomme

Y la distance de la Terre au point de son orbite auquel le plan de l'anneau est tangent, à l'instant de la tangence de cet anneau, pour une époque quelconque ;

A la distance de la Terre au point de son orbite auquel le plan de l'anneau est tangent à l'instant de la tangence de cet anneau, pour une certaine époque déterminée d'où l'on part ;

dA l'erreur de cette premiere détermination ;

N le nombre de révolutions de Saturne depuis cette premiere époque, jusqu'à celle pour laquelle on calcule ;

B le nombre de dégrés décrits par la Terre dans son orbite par-delà vingt-neuf révolutions sidérales, pendant une révolution sidérale de Saturne dans son orbite ;

dB l'erreur de cette détermination. Au moyen de ce terme l'on pourra avoir égard au mouvement vrai du nœud de l'anneau dans l'écliptique correspondant à une révolution de Saturne.

L'on a

$$(1)\quad Y = A + dA + N(B + dB).$$

Et comme d'ailleurs (§. 196) l'intersection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique parcourt un espace de 1,93841 pendant le tems que la Terre emploie à faire une révolution entiere dans son orbite, on verra facilement, par une analyse semblable à celle des §. 191 & 192, que si l'on nomme

$2e$ la distance interceptée sur l'écliptique entre les deux surfaces antérieure & postérieure de l'anneau ;

l'on a

Surface antérieure de l'anneau.

$$(2)\quad a = 1{,}93841 \times \frac{A + dA + N(B + dB)}{360^d} - e;$$

Plan central.

$$(3)\quad a = 1{,}93841 \times \frac{A + dA + N(B + dB)}{360^d};$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(4)\quad a = 1{,}93841 \times \frac{A + dA + N(B + dB)}{360^d} + e.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer la valeur de A pour une certaine époque ; & comme la premiere époque est arbitraire, nous prendrons celle de 1760. Quant à B, nous avons vu (§. 187), que cette quantité étoit égale à $166^d\ 44'\ 41''$.

Puisque la longitude du nœud boréal de l'anneau de Saturne sur l'écliptique, étoit de $5^f\ 17^d\ 5'$ en 1774, & que le lieu du même nœud sur l'orbite de Saturne, étoit dans $5^f\ 20^d\ 38'\ 9''$; la longitude du nœud austral étoit à la même époque, de $11^f\ 17^d\ 5'$ sur l'écliptique, & le lieu sur l'orbite de Saturne, dans $11^f\ 20^d\ 38'\ 9''$. Si donc l'on a égard à la précession des équinoxes, la longitude du nœud austral de l'anneau de Saturne étoit de $11^f\ 16^d\ 54'$ sur l'écliptique à l'époque de 1760 ; & le lieu du nœud sur l'orbite de Saturne, étoit dans $11^f\ 20^d\ 27'$. Suivant les nouvelles Tables de Saturne insérées dans l'Astronomie de M. de la Lande, le 5 Mai 1760, le lieu de Saturne étoit de $11^f\ 20^d\ 50'$ dans son orbite ; & suivant l'observation de l'opposition de Saturne faite en Septembre de la même année, les Tables supposoient Saturne trop avancé d'environ $2'$ dans son orbite. Le lieu de Saturne étoit donc réellement de $11^f\ 20^d\ 48'$ dans son orbite, le 5 Mai 1760 ; & il étoit plus avancé que le nœud de l'anneau, d'environ $21'$ de dégré. Saturne avoit donc passé par le nœud, le 24 Avril 1760, vers 12^h. Comme le plan de l'anneau emploie (§. 196) 376,85 jours à parcourir le diametre de l'orbite de la Terre, & par conséquent 188,43 jours à parcourir le demi-diametre, l'anneau de Saturne étoit entré dans l'orbite de la Terre, 188,43 jours avant le 24 Avril 1760, 12^h ; c'est-à-dire, le 19 Octobre 1759. Le lieu de la Terre vu du Soleil étoit alors de $0^f\ 26^d\ 30'$. Si de cette derniere quantité l'on soustrait $8^f\ 10^d\ 54'$, longitude du point de l'orbite de la Terre par lequel le plan de l'anneau entre dans cette orbite, l'on aura $A = 129^d\ 36'$; de plus (§. 187) $B = 166^d\ 44'\ 41''$, l'équation (1) deviendra donc

$$(5)\quad Y = 129\ 36' + dA + N(166^d\ 44'\ 41'' + dB).$$

Il ne s'agira plus maintenant, pour déterminer le nombre des dispari-

tions & des réapparitions de l'anneau aux différentes époques, que de calculer les valeurs de Y pour ces époques, & de voir (§. 196) ſi ces valeurs ſont compriſes entre 0^d & 8^d 54′ 39″ ; entre 8^d 54′ 39″ & 159^d 39′ 4″ ; entre 159^d 39′ 4″ & 360^d. Dans le premier & dans le dernier cas, il y a deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau ; dans le ſecond cas, il n'y a qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau. Cette derniere circonſtance avoit lieu pour l'époque de 1760.

Application de la formule, aux diſparitions de l'anneau de Saturne dans le nœud auſtral, depuis l'année 1600 juſqu'en 1900.

(198) Dans l'intervalle de tems que nous conſidérons, & qui embraſſe les années 1613, 1642, 1671, 1701, 1730, 1760, 1789, 1819, 1848, 1878, la premiere diſparition de l'anneau qui ait eu lieu dans le nœud auſtral eſt celle de 1613. Il s'eſt écoulé depuis ce tems juſqu'à nos jours, cinq révolutions de Saturne ; il faut donc ſuppoſer N = — 5. Si l'on fait le calcul en conſéquence, l'on aura Y = 15^d 52′ 35″. Comme ce réſultat eſt compris entre 8^d 54′ 39″ & 159^d 39′ 4″, la théorie ne donne en 1613, qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau.

En 1642, l'on avoit N = — 4 ; & l'équation (5) du §. 197 donnoit Y = 182^d 37′ 16^d. Il y a donc eu deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau en 1642.

En 1671, l'on avoit N = — 3 ; Y = 349^d 21′ 57″. Il y a donc eu en 1671, deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1701 l'on avoit N = — 2 ; Y = 156^d 6′ 38″. Il n'y a donc eu en 1701, d'après la théorie, qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau. Il faut cependant remarquer que le réſultat du calcul eſt ſi près de la limite par laquelle deux des racines paſſent de l'imaginaire au réel, qu'il auroit pu arriver, attendu l'épaiſſeur de l'anneau, que l'on eût obſervé la double diſparition & la double réapparition de l'anneau.

En 1730, l'on avoit N = — 1 ; Y = 322^d 51′ 19″. Il y a donc eu en 1730, deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1760, l'on avoit N = 0 ; Y = 129^d 36′ ; il n'y a donc eu en 1760, qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau.

En 1789, l'on aura N = 1 ; Y = 296^d 20′ 41″ ; il y aura donc en 1789, deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1819, l'on aura N = 2 ; Y = 103^d 5′ 22″ ; il n'y aura donc en 1819, qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau.

En 1848, l'on aura N = 3 ; Y = 269^d 50′ 3″ ; il y aura donc en 1848, deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

En 1878, l'on aura N = 4 ; Y = 76ᵈ 34′ 44″ ; il n'y aura donc qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau.

Table des différentes valeurs de a pour les époques que nous venons de conſidérer.

(199) Si l'on part des valeurs de Y que nous venons de déterminer, & que l'on ſuppoſe comme dans le paragraphe 194, $e = 0{,}02500$, l'on aura les réſultats ſuivans.

Années.	Valeurs de *a*.		
	Surface antérieure.	Plan central.	Surface poſtérieure.
1613...	0,07642.	0,10142.	0,12642
1642...	0,97426.	0,99926.	1,02426
1671...	1,87210.	1,89710.	1,92210
1701...	0,83153.	0,85653.	0,88151
1730...	1,72937.	1,75437.	1,77937
1760...	0,68880.	0,71380.	0,73880
1789...	1,58664.	1,61164.	1,63664
1819...	0,54607.	0,57107.	0,59607
1848...	1,44391.	1,46891.	1,49391
1878...	0,40334.	0,42834.	0,45334

On aura pareillement

Années.	Longitudes de l'origine des angles z.
1613	8ˢ 14ᵈ 52′
1642	8 15 16
1671	8 15 40
1701	8 16 5
1730	8 16 5
1760	8 16 54
1789	8 17 18
1817	8 17 43
1848	8 18 7
1878	8 18 32

On peut voir (§. 192 & 195) les principes ſur leſquels ces dernieres Tables ſont fondées.

Je n'ai point eu égard, dans ces calculs, aux recherches de M. de la Place ſur les mouvemens de Saturne ; je ferai voir dans le Chapitre ſuivant, comment on peut faire entrer ces nouvelles conſidérations dans les réſultats.

CHAPITRE TROISIEME.

Calcul des disparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne depuis l'année 1600 jusqu'en 1900 ; & comparaison des observations au calcul.

(200) JE vais maintenant calculer les phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'anneau de Saturne, depuis l'année 1600 jusqu'en 1900 ; je comparerai ces calculs aux observations qui ont été faites aux différentes époques. Il est inutile d'avertir que ces résultats sont hypothétiques, & que leur exactitude dépend de celle des élémens que j'ai employés, élémens sur lesquels les Astronomes ne sont point absolument d'accord. Il ne seroit donc pas étonnant qu'il y eût quelque petite différence entre les résultats des calculs & les observations. D'ailleurs la diversité des yeux & des lunettes peut encore influer sur ces résultats ; & l'on ne doit regarder ce que je vais dire, que comme des approximations. Je ferai voir ensuite comment ces approximations conduisent à la solution rigoureuse du Problême.

Je supposerai qu'il suffit que la Terre ou le Soleil soient élevés d'environ cinq minutes de dégré au-dessus du plan de l'anneau, pour que l'anneau soit visible avec de grandes lunettes ; je donnerai en conséquence les équations qui ont lieu pour la surface antérieure de l'anneau, pour le plan central & pour la surface postérieure. Afin cependant de ne pas trop multiplier les calculs, je me contenterai de résoudre les équations relatives au plan central.

ARTICLE PREMIER.

Calcul des disparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne, depuis 1600 jusqu'en 1900.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1612 & 1613.

(201) Les premiers phénomenes que nous ayons à calculer dans l'époque que nous embrassons, sont ceux des années 1612 & 1613. Nous avons vu (§. 198) que pour l'époque de 1612 & 1613, la théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau. Nous avons vu de plus (§. 199) que l'origine des angles z étoit dans $8^s 14^d 52'$, & qu'enfin (§. 196 & 199) les équations suivantes avoient lieu.

Paſſage du plan de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3085\, z - 1,07642 = 0$.

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3085\, z - 1,10142 = 0$.

Surface poſtérieure de l'anneau.

(3) $0,3085\, z - 1,12642 = 0$.

Paſſage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3085\, z + \text{coſin}\, z - 1,07642 = 0$.

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3085\, z + \text{coſin}\, z - 1,10142 = 0$.

Surface poſtérieure de l'anneau.

(6) $0,3085\, z + \text{coſin}\, z - 1,12642 = 0$.

(202) Je remarque d'abord, d'après ce qui a été démontré dans le §. 196, qu'en général dans le nœud auſtral de l'anneau, il y a un *maximum* d'approximation de la Terre & du plan de l'anneau, lorſque la Terre a parcouru $17^d\, 58'\, 10''$ depuis ſon paſſage par le point de l'orbite où le plan de l'anneau devient tangent à cette orbite. Ce *maximum* d'approximation a donc eu lieu lorſque la Terre vue du Soleil étoit dans $8^s\, 14^d\, 52' + 17^d\, 58'\, 10'' = 9^s\, 2^d\, 50'\, 10''$; c'eſt-à-dire, lorſque le Soleil vu de la Terre, étoit dans $3^s\, 2^d\, 50'\, 10''$, vers le 4 Juin 1612. Ce *maximum* d'approximation étoit tel, que ſi la quantité *a* eût été égale à 0,04798, & que par conſéquent l'on eût eu pour équation du Problême, $0,3085\, z + \text{coſ}\, z - 1,04798 = 0$, l'anneau auroit diſparu. L'on avoit réellement $0,3085\, z + \text{coſ}\, z - 1,10142 = 0$. Comme les termes conſtans de ces deux équations ne different que de 0,05344, & que 0,00540 répond à un jour, il ſuit que ſi le plan de l'anneau eût réellement paſſé 10 jours plutôt par le Soleil, l'anneau auroit diſparu. Cette premiere diſparition de l'anneau n'a donc pas eu lieu, mais vers la fin de Juin 1612, l'anneau a été ſur le point de diſparoître.

(203) Si l'on ſuit la marche des phénomenes, & que l'on réſolve l'équation (2) du §. 201, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître, à raiſon du paſſage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $6^s\, 24^d\, 33'$, depuis $8^s\, 14^d\, 52'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $3^s\, 9^d\, 25'$,

& le lieu du Soleil de $9^s\,9^d\,25'$. Ce qui fixe cette diſparition au 30 Décembre 1612.

(204) Si l'on réſout enſuite l'équation (5) du §. 201, pour déterminer l'inſtant où la Terre s'eſt trouvée dans le plan central de l'anneau, & où par conſéquent l'anneau a commencé à reparoître, on verra qu'à cet inſtant la Terre avoit parcouru $8^s\,14^d\,28'$ depuis $8^s\,14^d\,52'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $4^s\,29^d\,20'$, & le lieu du Soleil de $10^s\,29^d\,20'$; ce qui fixe cette réapparition au 18 Février 1613. Saturne commençoit à ſe plonger dans les rayons du Soleil.

(205) M. Huyghens, dans ſon *Syſtema Saturnium*, rapporte les obſervations qui furent faites cette année-là par Galilée. D'après ces obſervations, l'anneau étoit encore viſible au mois de Juin *1612*, vers le Solſtice d'été. Il ceſſa d'être apperçu depuis le commencement de Septembre 1612 juſqu'au mois de Février *1613*, tems auquel Saturne ſe plongea dans les rayons du Soleil.

(206) Il y a apparence qu'avec de plus grandes lunettes, Galilée auroit vu l'anneau beaucoup plus long-tems, & que cet anneau n'auroit diſparu que vers la fin de Décembre 1612. Cette réflexion mérite d'autant plus d'attention, qu'aucune hypotheſe ne peut concilier les obſervations, telles qu'elles ſont rapportées par Galilée. En effet ſi l'on ſuppoſe, pour expliquer la diſparition du commencement de Septembre 1612, que le plan de l'anneau a paſſé beaucoup plutôt par le centre du Soleil, que ne l'a donné le calcul, il y aura alors une diſparition vers le Solſtice d'été, & Galilée n'aura pu voir l'anneau à cette époque. Il paroît donc que ces obſervations, quoique précieuſes, puiſque ce ſont les premieres dans ce genre, n'ont pas toute l'exactitude néceſſaire pour pouvoir être employées à des déterminations préciſes. Je remarquerai auſſi qu'il eſt ſingulier que Galilée ait ceſſé de voir les anſes de Saturne, dès le mois de Septembre 1612, tems auquel, d'après le calcul, l'anneau étoit aſſez éloigné de diſparoître, & qu'il l'ait vu vers le Solſtice d'été, tems auquel il étoit infiniment plus près de la diſparition. Au reſte, cette tendance de l'anneau à diſparoître vers la fin de Juin 1612, ne peut être révoquée en doute ; & l'on verra en 1671, qu'elle a produit une véritable diſparition, qui a été obſervée par Dominique Caſſini.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1626.

(207) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année *1626*, la théorie ne donne qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau, & que les équations ſuivantes avoient lieu.

Paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3142\,z - 1{,}50440 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

(2) $0{,}3142\,z - 1{,}52940 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0{,}3142\,z - 1{,}55440 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0{,}3142\,z + \text{cosin}\,z - 1{,}50440 = 0.$

Plan central de l'anneau

(5) $0{,}3142\,z + \text{cosin}\,z - 1{,}52940 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0{,}3142\,z + \text{cosin}\,z - 1{,}55440 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $2^s\ 15^d\ 2'$.

(208) Dans le cas dont il s'agit, l'équation (5) du §. 207 n'a qu'une racine réelle. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 207, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû disparoître à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $9^s\ 2^d\ 8'$ depuis $2^s\ 15^d\ 2'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $11^s\ 17^d\ 10'$, & le lieu du Soleil de $5^s\ 17^d\ 10'$; ce qui fixe cette disparition au 10 Septembre 1626. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 207, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû reparoître, à raison du passage du plan central de l'anneau par le centre du Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $9^s\ 8^d\ 53'$ depuis $2^s\ 15^d\ 2'$. Le lieu de de la Terre étoit donc alors de $11^s\ 23^d\ 55'$, & le lieu du Soleil de $5^s\ 23'\ 55'$; ce qui fixe cette réapparition au 16 Septembre 1626. Ces deux Phénomenes étoient fort voisins les uns des autres; d'ailleurs ils ont eu lieu dans l'intervalle de tems pendant lequel Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil. Les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'anneau de Saturne auroient donc pu échapper aux Observateurs les plus assidus, & il paroît que M. Huyghens a jugé bien séverement les Astronomes de ce tems-là, lorsqu'il dit dans son *Systema Saturnium* : « Idem quoque Phœnomenon anno 1627 procul dubio se » obtulit, sed observatorum penuriâ an supinitate præteriit inobserva- » tum; cum nemo, quod sciam, prodiderit utrùm Saturnus eo anno » cum globulis apparuerit, an secùs ».

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1642.

(209) Nous avons vu (§. 196, 198, & 199) que pour l'année 1642,

la

la théorie donne deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau ; que les équations suivantes avoient lieu,

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}97426 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(2)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}99926 = 0.$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(3)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}02426 = 0.$$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(4)\quad 0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}97426 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(5)\quad 0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}99926 = 0.$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(6)\quad 0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 2{,}02426 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $8^f\ 15^d\ 16'$.

(210) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on cherche la premiere racine de l'équation (5) du §. 209, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû disparoître une premiere fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $9^f\ 24^d\ 22'$ depuis $8^f\ 15^d\ 16'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $6^f\ 9^d\ 38'$, & le lieu du Soleil de $0^f\ 9^d\ 38'$; ce qui fixe cette premiere disparition au 31 Mars 1642. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 209, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû reparoître, à raison du passage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $12^f\ 11^d\ 18'$ depuis $8^f\ 15^d\ 16'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $8^f\ 26^d\ 34'$, & le lieu du Soleil de $2^f\ 26^d\ 34'$; ce qui fixe la premiere réapparition, au 17 Juin 1642. Si l'on cherche enfin les deux autres racines de l'équation (5) du §. 209, pour déterminer les instans de la seconde disparition & de la seconde réapparition de l'anneau, on trouvera qu'à l'instant de la seconde disparition de l'anneau, la Terre avoit parcouru $16^f\ 9^d\ 34'$ depuis $8^f\ 15^d\ 16'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $0^f\ 24^d\ 50'$, & le lieu du Soleil de $6^f\ 24^d\ 50'$; ce qui fixe la seconde

difparition au 18 Octobre 1642. Quant à la feconde réapparition de l'anneau, la Terre avoit alors parcouru $18^s\ 12^d\ 30'$ depuis $8^s\ 15^d\ 16'$; fon lieu étoit de $2^s\ 27^d\ 46'$, & celui du Soleil de $8^s\ 27^d\ 46'$; ce qui fixe cette feconde réapparition au 19 Décembre 1642.

(211) M. Huyghens, dans fon *Syftema Saturnium*, fait mention des obfervations qui furent faites à cette époque, par Gaffendi & par les Aftronomes de ce tems-là. Il n'eft point queftion de la premiere difparition de l'anneau, celle que le calcul indique avoir eu lieu depuis le 31 Mars jufqu'au 17 Juin. Il faut remarquer que pendant cet intervalle, Saturne avoit été long-tems plongé dans les rayons du Soleil, & qu'ainfi cette difparition a pu échapper aux Obfervateurs. Quant à la feconde difparition de l'anneau, elle paroît avoir été obfervée, depuis le commencement d'Août 1642 jufqu'au commencement de Février 1643. On doit faire fur ces obfervations, la même remarque que fur celles faites par Galilée en 1612. Il y a apparence que l'on auroit obfervé la feconde difparition de l'anneau beaucoup plus tard, & la feconde réapparition beaucoup plutôt, fi l'on avoit fait ufage de lunettes femblables à celles que l'on emploie aujourd'hui. Au furplus ces obfervations ne me paroiffent pas avoir toute l'exactitude néceffaire pour être employées à des déterminations précifes & délicates.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1656.

(212) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1656, la théorie donne deux difparitions & deux réapparitions de l'anneau ; que les équations fuivantes avoient lieu,

Paffage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3142\,z - 2,41885 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3142\,z - 2,44385 = 0.$

Surface poftérieure de l'anneau.

(3) $0,3142\,z - 2,46885 = 0.$

Paffage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3142\,z + \text{cofin}\,z - 2,41885 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3142\,z + \text{cofin}\,z - 2,44385 = 0.$

Surface poſtérieure de l'anneau.

$$(6)\ 0{,}5142\, z + \text{cofin}\, z - 2{,}46885 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $2^s\ 15^d\ 27'$.

(213) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on ſuit la marche des phénomenes, & que l'on cherche la premiere racine de l'équation (5) du §. 212, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître une premiere fois, à raiſon du paſſage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $10^s\ 15^d\ 31'$ depuis $2^s\ 15^d\ 27'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $1^s\ 0^d\ 58'$, & le lieu du Soleil de $7^s\ 0^d\ 58'$; ce qui fixe cette premiere diſparition au 24 Octobre 1655. Si l'on réſout enſuite l'équation (2) du §. 212, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû reparoître, à raiſon du paſſage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $14^s\ 25^d\ 37'$ depuis $2^s\ 15^d\ 27'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $5^s\ 11^d\ 4'$, & le lieu du Soleil de $11^s\ 11^d\ 4'$; ce qui fixe cette premiere réapparition au 1 Mars 1656. Si l'on calcule enfin les deux autres racines de l'équation (5) du §. 212, pour déterminer les inſtans de la ſeconde diſparition & de la ſeconde réapparition de l'anneau, on trouvera qu'à l'inſtant de la ſeconde diſparition de l'anneau, la Terre avoit parcouru $15^s\ 2^d\ 0'$ depuis $2^s\ 15^d\ 27'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $5^s\ 17^d\ 27$, & le lieu du Soleil de $11^s\ 17^d\ 17'$; ce qui fixe cette ſeconde diſparition au 8 Mars 1656. Quant à la ſeconde réapparition de l'anneau, la Terre avoit alors parcouru $19^s\ 11^d\ 41'$ depuis $2^s\ 15^d\ 27'$; ſon lieu étoit de $9^s\ 27^d\ 8'$, & celui du Soleil de $3^s\ 27^d\ 8'$; ce qui fixe cette ſeconde réapparition au 19 Juillet 1656.

(214) L'époque que nous conſidérons, eſt célebre dans l'Hiſtoire de l'Aſtronomie, par l'Ouvrage de M. Huyghens intitulé *Syſtema Saturnium*, dont les obſervations de 1656 furent l'occaſion, & dans lequel l'Auteur développa le premier la véritable théorie des diſparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne. Voici au ſurplus comment s'explique cet illuſtre Aſtronome, au ſujet des obſervations qui furent faites en 1656.

» Le 16 Janvier 1656, j'obſervai Saturne pour la premiere fois depuis ſa ſortie des rayons du Soleil ; il avoit perdu ſes anſes. Quelques Aſtronomes l'avoient obſervé ſans anſes dès la fin de Novembre. Un voyage que je fus obligé de faire, m'avoit empêché de commencer plutôt mes obſervations. Le 13 Octobre 1656 les anſes de Saturne avoient reparu ».

(215) Les calculs ſont conformes aux obſervations. Dès la fin de Novembre 1655, quelques Aſtronomes avoient obſervé Saturne ſans ſes anſes ; il les avoit perdu à la fin d'Octobre 1655. Les anſes n'ont été revues par M. Huyghens, qu'au commencement d'Octobre 1656, lorſque Saturne commença à ſe dégager du Soleil, après ſa conjonction

avec cet Astre. M. Huyghens auroit pu les revoir plutôt, & dès la fin de Juillet, quelque tems avant que Saturne fût entiérement plongé dans les rayons solaires. Mais comme il n'étoit pas encore guidé par une théorie appliquée à des données certaines, il n'est pas étonnant que cet instant précis, qu'il n'avoit pu calculer d'avance, lui ait échappé. Il en est de même de la réapparition instantanée de l'anneau, que le calcul indique avoir eu lieu depuis le 1 Mars 1656 jusqu'au 8 Mars de la même année. On ne peut trop regretter que l'on n'ait point fait cette observation importante, qui auroit jetté beaucoup de lumiere sur les véritables élémens de l'anneau.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1671.

(216) Nous avons vu (§. 196, 198 & 199) que pour l'année 1671, la théorie donne deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau; que les équations suivantes avoient lieu;

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}87210 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(2)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}89710 = 0.$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(3)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}92210 = 0.$$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(4)\quad 0{,}3085\, z + \operatorname{cosin} z - 2{,}87210 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(5)\quad 0{,}3085\, z + \operatorname{cosin} z - 2{,}89710 = 0.$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(6)\quad 0{,}3085\, z + \operatorname{cosin} z - 2{,}92210 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $8^{s}\, 15^{d}\, 40'$.

(217) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on suit la marche des phénomenes, & que l'on resolve l'équation (5) du §. 216, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû disparoître une premiere fois à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre

avoit parcouru $11^s\ 23^d\ 30'$ depuis $8^s\ 15^d\ 40'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $8^s\ 9^d\ 10'$, & le lieu du Soleil de $2^s\ 9^d\ 10'$; ce qui fixe cette premiere diſparition au 31 Mai 1671. Si l'on cherche la ſeconde racine de la même équation, pour déterminer la premiere réapparition de l'anneau, à raiſon du paſſage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment, la Terre avoit parcouru $13^s\ 13^d\ 43'$, depuis $8^s\ 15^d.\ 40'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $9^s\ 29^d\ 23'$, & le lieu du Soleil de $3^s\ 29^d\ 23'$, ce qui fixe cette premiere réapparition au 22 Juillet 1671. Si l'on réſout enſuite l'équation (2) du paragraphe 216, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître une ſeconde fois, à raiſon du paſſage du plan central par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $17^s\ 28^d\ 3'$, depuis $8^s\ 15^d\ 40'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $2^s\ 13^d\ 43'$; & le lieu du Soleil de $8^s\ 13^d\ 43'$; ce qui fixe cette ſeconde diſparition au 5 Décembre 1671. Si l'on cherche enfin la derniere racine de l'équation (5) du paragraphe 216, pour déterminer le moment de la ſeconde réapparition de l'anneau, à raiſon du paſſage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à cet inſtant la Terre avoit parcouru $20^s\ 7^d\ 56'$, depuis $8^s\ 15^d\ 40'$; le lieu de la Terre étoit donc alors de $4^s\ 23^d\ 36'$, & le lieu du Soleil de $10^s\ 23^d\ 36'$; ce qui fixe cette ſeconde réapparition au 12 Février 1672. Saturne ſe plongeoit alors dans les rayons du Soleil.

(218) Nous avons pour l'année que nous conſidérons, les obſervations faites par Dominique Caſſini. Elles ont été conſignées dans les Journaux des Sçavans de 1672, & M. Maraldi les a rapportées dans ſon Mémoire ſur l'anneau de Saturne, publié en 1715. Suivant cet Aſtronome, M. Caſſini commença à voir Saturne rond & ſans anſes vers la fin de Mai 1671, & il continua de le voir ſans anſes juſqu'au 13 Août de la même année. Les anſes rediſparurent enſuite le 8 Décembre, & ne furent plus apperçues pendant tout le tems que Saturne fut viſible, avant ſon entrée dans les rayons du Soleil.

(219) Si l'on rapproche ces obſervations des calculs du paragraphe précédent, on ſera convaincu qu'elles s'accordent avec le calcul, auſſi parfaitement qu'on peut le deſirer. On verra ſeulement que la premiere diſparition a été obſervée un peu plutôt, & que la premiere réapparition a été obſervée un peu plus tard, que ces phénomenes ne ſont indiqués par les formules ; ce que l'on doit attribuer aux lunettes. Quant à la diſparition du 8 Décembre, que le calcul indique pour le 5 du même mois ; cela peut venir ou d'une petite erreur dans le lieu du nœud de l'anneau, ou de quelque petite incertitude ſur la durée des révolutions ſidérales de Saturne. Nous remarquerons en finiſſant, que la diſparition de l'anneau, que le calcul indique avoir eu lieu depuis le 31 Mai 1771 juſqu'au 22 Juillet de la même année, & que M. Caſſini

a réellement observée depuis la fin de Mai jusqu'au 13 Août, ne permet pas de révoquer en doute que l'anneau n'ait été sur le point de disparoître à la fin de Juin 1612. C'est cette tendance à disparoître en 1612, qui au bout de cinquante-neuf ans a produit une véritable disparition.

Calcul des Phénomenes qni ont eu lieu en 1685.

(220) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1685, la théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau ; que les équations suivantes avoient lieu,

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3142\, z - 1,35901 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3142\, z - 1,38401 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0,3142\, z - 1,40901 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3142\, z + \text{cosin}\, z - 1,35901 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3142\, z + \text{cosin}\, z - 1,38401 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0,3142\, z + \text{cosin}\, z - 1,40901 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $2^s\, 15^d\, 51'$.

(221) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême n'a qu'une racine réelle. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (2) du §. 220, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû disparoître, à raison du passage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on verra qu'à cet instant la Terre avoit parcouru $8^s\, 12^d\, 22'$ depuis $2^s\, 15^d\, 51'$. Le lieu de la Terre étoit donc de $10^s\, 28^d\, 13'$, & celui du Soleil de $4^s\, 28^d\, 13'$; ce qui fixe cette disparition au 21 Août 1685. Saturne commençoit à se plonger dans les rayons du Soleil. Si l'on résout ensuite, l'équation (5) du paragraphe 220, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû reparoître, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, on trouvera qu'à l'instant de la réapparition de l'anneau, la Terre avoit parcouru $8^s\, 25^d\, 47'$ depuis $2^s\, 15^d\, 51'$. Le lieu de la Terre

étoit donc de $11^s\ 11^d\ 38'$, & celui du Soleil de $5^s\ 11^d\ 38'$; ce qui fixe cette réapparition au 4 Septembre 1685. Saturne étoit alors entiérement plongé dans les rayons du Soleil.

(222) Si l'on fait attention qu'en 1685 les phénomenes de la diſparition & de la réapparition de l'anneau ſe ſont paſſés dans l'intervalle de quatorze jours, pendant leſquels Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil, on ne ſera point étonné que quoiqu'en 1685 l'on ait obſervé Saturne le plus aſſidûment qu'il a été poſſible de le faire, on ne l'ait pas vu ſans anſes. Le 12 Juillet, jour de la derniere obſervation de Saturne, la phaſe ronde n'étoit pas encore arrivée. Elle étoit paſſée le 11 Octobre, la premiere fois que l'on ait vu Saturne après ſa ſortie des rayons du Soleil.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1701.

(223) Nous avons vu (§. 196, 198 & 199) que pour l'année 1701, la théorie ne donne qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau; que les équations ſuivantes avoient lieu,

Paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}83153 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(2)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}85653 = 0.$$

Surface poſtérieure de l'anneau.

$$(3)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}88153 = 0.$$

Paſſage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(4)\quad 0{,}3085\, z + \text{coſin}\, z - 1{,}83153 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(5)\quad 0{,}3085\, z + \text{coſin}\, z - 1{,}85653 = 0.$$

Surface poſtérieure de l'anneau.

$$(6)\quad 0{,}3085\, z + \text{coſin}\, z - 1{,}88153 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $8^s\ 16^d\ 5'$.

(224) Si l'on ſuit la marche des Phénomenes, & que l'on réſolve l'équation (5) du §. 223, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître à raiſon du paſſage de la Terre par le plan de l'anneau, on

verra qu'à cet inſtant la Terre avoit parcouru $9^s\ 17^d\ 54'$, depuis $8^s\ 16^d\ 5'$. Le lieu de la Terre étoit donc de $6^s\ 3^d\ 59'$, & celui du Soleil de $0^s\ 3^d\ 59'$; ce qui fixe cette diſparition au 24 Mars 1701. Saturne étoit alors plongé dans les rayons du Soleil. Si l'on réſout enſuite l'équation (2) du §. 223, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû reparoître, à raiſon du paſſage du plan de l'anneau par le Soleil, on verra qu'à cet inſtant la Terre avoit parcouru $11^s\ 14^d\ 48'$, depuis $8^s\ 16^d\ 5'$. Son lieu étoit donc de $8^s\ 0^d\ 53'$, & celui du Soleil de $2^s\ 0^d\ 53'$; ce qui fixe cette réapparition au 22 Mai 1701. Saturne commençoit à ſe dégager des rayons du Soleil.

(225) L'époque que nous conſidérons eſt éloignée de cinquante-neuf ans de celle de 1642. A cette derniere époque nous avons vu qu'il y avoit eu deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau. En 1701 la théorie ne donne qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau. La raiſon en eſt ſimple ; les deux racines, celles qui en 1642 donnoient la diſparition du 18 Octobre & la réapparition du 19 Décembre, étoient imaginaires en 1701. Cette derniere circonſtance jointe à ce qui a été démontré précédemment, fait voir que les anſes ont dû être ſur le point de diſparoître le 20 Novembre 1701, lorſque la Terre avoit parcouru $5^s\ 22^d\ 1'\ 50''$ depuis $8^s\ 16^d\ 5'$; c'eſt-à-dire, lorſque le lieu de la Terre étoit de $1^s\ 28^d\ 6'\ 50''$, & par conſéquent celui du Soleil de $7^s\ 28^d\ 6'\ 50''$. La proximité du plan de l'anneau & de la Terre a été telle le 20 Novembre, que ſi l'on avoit eu pour équation du Problême, $0,3085\, z + \cos z - 1,85964 = 0$, au lieu de $0,3085\, z + \text{coſin}\, z - 1,85653 = 0$, l'anneau auroit diſparu. Comme les termes conſtans de ces deux équations ne different que de 0,00311, il n'eſt pas poſſible de s'aſſurer par le ſeul calcul, ſi l'anneau a réellement diſparu ; la moindre petite erreur ſur les élémens peut avoir favoriſé ou éloigné cette diſparition. Au reſte, en ſuppoſant quelqu'épaiſſeur à l'anneau, il eſt très-probable que la diſparition a eu lieu, au moins d'une maniere inſtantanée.

(226) L'année 1701 ne fournit aucune obſervation de la phaſe ronde de Saturne ; nous ſavons ſeulement qu'elle étoit paſſée le 20 Juillet, jour de la premiere obſervation que l'on ait faite de Saturne, depuis ſa ſortie des rayons du Soleil. On ne voit pas non plus que l'on ait obſervé la grande diminution de lumiere des anſes de Saturne, ou peut-être même la diſparition totale qui a dû avoir lieu vers le 20 Novembre 1701. Cette circonſtance ſinguliere eût été très-importante à conſtater. On ne peut trop regretter que cette obſervation n'ait pas été faite.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1714 & 1715.

(227) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour les années 1714 & 1715, la théorie donne deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau ; que les équations ſuivantes avoient lieu.

Paſſage

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3142\ z - 2,27346 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3142\ z - 2,29846 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0,3142\ z - 2,32346 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3142\ z + \text{cosin}\ z - 2,27346 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3142\ z + \text{cosin}\ z - 2,29846 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0,3142\ z + \text{cosin}\ z - 2,29846 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $2^s\ 16^d\ 16'$.

(228) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on cherche la premiere racine de l'équation (5) du §. 227, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû disparoître une premiere fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $10^s\ 7^d\ 44'$, depuis $2^s\ 16^d\ 16'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $0^s\ 24^d\ 0'$, & celui du Soleil de $6^s\ 24^d\ 0'$; ce qui fixe cette premiere disparition, au 17 Octobre 1714. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 227, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû reparoître, à raison du passage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $13^s\ 29^d\ 47'$ depuis $2^s\ 16^d\ 16'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $4^s\ 16^d\ 3'$, & le lieu du soleil de $10^s\ 16^d\ 3'$; ce qui fixe cette premiere réapparition au 5 Février 1715. Si l'on calcule enfin les deux autres racines réelles de l'équation (5) du §. 227, pour déterminer les instans de la seconde disparition & de la seconde réapparition de l'anneau, on trouvera qu'à l'instant de la seconde disparition de l'anneau, la Terre avoit parcouru $15^s\ 14^d\ 17'$ depuis $2^s\ 16^d\ 16'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $6^s\ 0^d\ 33'$, & le lieu du Soleil de $0^s\ 0^d\ 33'$; ce qui fixe cette seconde disparition au 21 Mars 1715. Quant à la seconde réapparition de l'anneau, la Terre avoit parcouru $19^s\ 2^d\ 34'$ depuis

$2^s\ 16^d\ 16'$; son lieu étoit de $9^s\ 18^d\ 50'$, & celui du Soleil de $3^s\ 18^d\ 50'$; ce qui fixe cette seconde réapparition au 11 Juillet 1715.

(229) L'époque que nous considérons a donné lieu à d'excellentes recherches de M. Maraldi, sur l'anneau de Saturne. Voici comment s'explique cet Astronome, au sujet des observations qui furent faites en 1714 & 1715. (*Mémoires de l'Académie des Sciences, années* 1715 *&* 1716.)

» Depuis le 9 Octobre 1714, nous ne pûmes voir Saturne que le 12, » à cause des nuages. Ce jour là il parut avec une seule anse, qui étoit » du côté de l'Occident ; l'autre moitié de l'anse qui devoit être vers » l'Orient, ayant disparu.... Le 13, le Ciel ayant été couvert, on ne » pût observer Saturne. Le 14, on ne vit plus aucune anse, & Saturne » parut entiérement rond, comme on a continué de l'observer depuis » ce tems-là, jusqu'au premier de Février 1715, qui fut le dernier jour » que nous l'avons observé rond; cette phase ayant duré plus de trois » mois & demi. Le tems fut contraire aux observations, depuis le 1 Fé- » vrier 1715 jusqu'au 10. Nous vîmes ce jour-là Saturne qui avoit repris » ses anses.

» Le 10 Février les anses ayant commencé à paroître sombres, on » continua de les observer plus claires le reste de Février & dans le » mois de Mars. Mais depuis leur apparition, elles allerent en se re- » trécissant jusqu'au 21 de Mars, qu'on commença à les voir diffici- » lement. Le 22 on ne vit plus que la trace foible d'une anse du côté » d'Occident ; enfin le 23 mars l'anse occidentale ne se voyoit plus; » & Saturne a paru rond & sans anses le reste de Mars, tout le mois » d'Avril, de Mai, de Juin, & une partie de Juillet. On l'observa » encore en cet état le 10 & le 11 du même mois ; mais le 12 Juillet » il avoit repris ses deux anses ».

M. Cassini, dans un Mémoire lu en 1775, dit avoir trouvé sur les Registres de l'Observatoire, que M. Maraldi croyoit avoir encore vu une trace des anses de Saturne, le 16 Octobre 1714.

(230) Si l'on rapproche les Phénomenes calculés, des Phénomenes observés, il est aisé de se convaincre qu'il est difficile d'avoir un accord plus satisfaisant. Je remarquerai aussi que la réapparition des anses de Saturne, qui a eu lieu depuis le 10 Février 1715 jusqu'au 21 Mars de la même année, est correspondante au Phénomene presqu'instantané de la réapparition de l'anneau de Saturne, depuis le 1 Mars 1656 jusqu'au 8 Mars de la même année. Les racines de l'équation étoient seulement plus séparées à l'époque de 1715, qu'à celle de 1656.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1730.

(231) Nous avons vu (§. 196, 198 & 199) que pour l'année 1730,

la théorie donne deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau ; que les équations ſuivantes avoient lieu ;

Paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}72937 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(2)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}75437 = 0.$$

Surface poſtérieure de l'anneau.

$$(3)\quad 0{,}3085\, z - 2{,}77937 = 0.$$

Paſſage de la Terre par le Plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(4)\quad 0{,}3085\, z + \text{coſin}\, z - 2{,}72937 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(5)\quad 0{,}3085\, z + \text{coſin}\, z - 2{,}75437 = 0.$$

Surface poſtérieure de l'anneau,

$$(6)\quad 0{,}3085\, z + \text{coſin}\, z - 2{,}77937 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $8^f\, 16^d\, 29'$.

(232) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on ſuit la marche des Phénomenes, & que l'on réſolve l'équation (5) du §. 231, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître une premiere fois, à raiſon du paſſage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $11^f\, 8^d\, 36'$, depuis $8^f\, 16^d\, 29'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $7^f\, 25^d\, 5'$, & celui du Soleil de $1^f\, 25^d\, 5'$; ce qui fixe cette premiere diſparition au 16 Mai 1730. Si l'on cherche la ſeconde racine de la même équation, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû reparoître, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $14^f\, 0^d\, 45'$, depuis $8^f\, 16^d\, 29'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $10^f\, 17^d\, 14'$, & celui du Soleil de $4^f\, 17^d\, 14'$, ce qui fixe cette premiere réapparition au 10 Août 1730. Si l'on réſout enſuite l'équation (2) du §. 231, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître une ſeconde fois, à raiſon du paſſage du plan central par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $17^f\, 1^d\, 32'$, depuis $8^f\, 16^d\, 29'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $1^f\, 18^d\, 1'$, & celui du Soleil de $7^f\, 18^d\, 1'$; ce qui fixe cette ſeconde diſparition au 10 Novembre 1671. Si l'on cherche enfin la troiſieme racine de l'équation (5) du §. 231, pour dé-

terminer l'instant où l'anneau a dû reparoître une seconde fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $20^s\ 1^d\ 4'$, depuis $8^s\ 16^d\ 29'$; son lieu étoit donc de $4^s\ 17^d\ 33'$, & celui du Soleil de $10^s\ 17^d\ 33'$; ce qui fixe cette seconde réapparition de l'anneau au 6 Février 1731.

(233) Quoique l'année 1730 ait été très-favorable aux observations de l'anneau de Saturne, il ne paroît pas que les Astronomes s'en soient occupés à cette époque. On croit cependant que si l'on avoit le recueil des observations de M. Godin, il seroit possible qu'il s'en trouvât de relatives à ce sujet.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1744.

(234) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1744, la théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau; que les équations suivantes avoient lieu.

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0{,}3142\, z - 1{,}21362 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0{,}3142\, z - 1{,}23862 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0{,}3142\, z - 1{,}26362 = 0.$

Passage de la Terre par le centre de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0{,}3142\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}21362 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0{,}3142\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}23862 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0{,}3142\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}26362 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $2^s\ 16^d\ 40'$.

(235) Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (2) du §. 234, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû disparoître, à raison du passage du plan de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $7^s\ 15^d\ 51'$ depuis $2^s\ 16^d\ 40'$. Le lieu de la Terre étoit donc de $10^s\ 2^d\ 31'$, & celui du

Soleil de $4^s\ 2^d\ 31'$; ce qui fixe cette disparition au 25 Juillet 1744. Saturne commençoit à se plonger dans les rayons du Soleil ; on pouvoit cependant le voir encore le soir, après le coucher du Soleil. Si l'on résout ensuite l'équation (5) du §. 234, pour déterminer le moment où la Terre s'est trouvé dans le plan de l'anneau, & où, par conséquent, l'anneau a recommencé à paroître, l'on verra qu'à cet instant la Terre avoit parcouru $8^s\ 19^d\ 24'$, depuis $2^s\ 16^d\ 40'$. Le lieu de la Terre étoit donc de $11^s\ 6^d\ 4'$, & celui du Soleil de $5^s\ 6^d\ 4'$; ce qui fixe la réapparition de l'anneau, au 29 Août 1744. Saturne étoit beaucoup plus dans les rayons du Soleil, lors de ce dernier Phénomene, que lors du premier.

(236) Indépendamment de ces résultats, nous avons vu qu'il y a un *maximum* de proximité de la Terre & du plan de l'anneau, lorsque la Terre a parcouru $18^d\ 18'\ 49''$ depuis son passage par le point de l'orbite où le plan de l'anneau est tangent à cette orbite. Ce *maximum* d'approximation a donc eu lieu lorsque la Terre vue du Soleil étoit dans $2^s\ 16^d\ 40' + 18^d\ 18'\ 49'' = 3^s\ 4^d\ 58'\ 49''$; c'est-à-dire lorsque le Soleil vu de la Terre, étoit dans $9^s\ 4^d\ 58'\ 49''$, ce qui répond au 26 Décembre 1743. Ce *maximum* d'approximation étoit tel, que si l'on eût eu pour équation $0,3142\,z + \cos z - 1,04978 = 0$, l'anneau auroit disparu. L'on avoit réellement $0,3142\,z + \cos z - 1,23862 = 0$. Comme les termes constans de ces deux équations, different de 0,18884, & que 0,00542 répond à un jour, il suit que si le plan de l'anneau eût réellement passé 35 jours plutôt par le Soleil, l'anneau auroit disparu. Cette premiere disparition de l'anneau n'a donc pas eu lieu ; mais vers la fin de Décembre 1743 l'anneau a dû diminuer de lumiere.

(237) L'époque que nous considérons, est remarquable par l'Ouvrage de M. Heinsius, sur la disparition de l'anneau de Saturne. Cet Ouvrage réunit à une théorie profonde, l'avantage d'avoir conservé les observations faites en 1744. M. Heinsius ne vit point l'anneau disparoître. Comme cet Astronome observoit à Pétersbourg, & que sous cette latitude, les crépuscules des mois de Juin & de Juillet sont beaucoup plus longs qu'à Paris, les Phénomenes se passerent pendant le tems que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil. Quant à la tendance de l'anneau à disparoître vers la fin de Décembre 1743, elle a été remarquée par M. Heinsius. Il fixe au 16 Décembre 1743, la plus grande obscurité observée des anses de Saturne ; ce qui est entiérement conforme au calcul ; car il faut entendre cette époque suivant l'ancien style. Au reste on sait que vers le point précis du *maximum* géométrique, les quantités sont quelque tems stationaires.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1760.

(238) Nous avons vu (§. 196, 198 & 199) que pour l'année 1760, la

théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau ; que les équations suivantes avoient lieu ;

Passage du plan de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3085\, z - 1,68880 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3085\, z - 1,71380 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0,3085\, z - 1,73880 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3085\, z + \text{cosin}\, z - 1,68880 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3085\, z + \text{cosin}\, z - 1,71380 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0,3085\, z + \text{cosin}\, z - 1,73880 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $8^s\, 16^d\, 54'$.

(239) Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 238, pour déterminer l'instant où l'anneau a disparu, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $9^s\, 11^d\, 30'$, depuis $8^s\, 16^d\, 54'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $5^s\, 28^d\, 24'$, & celui du Soleil de $11^s\, 28^d\, 24'$; ce qui fixe cette disparition au 19 Mars 1760 ; Saturne étoit alors dans les rayons du Soleil. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 238, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû reparoître, à raison du passage du plan central par le Soleil, on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $10^s\, 18^d\, 17'$, depuis $8^s\, 16^d\, 54'$; son lieu étoit donc de $7^s\, 5^d\, 11'$, & celui du Soleil de $1^s\, 5^d\, 11'$; ce qui fixe cette réapparition au 25 Avril 1760.

Indépendamment de ces Phénomenes, l'anneau a dû beaucoup diminuer de lumiere, vers le 20 Novembre 1760, relativement à un *maximum* de proximité de la Terre & du plan de l'anneau, qui a eu lieu à cette époque.

(240) On ne connoît les observations faites en 1760, que par ce qu'en rapporte M. le Monnier. Suivant cet Astronome, Saturne s'étoit plongé dans les rayons du Soleil le 8 Février, & l'on voyoit encore les

anſes à cette époque. Le 15 Avril les anſes ne paroiſſoient pas. Le 12 Mai les anſes étoient foibles & obſcures. Quant à la diminution de la lumiere de l'anneau, qui a eu lieu vers la fin de Novembre 1760, il ne paroît pas qu'elle ait été obſervée. On n'avoit point alors d'idée bien nette de ces *maxima* d'approximation de la Terre & du plan de l'anneau. Je crois avoir développé le premier cette théorie ; du moins je ne connois perſonne qui l'ait fait avant moi, d'une maniere auſſi étendue.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1774.

(241) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1774, la théorie donne deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau ; & que les équations ſuivantes avoient lieu ;

Paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0{,}3142\, z - 2{,}12807 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0{,}3142\, z - 2{,}15307 = 0.$

Surface poſtérieure de l'anneau.

(3) $0{,}3142\, z - 2{,}17807 = 0.$

Paſſage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0{,}3142\, z + \text{coſin}\, z - 2{,}12807 = 0.$

Plan central de l'anneau

(5) $0{,}3142\, z + \text{coſin}\, z - 2{,}15307 = 0.$

Surface poſtérieure de l'anneau.

(6) $0{,}3142\, z + \text{coſin}\, z - 2{,}17807 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z étoit dans $2^s\ 17^d\ 5'$.

(242) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on ſuit la marche des Phénomenes, & que l'on réſolve l'équation (5) du §. 241, pour déterminer l'inſtant où l'anneau a dû diſparoître une premiere fois, à raiſon du paſſage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre avoit parcouru $10^s\ 0^d\ 26'$, depuis $2^s\ 17^d\ 5'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $0^s\ 17^d\ 31'$, & celui du [illegible] de $6^s\ 17^d\ 31'$; ce qui fixe cette premiere diſparition au 11 Octobre 1773. Si l'on réſout enſuite

l'équation (2) du §. 241, pour déterminer l'instant où l'anneau a dû reparoître, à raison du passage du plan central par le Soleil, l'on trouvera qu'à cet instant la Terre avoit parcouru $13^{s}\,2^{d}\,36'$, depuis $2^{s}\,17^{d}\,5'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $3^{s}\,19^{d}\,41'$, & le lieu du Soleil de $9^{s}\,19^{d}\,41'$; ce qui fixe cette premiere réapparition au 9 Janvier 1774. Si l'on calcule enfin les deux autres racines de l'équation (5) du §. 241, pour déterminer les instans de la seconde disparition & de la seconde réapparition de l'anneau, on trouvera qu'à l'instant de la seconde disparition, la Terre avoit parcouru $15^{s}\,27^{d}\,49'$, depuis $2^{s}\,17^{d}\,5'$. Le lieu de la Terre étoit donc alors de $6^{s}\,14^{d}\,54'$, & le lieu du Soleil de $0^{s}\,14^{d}\,54'$, ce qui fixe cette seconde disparition au 4 Avril 1774. Quant à la seconde réapparition de l'anneau, la Terre avoit alors parcouru $18^{s}\,21^{d}\,55'$, depuis $2^{s}\,17^{d}\,5'$; son lieu étoit de $9^{s}\,9^{d}\,0'$, & celui du Soleil de $3^{s}\,9^{d}\,0'$; ce qui fixe cette seconde réapparition au 2 Juillet 1774.

(243) Je ne rapporterai point en détail, les observations qui ont été faites à l'époque que nous considérons. Tous les Astronomes de l'Europe avoient les yeux attentifs sur les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'anneau de Saturne. Sans entrer, quant à présent, dans aucune discussion sur la cause de l'incertitude que présentent les observations de la premiere disparition de l'anneau, il suffira de dire que dans le Midi de la France cette premiere disparition a été observée le 30 Septembre 1773. A l'Observatoire royal de Paris cette premiere disparition a été fixée au 6 Octobre par MM. le Gentil, Cassini & du Vaucel. M. l'Abbé Rochon, qui observoit dans le même lieu, croit avoir vu l'anneau jusqu'au 9 Octobre. M. Messier fixe la disparition de l'anneau au 11 du même Mois ; M. de Silvabelle au 12 Octobre ; & M. Meyer prétend avoir encore vu des anses à Saturne, le 14 Octobre.

Relativement à la premiere réapparition de l'anneau, il paroît qu'on s'en tient généralement à l'observation de M. Messier, du 11 Janvier 1774.

La seconde disparition de l'anneau, présente beaucoup moins d'incertitude que la premiere A Cadix & à Toulouse, elle a été observée le 2 Avril 1774 ; M. Messier la rapporte au 4 du même mois, d'après ses observations faites à l'Observatoire de la Marine, à Paris.

Quant à la seconde réapparition de l'anneau, tout le monde s'accorde à la fixer au 1er. Juillet 1774.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1789.

(244) Nous avons vu (§. 96, 198 & 199) que pour l'an née 1789, la théorie donne deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau ; que les équations suivantes au[illegible] lieu ;

Passage

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3085\, z - 2,58664 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3085\, z - 2,61164 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0,3085\, z - 2,63664 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3085\, z + \text{cosin}\, z - 2,58664 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3085\, z + \text{cosin}\, z - 2,61164 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0,3085\, z + \text{cosin}\, z - 2,63664 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $8^s\, 17^d\, 18'$.

(245) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 244, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une premiere fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $10^s\, 27^d\, 47'$ depuis $8^s\, 17^d\, 18'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $7^s\, 15^d\, 5'$, & celui du Soleil de $1^s\, 15^d\, 5'$; ce qui fixe cette premiere disparition au 5 Mai 1789. Le Phénomene pourra être observé le matin, avant le lever du Soleil, à moins que le Crépuscule ne s'y oppose. Si l'on cherche la seconde racine de la même équation, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $14^s\, 14^d\, 1'$ depuis $8^s\, 17^d\, 18'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $11^s\, 1^d\, 19'$, & celui du Soleil de $5^s\, 1^d\, 19'$; ce qui fixe cette premiere réapparition au 24 Août 1789. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 244, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une seconde fois, à raison du passage de son plan central par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $16^s\, 5^d\, 2'$ depuis $8^s\, 17^d\, 18'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $0^s\, 22^d\, 20'$, & celui du Soleil de $6^s\, 22^d\, 20'$; ce ce qui fixe cette seconde disparition, au 15 Octobre 1789. Si l'on cherche enfin la troisieme racine de l'équation (5) du §. 244, pour déter-

miner l'inſtant où l'anneau reparoîtra une ſeconde fois, à raiſon du paſſage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $19^s\ 23^d\ 37'$ depuis $8^s\ 1[?]^d\ 18'$; ſon lieu ſera donc de $4^s\ 10^d\ 55'$, & celui du Soleil de $10^s\ 10^d\ 5[?]'$; ce qui fixe cette ſeconde réapparition de l'anneau au 30 Janvier 1790. Saturne commencera à entrer dans les rayons du Soleil.

(246) On voit que l'époque de 1789 ſera favorable aux obſervations de l'anneau de Saturne. Il faudra ſeulement avoir attention d'obſerver Saturne le plutôt qu'il ſera poſſible, lorſque cet Aſtre ſe dégagera le matin des rayons du Soleil, en Mai 1789. Il faudra auſſi le ſuivre le plus long-tems qu'il ſera poſſible, en Janvier 1790, lorſqu'il ſe plongera dans les rayons ſolaires. Ces obſervations ſeront d'autant plus importantes, que l'on n'a pas encore d'obſervations complettes dans le nœud auſtral de l'anneau.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1803.

(247) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1803, la théorie ne donne qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau; que les équations ſuivantes auront lieu.

Paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3142\,z - 1{,}06823 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(2)\quad 0{,}3142\,z - 1{,}09323 = 0.$$

Surface poſtérieure de l'anneau.

$$(3)\quad 0{,}3142\,z - 1{,}11823 = 0.$$

Paſſage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(4)\quad 0{,}3142\,z + \text{coſin}\,z - 1{,}06823 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(5)\quad 0{,}3142\,z + \text{coſin}\,z - 1{,}09323 = 0.$$

Surface poſtérieure de l'anneau.

$$(6)\quad 0{,}3142\,z + \text{coſin}\,z - 1{,}11823 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z ſera dans $2^s\ 17^d\ 29'$.

(248) Dans le cas dont il s'agit l'équation du Problême n'a qu'une racine réelle. Si l'on ſuit la marche des Phénomenes, & que l'on réſolve

l'équation (2) du §. 247, pour déterminer l'inſtant où l'anneau diſparoîtra, à raiſon de ſon paſſage par le centre du Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $6^s\ 19^d\ 21'$, depuis $2^s\ 17^d\ 29'$. Le lieu de la Terre ſera donc de $9^s\ 6^d\ 50'$, & celui du Soleil de $3^s\ 6^d\ 50'$; ce qui fixe cette diſparition au 28 Juin 1803. Saturne commencera à s'approcher du Soleil. Cette raiſon jointe à la longueur des Crépuſcules du Solſtice d'été, pourra peut-être rendre l'obſervation difficile. Si l'on réſout enſuite l'équation (5) du §. 247, pour déterminer le moment où la Terre ſe trouvera dans le plan central de l'anneau, & où, par conſéquent, l'anneau recommencera à paroître, on verra qu'à cet inſtant la Terre aura parcouru $8^s\ 12^d\ 50'$, depuis $2^s\ 17^d\ 29'$. Le lieu de la Terre ſera donc de $11^s\ 0^d\ 19'$, & celui du Soleil de $5^s\ 0^d\ 19'$; ce qui fixe cette réapparition au 23 Août 1803. Saturne ſera beaucoup plus dans les rayons du Soleil, lors de ce dernier Phénomene, que lors du premier.

(249) Indépendamment de ces réſultats, on obſervera en 1803, un Phénomene ſemblable à celui dont M. Heinſius a fait mention ſous l'époque de 1744. Vers le 26 Décembre 1802, les anſes ſeront ſur le point de diſparoître. L'approximation de la Terre & du plan de l'anneau, ſera infiniment plus conſidérable qu'en 1744, & les anſes perdront beaucoup plus de leur lumière. Nous avons vu que pour que les anſes euſſent entiérement diſparu en 1744, il auroit fallu que le plan de l'anneau eût paſſé trente-cinq jours plutôt par le Soleil; en 1803, il ſuffira que le plan de l'anneau paſſe par cet Aſtre huit jours plutôt, pour que les anſes diſparoiſſent. Il y a donc grand apparence qu'elle diſparoîtront réellement pour la plupart des lunettes; & qu'il n'y aura que les plus forts inſtrumens qui pourront les faire appercevoir. Nous verrons que cette tendance de l'anneau à diſparoître, produira une véritable diſparition en 1861.

(250) Les Phénomenes de l'année 1803 ont beaucoup d'analogie avec ceux de 1744. La diminution de la lumière des anſes de Saturne, qui aura lieu à la fin de 1802, ſera même plus intéreſſante à obſerver que celle qui a eu lieu à la fin de 1743; & la diſparition de la fin de Juin 1803, ſera probablement viſible, quoique le Phénomene analogue ait échappé aux Aſtronomes en 1744.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1819.

(251) Nous avons vu (§. 196, 198 & 199) que pour l'année 1819, la théorie ne donne qu'une ſeule diſparition & une ſeule réapparition de l'anneau; que les équations ſuivantes auront lieu;

Paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3085 \cdot z - 1{,}54607 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

(2) $0{,}3085\, z - 1{,}57107 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0{,}3085\, z - 1{,}59607 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}54607 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}57107 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}59607 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $8^{s}\, 17^{d}\, 43'$.

(252) Dans le cas dont il s'agit l'équation du Problême n'a qu'une racine réelle. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 251, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $9^{s}\, 5^{d}\, 6'$, depuis $8^{s}\, 17^{d}\, 43'$. Le lieu de la Terre sera donc de $5^{s}\, 22^{d}\, 49'$, & celui du Soleil de $11^{s}\, 22^{d}\, 49'$; ce qui fixe cette disparition au 13 Mars 1819. Saturne sera alors plongé dans les rayons du Soleil. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 251, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage du plan central par le Soleil, on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $9^{s}\, 21^{d}\, 47'$, depuis $8^{s}\, 17^{d}\, 43'$. Le lieu de la Terre sera donc de $6^{s}\, 9^{d}\, 30'$, & celui du Soleil de $0^{s}\, 9^{d}\, 30'$; ce qui fixe cette réapparition au 30 Mars 1819. Saturne sera encore plongé dans les rayons du Soleil.

Il y a grande apparence que quelqu'attention qu'apportent les Astronomes à saisir les instans favorables, ils ne pourront rien observer en 1819. Quant au *maximum* d'approximation de la Terre & du plan de l'anneau, correspondant au *maximum* qui auroit pu être observé vers le 20 Novembre 1760, & qui aura aussi lieu le 20 Novembre 1819, il ne produira pas de diminution sensible dans la lumière de l'anneau, attendu qu'en 1819, à l'instant de cette plus grande proximité, la Terre sera encore fort éloignée du plan de l'anneau. Il n'en étoit pas de même en 1760.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1832.

(253) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1832,

la théorie donne deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau; que les équations suivantes auront lieu,

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3142\, z - 1,98268 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3142\, z - 2,00768 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0,3142\, z - 2,03268 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3142\, z + \text{cosin}\, z - 1,98268 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3142\, z + \text{cosin}\, z - 2,00768 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0,3142\, z + \text{cosin}\, z - 2,03268 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $2^s\, 17^d\, 53'$.

(254) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois racines réelles. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 253, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une première fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment, la Terre aura parcouru $9^s\, 23^d\, 27'$, depuis $2^s\, 17^d\, 53'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $0^s\, 11^d\, 20'$, & celui du Soleil de $6^s\, 11^d\, 20'$; ce qui fixe cette premiere disparition au 4 Octobre 1832. Saturne commencera à sortir des rayons du Soleil; & si l'on est attentif au Phénomene, on pourra l'observer le matin. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 253, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à cet instant la Terre aura parcouru $12^s\, 6^d\, 5'$, depuis $2^s\, 17^d\, 53'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $2^s\, 23^d\, 58'$, & celui du Soleil de $8^s\, 23^d\, 58'$; ce qui fixe cette première réapparition au 15 Décembre 1832. Si l'on calcule enfin les deux autres racines de l'équation (5) du §. 253, pour déterminer les instans de la seconde disparition & de la seconde réapparition de l'anneau, on trouvera qu'à l'instant de la seconde disparition de l'anneau, la Terre aura parcouru $16^s\, 15^d\, 9'$,

depuis $2^s\ 17^d\ 53'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $7^s\ 2^d\ 53'$, & le lieu du Soleil de $1^s\ 2^d\ 53'$; ce qui fixe cette seconde disparition au 23 Avril 1833. Quant à la seconde réapparition de l'anneau, la Terre aura alors parcouru $18^s\ 10^d\ 40'$, depuis $2^s\ 17^d\ 53'$; son lieu sera de $8^s\ 28^d\ 33'$, & celui du Soleil de $2^s\ 28^d\ 33'$; ce qui fixe cette seconde réapparition au 20 Juin 1833.

(255) On voit par-là que l'époque de 1832 sera favorable aux observations de l'anneau de Saturne ; il faudra seulement avoir soin d'observer Saturne le plutôt qu'il sera possible, lors de sa sortie des rayons du Soleil, à la fin de Septembre & au commencement d'Octobre 1832. Mais comme les observations des années 1714 & 1773 ont fait voir qu'en pareilles circonstances on pouvoit observer Saturne dès le 21 Septembre, il y a apparence que la premiere observation, celle du 3 Octobre 1832, qui paroît présenter le plus de difficultés, pourra avoir lieu.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1848.

(256) Nous avons vu (196, 198 & 199) que pour l'année 1848, la théorie donne deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau ; que les équations suivantes auront lieu.

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0{,}3085\,z - 2{,}44391 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0{,}3085\,z - 2{,}46891 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0{,}3085\,z - 2{,}49391 = 0.$

Passage de la Terre par le Plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0{,}3085\,z + \text{cosin}\,z - 2{,}44391 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0{,}3085\,z + \text{cosin}\,z - 2{,}46891 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0{,}3085\,z + \text{cosin}\,z - 2{,}49391 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $8^s\ 18^d\ 7'$.

(257) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême a trois

racines. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 256, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une premiere fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru 1^s 18^d $51'$, depuis 8^s 18^d $7'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de 7^s 6^d $58'$, & celui du Soleil de 1^s 6^d $58'$; ce qui fixe cette premiere disparition au 27 Avril 1848. Le Phénomene pourra être observé le matin, lorsque Saturne commencera à se dégager des rayons du Soleil, à moins que le Crépuscule ne s'y oppose. Si l'on cherche la seconde racine de la même équation, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru 14^s 26^d $11'$, depuis 8^s 18^d $7'$. Le lieu de la terre sera donc de 11^s 14^d $18'$, & celui du Soleil de 5^s 14^d $18'$; ce qui fixe cette premiere réapparition au 7 Septembre 1848. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 256, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une seconde fois, à raison du passage du plan central de l'anneau par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru 15^s 8^d $31'$ depuis 8^s 18^d $7'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de 11^s 26^d $38'$, & celui du soleil de 5^s 26^d $38'$; ce qui fixe cette seconde disparition au 19 Septembre 1848. Si l'on cherche enfin la derniere racine de l'équation (5) du §. 256, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra une seconde fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru 19^s 16^d $28'$, depuis 8^s 18^d $7'$; son lieu sera donc de 4^s 4^d $35'$, & celui du Soleil de 10^s 4^d $35'$; ce qui fixe cette seconde réapparition de l'anneau, au 24 Janvier 1849. Saturne commencera à entrer dans les rayons du Soleil.

(258) On voit que l'époque de 1848 sera aussi favorable aux observations de l'anneau de Saturne, que celles des années 1789 & 1730; il y a même quelques différences qui rendent les observations de l'année 1848 encore plus intéressantes. Il faudra premiérement avoir attention, comme en 1789, d'observer Saturne le plutôt qu'il sera possible, lorsqu'il se dégagera le matin des rayons du Soleil, à la fin d'Avril 1848; il faudra aussi le suivre le plus long-tems qu'il sera possible en Janvier 1849, lorsqu'il se plongera dans les rayons solaires. Mais ce qui rend les observations de 1848 singuliérement intéressantes, c'est la réapparition momentanée de l'anneau, en Septembre 1848; réapparition qui, d'après le calcul, ne doit durer que douze jours, depuis le 7 Septembre jusqu'au 19 du même mois. Ce Phénomene, dont nous avons déja un exemple en 1656, & qui ne fut point alors observé, n'échappera probablement pas aux Astronomes, en 1848. On sent assez combien il sera intéressant pour déterminer les élémens de l'anneau de Saturne.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1862.

(259) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1862, la théorie donne deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau; que les équations suivantes auront lieu;

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0,3142\,z - 2,89713 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(2) $0,3142\,z - 2,92213 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0,3142\,z - 2,94713 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0,3142\,z + \text{cosin}\, z - 2,89713 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0,3142\,z + \text{cosin}\, z - 2,92213 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0,3142\,z + \text{cosin}\, z - 2,94713 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $2^s\ 18^d\ 18'$.

(260) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du problême a trois racines réelles. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on cherche la premiere racine de l'équation (5) du §. 259, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une premiere fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $11^s\ 22^d\ 15'$, depuis $2^s\ 18^d\ 18'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $2^s\ 10^d\ 33'$, & celui du Soleil de $8^s\ 10^d\ 33'$; ce qui fixe cette premiere disparition au 2 Décembre 1861. Si l'on cherche la seconde racine de la même équation, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage de la Terre par le plan de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $13^s\ 15^d\ 40'$, depuis $2^s\ 18^d\ 18'$. Le lieu de la Terre sera donc de $4^s\ 3^d\ 58'$, & celui du Soleil de $10^s\ 3^d\ 58'$; ce qui fixe cette premiere réapparition au 24 Janvier 1862. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 259, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra une seconde fois, à raison du passage de son plan central par le Soleil, l'on trouvera qu'à ce moment

la Terre aura parcouru $17^s\ 22^d\ 52'$, depuis $2^s\ 18^d\ 18'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $8^s\ 11^d\ 10'$; & celui du Soleil de $2^s\ 11^d\ 10'$; ce qui fixe cette seconde disparition au 2 Juin 1862. Si l'on cherche enfin la derniere racine de l'équation (5) du §. 259, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra une seconde fois, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $20^s\ 6^d\ 16'$, depuis $2^s\ 18^d\ 18'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $10^s\ 24^d\ 34'$, & celui du Soleil de $4^s\ 24^d\ 34'$; ce qui fixe cette seconde réapparition au 17 Août 1862. Cette observation pourra être difficile à faire, soit à cause du Crépuscule, soit parce que Saturne commencera à se plonger dans les rayons du Soleil.

(261) L'époque que nous considérons ici, est éloignée de cinquante-neuf ans de celle de 1803. La premiere disparition de l'anneau répond à la diminution de lumiere observée à la fin de Décembre 1744 par M. Heinsius, diminution qui sera beaucoup plus sensible en 1803, & qui produira enfin une véritable disparition de l'anneau en 1862.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1878.

(262) Nous avons vu (§. 196, 198 & 199) que pour l'année 1878, la théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau; que les équations suivantes auront lieu.

Passage du plan de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(1)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}40334 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(2)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}42834 = 0.$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(3)\quad 0{,}3085\, z - 1{,}45334 = 0.$$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

$$(4)\quad 0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}40334 = 0.$$

Plan central de l'anneau.

$$(5)\quad 0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}42834 = 0.$$

Surface postérieure de l'anneau.

$$(6)\quad 0{,}3085\, z + \text{cosin}\, z - 1{,}45334 = 0.$$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $8^s\ 18^d\ 32'$.

(263) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême n'a qu'une racine réelle. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (2) du §. 262, pour déterminer l'instant où l'anneau dispa-

roîtra, à raison du passage de son plan central par le Soleil, on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $8^s 25^d 16'$, depuis $8^s 18^d 32'$. Le lieu de la Terre sera donc de $5^s 13^d 48'$, & celui du Soleil de $11^s 13^d 48'$; ce qui fixe cette disparition au 4 Mars 1878. Saturne sera alors dans les rayons du Soleil. Si l'on résout ensuite l'équation (5) du §. 262, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on verra qu'à ce moment la Terre aura parcouru $8^s 28^d 52'$, depuis $8^s 18^d 32'$; son lieu sera donc de $5^s 17^d 24'$, & celui du Soleil de $11^s 17^d 24'$; ce qui fixe cette réapparition au 8 Mars 1878. Saturne sera alors dans les rayons du Soleil.

(264) Ces déterminations font voir que quelqu'attention qu'apportent les Astronomes à saisir les instans favorables, ils ne pourront probablement rien observer en 1878. Il n'y aura d'ailleurs aucune approximation sensible de la Terre & du plan de l'anneau.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1891.

(265) Nous avons vu (§. 189, 194 & 195) que pour l'année 1891, la théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau ; que les équations suivantes auront lieu.

Passage de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) $0{,}3142\,z - 1{,}83729 = 0.$

Plan central.

(2) $0{,}3142\,z - 1{,}86229 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(3) $0{,}3142\,z - 1{,}88729 = 0.$

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure de l'anneau.

(4) $0{,}3142\,z + \text{cosin}\,z - 1{,}83729 = 0.$

Plan central de l'anneau.

(5) $0{,}3142\,z + \text{cosin}\,z - 1{,}86229 = 0.$

Surface postérieure de l'anneau.

(6) $0{,}3142\,z + \text{cosin}\,z - 1{,}88729 = 0.$

Et qu'enfin l'origine des angles z sera dans $2^s 18^d 42'$.

(266) Dans le cas dont il s'agit, l'équation du Problême n'a qu'une racine réelle. Si l'on suit la marche des Phénomenes, & que l'on résolve l'équation (5) du §. 265, pour déterminer l'instant où l'anneau disparoîtra, à raison du passage de la Terre par le plan central de l'anneau, l'on trouvera qu'à ce moment la Terre aura parcouru $9^s 16^d 27'$, depuis

$2^s\ 18^d\ 42'$. Le lieu de la Terre sera donc alors de $0^s\ 5^d\ 9'$, & celui du Soleil de $6^s\ 5^d\ 9'$; ce qui fixe cette disparition au 28 Septembre 1891. Saturne commencera à sortir des rayons du soleil ; & si l'on est très-attentif au Phénomene, on pourra l'observer le matin avant le lever du Soleil. Si l'on résout ensuite l'équation (2) du §. 265, pour déterminer l'instant où l'anneau reparoîtra, à raison du passage de son plan central par le Soleil, l'on trouvera qu'à cet instant la Terre aura parcouru $11^s\ 9^d\ 35'$, depuis $2^s\ 18^d\ 42'$. Son lieu sera donc de $1^s\ 28^d\ 17'$, & celui du Soleil de $7^s\ 28^d\ 17'$; ce qui fixe cette réapparition au 20 Novembre 1891.

(267) Les Phénomenes que l'on observera en 1891, correspondent à ceux des années 1833, 1774 & 1715. A ces époques nous avons vu qu'il y avoit deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau ; cependant en 1891, la théorie ne donne qu'une seule disparition & une seule réapparition. La raison en est simple ; les deux dernieres racines, celles qui donnoient les disparitions du 21 Mars 1715, du 4 Avril 1774, du 23 Avril 1833, & les réapparitions du 11 Juillet 1715, du 2 Juillet 1774, & du 20 Juin 1833, seront imaginaires en 1891.

Cette circonstance fait voir que les anses seront sur le point disparoître, vers le 21 Mai 1892. En effet nous avons démontré qu'il y a un *maximum* d'approximation de la Terre & du plan de l'anneau, lorsque la Terre a parcouru $5^s 21^d\ 41'\ 11''$, depuis l'origine des angles z. Le *maximum* d'approximation aura donc lieu, lorsque la Terre vue du Soleil sera dans $8^s\ 0^d\ 23'\ 11''$, & que le Soleil vu de la Terre, sera dans $2^s\ 0^d\ 23'\ 11''$. L'approximation sera telle que si l'on eût eu pour équation $0{,}3142\ z + \text{cos}.\ z - 1{,}91166 = 0$, l'anneau auroit disparu. L'on avoit réellement $0{,}3142\ z + \text{cos}.\ z - 1{,}86229 = 0$. Les termes constants de ces deux équations ne different que de 0,04937 ; & comme 0,00542 répond à un jour, il suit que si le plan de l'anneau passoit réellement neuf jours plus tard par le Soleil, qu'on ne l'a supposé, l'anneau disparoîtroit. Cette disparition de l'anneau n'aura donc probablement pas lieu ; mais vers le 21 Mai 1892 l'anneau perdra beaucoup de sa lumiere, & ne sera visible qu'avec de grandes lunettes.

Il sera essentiel d'être attentif à ce Phénomene, d'autant plus que l'incertitude dans laquelle on est sur les véritables mouvemens de Saturne ne permet pas de prononcer définitivement sur cette disparition.

ARTICLE II.

Remarques sur les observations des paragraphes précédens, relativement au choix que l'on doit faire de celles de ces observations qu'il convient d'employer à la détermination des véritables élémens de l'anneau de Saturne.

(268) Je vais présenter maintenant quelques remarques sur le choix que l'on doit faire de celles des observations des paragraphes précédens,

qu'il convient d'employer de préférence, à la détermination des véritables élémens de l'anneau de Saturne. Je ne parlerai point des observations futures. J'ai indiqué pour chaque année, ce que chacune des époques présentera d'intéressant aux Astronomes, & je ne doute pas que l'on ne s'occupe avec le plus grand soin de ces Phénomènes. Je ne m'étendrai que sur les époques passées.

(269) J'observerai d'abord que nous ne sommes plus dans le cas où se trouvoit M. Huyghens en 1656. Tout alors étoit à faire dans la matiere dont il s'agit. Il falloit donc employer toutes les observations, même les plus incomplettes. Depuis cette époque, les travaux de MM. Huyghens, Maraldi, Heinsius, &c. ont porté le plus grand jour sur ce sujet; & il n'est question que de parvenir à la derniere exactitude. On s'écarteroit donc de son objet, & l'on risqueroit de manquer le but proposé, si l'on faisoit indistinctement usage de toutes les observations. Il faut les examiner avec un esprit de critique, avant que de les employer dans les calculs. C'est sous ce point de vue que je vais considérer sommairement les observations faites depuis 1600.

(270) Nous avons d'abord les observations faites en 1612 par Galilée. Mais par le rapprochement de ces observations avec le calcul, il est aisé de se convaincre qu'elles n'ont pas, à beaucoup près, l'exactitude nécessaire pour pouvoir être employées à des déterminations délicates. Il y a près de deux mois entre le résultat du calcul & les observations; nous croyons donc que l'on doit mettre ces observations à l'écart. On ne doit cependant pas négliger de remarquer que, suivant Galilée, vers le Solstice d'Eté de l'année 1612, l'anneau paroissoit encore. Nous avons déja dit que cette observation est très-singulière, & qu'il est assez difficile d'expliquer comment Galilée a pu voir l'anneau à une époque où il devoit être sur le point de disparoître, tandis qu'au mois de Septembre 1612 il l'a perdu de vue, quoique dans une position beaucoup plus favorable pour être obsérvé.

(271) Nous n'avons aucune observation sous la date de 1626. Les Phénomenes se sont passés tandis que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil.

(272) Nous avons les observations faites en 1642 par Gassendi, & par les autres Astronomes de ce tems là. Elles sont incomplettes. On n'a vu qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau, quoiqu'il y ait eu deux disparitions & deux réapparitions. D'ailleurs, il y a près de deux mois entre le résultat du calcul & les observations. Nous pensons donc que ces observations ne méritent pas qu'on s'y arrête.

(273) On peut faire à-peu-près la même remarque sur les observations faites par M. Huyghens en 1656. Il n'a vu qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau, quoiqu'en effet il y ait eu deux disparitions & deux réapparitions. Il est vrai que la premiere réapparition de l'anneau n'a été que momentanée, & que, quoique sensible au calcul, elle a pu échapper à l'observateur le plus attentif; que peut-être même

M. Huyghens a été contrarié par le tems. Quoi qu'il en soit, le fait très-important de cette réapparition instantanée n'a pas été constaté. D'ailleurs les observations que rapporte M. Huyghens, different de près de deux mois de ce que donne le calcul. Nous croyons donc que ces observations ne sont pas assez exactes pour pouvoir être employées à des déterminations précises & délicates.

(274) En 1685, les Phénomenes se sont passés tandis que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil. M. Huyghens a cherché à les observer. Cela étoit impossible par la circonstance dont nous venons de parler; aussi n'a-t-il rien vu.

(275) L'époque de 1701 pouvoit fournir des observations intéressantes; & quoique les premiers Phénomenes se soient passés dans des instans voisins de ceux où Saturne étoit dans les rayons solaires, il auroit cependant été possible d'observer la réapparition de l'anneau du mois de Juin 1701. On auroit pu sur-tout constater la grande diminution de la lumiere de l'anneau, ou peut-être même sa disparition totale, à la fin de Novembre 1701. Aucune de ces observations n'a été faite.

(276) L'année 1730, quoique favorable aux observations, n'en fournit aucune. En 1744, M. Heinsius paroît avoir été contrarié par la longueur des Crépuscules d'Eté; il observoit à Pétersbourg. Sous des latitudes plus méridionales on auroit pu faire les observations indiquées par le calcul; mais personne, si l'on excepte M. Heinsius, ne s'occupoit alors de cette théorie.

(277) En 1760 les Phénomènes se sont passés tandis que Saturne étoit plongé dans les rayons du Soleil. Cette circonstance rendoit les observations difficiles. On sçait seulement qu'au commencement de Février, Saturne n'avoit pas encore perdu ses anses, & qu'il les avoit recouvré au commencement de Mai.

(278) Nous croyons, d'après ces remarques, que les différentes observations que nous venons de rapporter sommairement, n'ont pas l'exactitude nécessaire pour être employées à des déterminations délicates. Il faut seulement que les solutions auxquelles on parviendra par des observations plus précises, ne contrarient pas ces résultats. Au reste les observations dont il vient d'être question, présentent une telle latitude dans les élémens de l'anneau, qu'il n'y a aucune inquiétude à avoir à ce sujet. Passons à l'examen des observations plus exactes.

(279) Les observations qui présentent véritablement un caractere d'exactitude, & que l'on doit soumettre au calcul, sont celles faites en 1715 & en 1774, dans le nœud boréal de l'anneau. En 1715 & en 1774, la suite des observations est complette. Nous ne rapporterons point ici ces observations; nous nous réservons de les exposer avec quelque détail, dans l'Article même où nous les calculerons.

(280) Quant aux observations de 1671, elles sont moins complettes que celles de 1715 & 1774. En 1671 l'on avoit, comme en 1715 & 1774,

deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau. La derniere réapparition de l'anneau, celle du commencement de Février 1672, n'a point été observée ; Saturne commençoit à se plonger dans les rayons du Soleil, & l'observation étoit très-difficile ou peut-être meme impossible. La premiere disparition de l'anneau, celle de la fin de Maî 1671, n'a point été observée avec l'exactitude nécessaire pour assurer une bonne observation. A cette époque Saturne se dégageoit des rayons du Soleil. La premiere fois que Dominique Cassini ait pu observer cet Astre, il étoit à la vérité sans anses. Mais Saturne a-t-il été réellement observé le jour même de la disparition de l'anneau ? Auroit-il été vu sans anses avant l'époque de cette premiere observation ? C'est ce qu'il est impossible de constater, & ce qui jette de l'incertitude sur cette premiere observation. La réapparition du 13 Août paroît tardive, si on la compare au calcul. Les observations du commencement de Décembre présentent quelques lacunes occasionnées par les nuages, de sorte que le jour précis de la disparition de l'anneau n'est pas rigoureusement déterminé.

Ces remarques font voir, ce me semble, qu'il ne faudroit pas déranger des conclusions établies sur des observations plus précises, parce qu'elles ne satisferoient point avec la derniere rigueur aux observations de 1671. Ces observations approchent d'être exactes ; mais par les circonstances qui les ont accompagnées, elles n'ont pas toute la précision des observations faites en 1715 & 1774.

Remarque sur une période que l'on a cru ramener les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'anneau de Saturne dans le même ordre.

(281) Je terminerai cet Article par quelques remarques sur une période de cinquante-neuf ans, que l'on a cru ramener les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'anneau de Saturne dans le même ordre. Comme cette question a été agitée dans notre Académie, j'ai cru que l'on verroit avec plaisir ce que l'on doit penser à ce sujet.

(282) Si l'on jette les yeux sur les calculs précédens, il sera aisé de voir que cette période n'existe pas véritablement. Les Phénomenes de l'année 1671, relativement à l'hypothese dont il s'agit, répondent à ceux de l'année 1612. En 1612, l'on n'avoit qu'une disparition & une réapparition de l'anneau ; en 1671, l'on a eu deux disparitions & deux réapparitions. Les Phénomenes des années 1701 & 1760, répondent à ceux de l'année 1642. En 1642, l'on avoit deux disparitions & deux réapparitions de l'anneau ; en 1701 & en 1760, l'on n'a eu qu'une seule disparition & une seule réapparition. Si l'on part, il est vrai, de l'année 1626, l'on a quatre époques de suite, éloignées de cinquante-neuf ans chacunes, lors desquelles l'on n'a observé qu'une seule disparition & une seule réapparition de l'anneau ; la période est en défaut en 1862. Si l'on part de l'année 1656, l'on a

pareillement quatre époques de ſuite, éloignées de cinquante-neuf ans chacunes, lors deſquelles l'on a obſervé deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau; la période eſt en défaut en 1891. Je dis plus; dans les années même qui, relativement au nombre des diſparitions & des réapparitions de l'anneau, ne paroiſſent pas, au premier coup-d'œil, contredire la période en queſtion, il s'en faut de beaucoup que les Phénomenes arrivent dans les mêmes tems; ce qui cependant ſeroit néceſſaire pour conſtituer une véritable période. Prenons pour exemple les années 1656 & 1832. A l'époque de 1656, l'anneau a diſparu le 24 Octobre 1655, a reparu le 1 Mars 1656, a diſparu une ſeconde fois le 8 Mars 1656, & a reparu enfin pour la ſeconde fois le 19 Juillet 1656. A l'époque de 1832, l'anneau diſparoîtra le 4 Octobre 1632, reparoîtra le 15 Décembre, diſparoîtra une ſeconde fois le 23 Avril 1833, & reparoîtra enfin pour la ſeconde fois le 20 Juin 1833. Or quelle analogie peut-on ſuppoſer entre une réapparition momentanée qui n'a duré que ſept jours en 1656, depuis le 1 Mars juſqu'au 8 du même mois, & une réapparition de plus de quatre mois, qui durera depuis le 15 Décembre 1832 juſqu'au 23 Avril 1833?

(283) Les concluſions que nous venons d'indiquer, ſont également ſenſibles par l'inſpection des formules des §. 187 & 197. Soit, en effet,

N le nombre des révolutions de Saturne, depuis l'époque dont on part, juſqu'à celle pour laquelle on calcule.

L'on a vu que dans les formules des §. 187 & 197, qui déterminent le nombre des diſparitions de l'anneau, l'on a un terme de la forme ſuivante, $+ N (166^d 44' 41'')$.

Si l'on part d'une certaine époque, il eſt bien clair que cinquante-neuf ans après on aura $N = 2$; qu'enſuite l'on aura $N = 4$, &c. Il faudroit donc, pour que la période en queſtion eût véritablement lieu, que $2 (166^d 44' 41'')$, $4 (166^d 44' 41'')$, &c. fût un multiple de 360^d; or le contraire eſt évident. Il eſt vrai que d'une époque à l'autre, il n'y a qu'environ 27 degrés de différence dans le lieu de la Terre, à l'inſtant où l'anneau devient tangent à l'orbite terreſtre; que cette différence peut, par des compenſations d'Analyſe, ne pas produire une très-grande différence entre les réſultats, comme il eſt arrivé en 1715 & en 1774; mais ce ſont des hazards ſur leſquels on ne doit point compter.

ARTICLE III.

Solution rigoureuſe du Problême des diſparitions & des réapparitions de l'anneau de Satnrne.

(284) Les recherches précédentes ne ſont, ainſi que nous l'avons dit, que des ſolutions approchées du Problême des diſparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne; je dois faire voir maintenant

comment ces approximations conduisent à la solution rigoureuse de la question.

Pour résoudre le Problême dont il s'agit, on se rappellera (§. 179 & 180) que si l'on nomme

R′ le rayon vecteur de Saturne ; cette quantité se détermine au moyen de l'équation (2) du §. 169.

2 e la distance interceptée sur l'écliptique entre la surface antérieure & la surface postérieure de l'anneau.

R le rayon vecteur de la Terre ; cette quantité se détermine au moyen de l'équation (2) du §. 168.

Et que d'ailleurs l'on détermine la latitude héliocentrique de Saturne, au moyen de l'équation (4) du §. 173 ; & sa longitude héliocentrique sur l'écliptique, au moyen de l'équation (1) du §. 175, l'on a

Passage du plan de l'anneau par le centre du Soleil.

Surface antérieure de l'anneau.

(1) R′ cos (latit. hélioc. de Saturne) cos (longit. hélioc. de Sat. sur l'écl. + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) + R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang. (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) — $e = 0$.

Plan central.

(2) cos (latit. hélioc. de Saturne) cos (longit. hélioc. de Sat. sur l'éclipt. + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) + sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang. (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) = 0.

Surface postérieure.

(3) R′ cos (latit. hélioc de Sat.) cos (longit. hélioc. de Sat. sur l'éclipt. + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) + R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang. (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) + $e = 0$.

Passage de la Terre par le plan de l'anneau.

Surface antérieure.

(4) R cos (longit. de la Terre + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) — R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hélioc. de Sat. sur l'éclipt. + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) — R′ sin (latit. hél. de Sat.) cotang (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) + $e = 0$.

Plan central.

(5) R cos (longit. de la Terre + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) — R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hélioc. de Sat. sur l'éclipt. + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau)— R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) = 0.

Surface postérieure.

(6) R cos (longit. de la Terre + 90ᵈ — longit. du nœud de l'anneau) — R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hélioc. de Sat. sur l'éclipt. + 90ᵈ — longit du nœud de l'anneau) — R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang. (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique — $e = 0$.

Maintenant

Maintenant puifque les méthodes d'approximation détaillées ci-deffus font connoître à très-peu près l'inftant des Phénomenes, on connoîtra le lieu de la Terre pour cet inftant approché. On connoîtra de plus le lieu correfpondant de Saturne dans fon orbite, ainfi que fa longitude & fa latitude héliocentriques, foit au moyen des Tables Aftronomiques, foit au moyen de ces mêmes Tables rectifiées par de bonnes obfervations. On connoîtra donc la longitude de la Terre, la longitude & la latitude héliocentriques de Saturne qui répondent aux inftans approchés des Phénomenes. Dans celle des équations qui fatisfait au Phénomene que l'on veut calculer rigoureufement, je fubftitue les valeurs de R, R', de la longitude de la Terre, de la longitude & de la latitude héliocentriques de Saturne, conclus au moyen de la premiere approximation.

Soit

α ce que devient l'équation dans cette hypothèfe.

Je fais varier la longitude de la Terre de 60', la longitude héliocentrique de Saturne de $\frac{60'}{29,5}$, attendu que tel eft le rapport des angles traverfés pendant le même tems par la Terre & par Saturne dans leurs orbites refpectives. Soit

β ce que devient l'équation dans cette nouvelle fuppofition.

Je remarque, que puifque dans la premiere fuppofition l'équation étoit réduite à α, que dans la feconde fuppofition, cette équation eft réduite à β; que de plus cette équation doit être nulle, lorfque le Phénomene a véritablement lieu; fi l'on nomme

d (longitude de la Terre) la différence entre la longitude de la Terre donnée par la méthode d'approximation, & celle qui a véritablement lieu à l'inftant du Phénomene;

l'on a la proportion fuivante $\alpha : \alpha - \beta :: d$ (longit. Terre) : 60'; donc

$$d\,(\text{longitude Terre}) = \frac{\alpha \times 60'}{\alpha - \beta}.$$

On connoîtra donc la véritable longitude de la Terre à l'inftant du Phénomene, puifqu'elle eft égale à la longitude donnée par la méthode d'approximation plus à d (longitude Terre).

(285) Lorfque l'on calculera ce que devient l'équation qui fatisfait rigoureufement au Problême, en faifant varier la longitude de la Terre de 60', & celle de Saturne de $\frac{60'}{29,5}$, il eft évident qu'il fera inutile d'évaluer de nouveau, le rayon vecteur R' de Saturne, & fa latitude héliocentrique. On pourroit auffi fe difpenfer de calculer de nouveau le rayon vecteur R de la Terre.

CHAPITRE QUATRIEME.

De l'élévation du Soleil & de la Terre au-dessus du plan de l'anneau pour un instant quelconque ; & des questions relatives à cette élévation.

Je me propose dans ce Chapitre de donner l'expression de l'élévation de la Terre & du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, pour un instant quelconque ; & de résoudre les questions relatives à cette élévation.

ARTICLE PREMIER.

Expression de l'élévation de la Terre & du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, pour un instant quelconque ; & du rapport des axes de l'anneau de Saturne, vus de la Terre & du Soleil.

De l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, pour un instant quelconque.

(286) Pour déterminer l'élévation du Soleil au-dessus du plan de
10. l'anneau, à un instant quelconque ; imaginons que du centre S du Soleil l'on ait mené au centre s de Saturne, le rayon vecteur Ss ; Supposons de plus, que du centre du Soleil l'on ait mené sur l'écliptique, la perpendiculaire SC à l'intersection mobile σC de l'écliptique & du plan de l'anneau ; que de Saturne, l'on ait abaissé sur la droite σC, la perpendiculaire $s\sigma$; de sorte que le plan $s\sigma$C représente le plan de l'anneau de Saturne ; que du centre S du Soleil l'on ait enfin abaissé sur le plan $s\sigma$CN de l'anneau, la perpendiculaire SN ; il est évident que l'angle SCN est égal à l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique, & que l'angle SsN représente l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau ; & comme dans le triangle SCN rectangle en N, l'on a SN = SC sin (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) ; & que dans le triangle SsN pareillement rectangle en N, l'on a SN = Ss sin (élévation du Soleil sur le plan de l'anneau) ; l'on conclura tout de suite

$$(1)\ \sin(\text{élévation du Soleil sur le plan de l'anneau}) = \frac{SC}{Ss}\sin(\text{inclinaison de l'anneau sur l'écliptique}).$$

Maintenant il est facile de voir que Ss = rayon vecteur de Saturne = R' ; & que SC = distance du centre du Soleil à l'intersection mobile du

plan de l'anneau de Saturne & de l'écliptique, meſurée ſur la perpendiculaire à cette interſection ; donc (§. 174),

(2) ſin (élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau) = ſin (incl. de l'anneau) coſ (latit. hélioc. de Sat.) coſ (longit. hélioc. de Sat. + 90^d — longit. du nœud de l'anneau) + ſin (latit. hélioc. de Saturne) coſ (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique).

De l'élévation de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau pour un inſtant quelconque.

(287) L'expreſſion de l'élévation de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau pour un inſtant quelconque, eſt un peu plus compliquée. On parvient facilement comme dans le §. 286, à une équation de la forme ſuivante

(1) ſin (élévation de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau) $= \frac{D}{\Delta}$ ſin (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique).

Mais dans cette derniere équation, D exprime la diſtance de la Terre à l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, meſurée ſur la perpendiculaire à cette interſection ; & Δ eſt la diſtance de la Terre à Saturne ; il faut donc avant tout, déterminer ces deux quantités.

(288) La diſtance de la Terre à l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique pour un inſtant quelconque, eſt facile à déterminer d'après les recherches précédentes. En effet, cette diſtance eſt égale à la diſtance du Soleil à l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique, pour l'inſtant dont il s'agit, meſurée ſur la perpendiculaire à cette interſection, moins la diſtance de la Terre au Soleil meſurée ſur la même perpendiculaire pour le même inſtant. Nous avons donné (§. 174) l'expreſſion de la diſtance du Soleil à l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique ; d'ailleurs la diſtance de la Terre au Soleil meſurée ſur la même perpendiculaire & pour le même inſtant = R coſ (longit de la Terre + 90^d — longit. du nœud de l'anneau) R étant le rayon vecteur de la Terre à l'inſtant dont il s'agit.

Donc

(1) Diſtance de la Terre à l'interſection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique = R′ coſ (latit. hélioc. de Sat.) coſ (longit. hélioc. de Saturne ſur l'écliptique + 90^d — longitude du nœud de l'anneau) + R′ ſin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclin. de l'anneau ſur l'écliptique) — R coſ (longit. de la Terre + 90^d — longit. du nœud de l'anneau).

Nous connoiſſons donc D dans l'équation (1) du §. 287.

(289) La valeur de Δ, ou de la diſtance de la Terre à Saturne, n'eſt pas plus difficile à déterminer.

Soit en effet

R le rayon vecteur de la Terre ; cette quantité se détermine au moyen de l'équation (2) du §. 168.

R' le rayon vecteur de Saturne ; cette quantité se détermine au moyen de l'équation (2) du §. 169.

Δ la distance de la Terre à Saturne.

Supposons d'ailleurs que l'on ait déterminé la latitude héliocentrique de Saturne au moyen de l'équation (4) du §. 173, & sa longitude héliocentrique, au moyen de l'équation (1) du §. 175 ; supposons de plus que l'on représente le lieu de Saturne dans son orbite, au moyen de trois coordonnées perpendiculaires, x, y, z ; les x étant prises sur la ligne des nœuds de l'orbite de Saturne, les y sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds, & les z sur une perpendiculaire au plan de l'écliptique ; supposons enfin que l'on représente le lieu de la Terre, au moyen de deux coordonnées perpendiculaires x' & y' ; les x' étant prises sur la ligne des nœuds de l'orbite de Saturne, & les y' sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds, l'on aura évidemment,

$$(1)\quad \Delta = \sqrt{((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2)}.$$

Mais

$z = R'$ sin (latitude héliocentrique de Saturne);
$y = R'$ cos (latit. hélioc. de Sat.) sin (longit. de Sat. — longit. du nœud de l'orbite) ;
$x = R'$ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. de Sat. — longit. du nœud de l'orbite) ;
$y' = R$ sin (longitude de la Terre — longitude du nœud de l'orbite de Saturne) ;
$x' = R$ cos (longitude de la Terre — longitude du nœud de l'orbite de Saturne).

Donc

$$(2)\quad \Delta = \sqrt{(R'^2 + R^2 - 2RR' \text{ cos(latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hélioc. Sat. — longit. Terre)})}.$$

Nous connoissons donc maintenant l'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau pour un instant quelconque.

Du rapport des axes de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne vu du Soleil & de la Terre.

(290) Rien n'est plus facile que de déterminer le rapport des axes de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne vu du Soleil & de la Terre. En effet, il est évident que le grand axe de cette ellipse est au petit axe, comme le sinus total est au sinus de l'élévation du Soleil ou de la Terre au-dessus du plan de l'anneau ; & comme nous connoissons cette élévation, nous connoissons le rapport du grand axe au petit axe de l'ellipse dont il s'agit.

(291) Nous avons vu (§. 287) que le sinus de l'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau, dépend de l'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique. On pourroit donc faire servir à la détermination de ce dernier élément, la mesure du petit axe de la figure elliptique qui

représente l'anneau de Saturne vu de la Terre à un instant quelconque; mais il est sensible qu'on ne peut mesurer le petit axe de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne, que lorsque le petit axe de cette ellipse déborde le disque de la Planete. Cette circonstance n'a pas lieu dans toutes les positions de Saturne. Je vais déterminer les arcs que cette Planete décrit dans sa trajectoire, pendant le tems que ces observations sont possibles.

ARTICLE II.

Détermination des arcs décrits par Saturne dans son orbite, pendant le tems que le petit axe de l'ellipse projection de l'anneau de Saturne vu du Soleil, déborde le disque de cette Planete pareillement vu du Soleil.

(292) Pour déterminer les arcs décrits par Saturne dans son orbite pendant le tems que, par rapport au Soleil, le petit axe de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne, déborde le disque de cette Planete, je reprends l'équation (2) du §. 286,

(1) sin (élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau) = sin (inclin. de l'anneau) cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hél. de Sat. + 90^d — longit. du nœud de l'anneau) + sin (latit. hélioc. de Saturne) cos (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique).

Je remarque qu'au commencement & à la fin des arcs décrits par Saturne dans son orbite, pendant le tems que le petit axe de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne, déborde le disque de cette Planete vu du Soleil, le petit axe de l'ellipse est égal au diametre de Saturne; mais le grand axe de l'anneau = $\frac{7}{3}$ du diametre de Saturne; donc alors le demi-petit axe de l'ellipse = $\frac{3}{7}$ du demi-grand axe. De plus le demi-grand axe de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne est au demi-petit axe comme le sinus total est au sinus de l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, donc enfin

(2) sin (élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau) = $\frac{3}{7}$.

Si l'on applique des nombres à la formule précédente, on trouvera que pour un Observateur placé dans le Soleil, le petit axe de la projection de l'anneau de Saturne déborde la Planete, lorsque Saturne parcourt dans son orbite, depuis 1^f 19^d 39$'$ jusqu'à 3^f 21^d 34$'$, & depuis 7^f 19^d 39$'$ jusqu'à 9^f 21^d 34$'$; en partant toutefois des élémens qui avoient lieu en 1774. Les observations du petit axe de l'anneau de Saturne ne peuvent donc être faites que pendant environ dix années, sur les vingt-neuf & demie que dure la révolution de cette Planete.

Années dans lesquelles le petit axe de l'anneau de Saturne a débordé le disque de la Planete, depuis 1600 jusqu'en 1900, relativement à un Observateur placé dans le Soleil.

(293) Relativement à un Observateur placé dans le Soleil, voici les années dans lesquelles le demi-petit axe de l'anneau de Saturne a débordé le disque de la Planete, depuis 1600 jusqu'en 1900.

Depuis	Avril 1602	Jusques	Octobre 1607.
	Septembre 1617		Mars 1622.
	Octobre 1631		Avril 1637.
	Mars 1647		Août 1651.
	Mars 1661		Septembre 1666.
	Août 1676		Février 1681.
	Septembre 1690		Mars 1696.
	Février 1706		Juillet 1710.
	Février 1720		Août 1725.
	Juillet 1735		Janvier 1740.
	Août 1749		Février 1755.
	Janvier 1765		Juin 1769.
	Janvier 1779		Juillet 1784.
	Juin 1794		Décembre 1798.
	Juillet 1808		Janvier 1814.
	Décembre 1823		Mai 1828.
	Décembre 1837		Juin 1843.
	Mai 1853		Novembre 1857.
	Juin 1867		Décembre 1872.
	Novembre 1882		Avril 1887.
	Novembre 1896		Mai 1902.

ARTICLE III.

Détermination des arcs décrits par Saturne dans son orbite, pendant le tems que le petit axe de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne, déborde le disque de cette Planete vu de la Terre.

(294) Pour déterminer les arcs décrits par Saturne dans son orbite pendant le tems que le petit axe de l'ellipse qui représente l'anneau de Saturne, déborde le disque de cette Planete vu de la Terre, je reprends l'équation (1) du §. 287, dans laquelle je substitue $\frac{3}{7}$ à sin (élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau), & à D & Δ, leurs valeurs tirées des §. 288 & 289; l'on a donc

$$(1)\ 3\,\Delta - 7\,D\,\text{sin (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique)} = 0.$$

Méthode d'approximation pour résoudre l'équation précédente.

(295) Si l'on vouloit résoudre rigoureusement l'équation (1) du paragraphe précédent, on tomberoit évidemment dans des résultats très-

compliqués ; mais l'on peut fe permettre différentes fimplifications. On peut, par exemple, fuppofer cof (latitude héliocentrique de Saturne) $= 1$, & confondre le lieu de Saturne dans fon orbite avec fa longitude héliocentrique ; l'on aura alors (§. 169, 173, 288 & 289),

(1) $\Delta = \sqrt{(R'^2 + R^2 - 2RR' \text{ cof (longit. hélioc. de Sat.} - \text{longitude de la Terre))}}$;

(2) $D = R' \text{ cof (longitude héliocent. de Saturne} + 90^d - \text{longit. du nœud de l'anneau)} + R' \text{ cotang (inclin. de l'anneau) fin (inclin. de l'orbite) fin (longit. hélioc. de Saturne} - \text{longitude du nœud de l'orbite)} - R \text{ cof (longitude de la Terre} + 90^d - \text{longitude du nœud de l'anneau)}$;

(3) $R' = \dfrac{9{,}50974}{0{,}05573 \text{ cof (longitude héliocentrique de Saturne} - 90^d\,30'\,30'') + 1}$.

On pourra auffi fuppofer $R = 1$; & regarder R' comme une quantité conftante, en prenant toutesfois pour fa valeur particuliere celle qui convient aux époques dont il s'agit, époques que l'on peut confondre avec celles calculées pour le Soleil (§. 292) ; l'on aura d'abord

(4) $\frac{1}{7} \sqrt{(R'^2 + 1 - 2R' \text{ cof (longit. hélioc. de Saturne} - \text{longitude de la Terre))}} + \text{fin (incl. de l'anneau fur l'écl.) (cof (longit. Terre} + 90^d - \text{longit. du nœud de l'ann.)} - R' \text{ cof (longit. héliocent. de Saturne} + 90^d - \text{longitude du nœud de l'anneau))} - R' \text{ cof (inclin. de l'anneau) fin (incl. de l'orbite) fin (longit. héliocent. de Saturne} - \text{longitude du nœud de l'orbite)} = 0$.

Maintenant fi l'on réduit $\sqrt{(R'^2 + 1 - 2R' \text{ cof (longit. hélioc. de Saturne} - \text{longitude de la Terre))}}$ en férie, attendu que R' eft une quantité beaucoup plus grande que les autres, l'on aura

$$\sqrt{(R'^2 + 1 - 2R' \text{ cof (longit. hélioc. de Saturne} - \text{longit. de la Terre))}} = \pm\left(R' + \frac{1}{2R'} - \text{cof (longit. hélioc. de Saturne} - \text{longit. de la Terre)}\right),$$

Et l'équation (4) deviendra

(5) $\pm \frac{1}{7}\left(R' + \frac{1}{2R'} - \text{cof (longitude héliocent. de Saturne} - \text{longitude de la Terre)}\right) + \text{fin (incl. de l'ann. fur l'écl.) cof (long. de la Terre} + 90^d - \text{longit. du nœud de l'ann.)} - R' \text{ cof (longit. hélioc. de Sat.} + 90^d - \text{longit. nœud de l'anneau) fin (incl. anneau)} - R' \text{ cof (inclin. de l'anneau) fin (inclin. de l'orbite) fin (longit. hélioc. de Saturne} - \text{longitude du nœud de l'orbite)} = 0$.

Dans l'ufage de cette derniere équation & de celles qui vont fuivre, on emploîra les fignes fupérieurs lorfque les Phénomenes que l'on calculera auront lieu tandis que Saturne parcourt la partie de fon orbite comprife entre $11^f\,18^d$ & $5^f\,18^d$; on emploîra les fignes inférieurs dans le cas contraire.

(296) Puifque cof (longit. hélioc. de Saturne — longit. de la Terre) $=$ cof (longitude héliocentrique de Saturne) cof (longitude de la Terre) $+$ fin (longitude héliocentrique de Saturne) fin (longitude de la Terre) ; & que cof (longit. de la Terre $+ 90^d$ — longitude du nœud de l'anneau) $=$ cof (longitude de la Terre) fin (longitude du nœud de l'anneau) — fin (longitude de la Terre) cof (longitude du nœud de l'anneau) ; que

de plus cos (longit. hélioc. Sat. $+ 90^d$ — longit. du nœud de l'anneau) $=$ sin (longitude du nœud de l'anneau — longitude hélioc. de Saturne); l'équation (5) du paragraphe précédent peut être mise sous la forme suivante. Soit

$M =$ sin (inclin. de l'anneau sur l'écliptique) sin (longit. du nœud de l'anneau) $\mp \frac{3}{7}$ cos (longitude héliocentrique de Saturne);

$N =$ sin (inclin. de l'anneau sur l'écliptique) cos (longitude du nœud de l'anneau) $\pm \frac{3}{7}$ sin (longitude héliocentrique de Saturne);

$P = \pm \frac{1}{2}\left(R' + \frac{1}{2R'}\right) - R'$ sin (inclin. anneau) sin (longit. du nœud de l'anneau — longit. de Sat.) $- R'$ cos (inclin. de l'anneau) sin (inclin. de l'orbite) sin (longitude héliocentrique de Saturne — longitude du nœud de l'orbite);

L'on aura

(1) M cos (longit. de la Terre) — N sin (longit. de la Terre) $+ P = 0$;

Soit enfin

A un angle tel que $\quad \text{tang } A = \frac{M}{N}$;

B un angle tel que $\quad \sin B = \frac{P \cos A}{N}$;

L'équation (1) deviendra

(2) Longitude de la Terre à l'instant où le petit axe de l'anneau de Saturne égale le diametre de la Planete $= A + B$.

De la limite des arcs de l'orbite de Saturne, dans lesquels doit se trouver cette Planete, pour que l'on puisse observer de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete.

(197) Pour déterminer la limite des arcs de l'orbite de Saturne dans lesquels doit se trouver cette Planete, pour que l'on puisse observer de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete, je remarque que l'équation (2) du paragraphe précédent ne peut avoir des racines réelles que lorsque l'angle B est possible, & par conséquent, qu'autant que sin B est moindre que ± 1. On a donc pour limite des solutions réelles,

(1) $N \mp P \cos A = 0$.

Il suit des constructions précédentes que $N^2 - N^2 \cos^2 A - M^2 \cos^2 A^2 = 0$; mais $N = P \cos A$; on a donc pour limite des solutions réelles, la condition suivante,

(2) $P^2 - N^2 - M^2 = 0$.

Si l'on reprend les valeurs de M, N, P du §. précédent on trouvera facilement que

$M^2 + N^2 = \frac{3^2}{7^2} + \sin^2$ (inclinaison de l'anneau) $\mp \frac{6}{7}$ sin (longit. du nœud de l'anneau — longit. hélioc. Saturne);

On

On aura donc une équation de la forme ſuivante,

$$(3)\ \left(\pm\tfrac{3}{7}\left(R'+\frac{1}{2R'}\right)-R'\sin(\text{incl. ann.})\sin(\text{longit. du nœud de l'anneau} - \text{longit. hélioc. Sat.}) - R'\cos(\text{inclin. anneau})\sin(\text{inclin. de l'orbite})\sin(\text{longit. héliocentrique de Saturne} - \text{longit. du nœud de l'orbite})\right)^2 \pm\tfrac{6}{7}\sin(\text{incl. anneau})\sin(\text{longit. du nœud de l'anneau} - \text{longit. hél. Sat.}) - \sin^2(\text{inclinaiſon de l'anneau}) - \frac{3^2}{7^2} = 0.$$

Cette équation, quoique d'un dégré élevé, eſt cependant facile à réſoudre, en remarquant que les longitudes de Saturne qui y ſatisfont, different peu de $1^{ſ}\,19^{d}\,39'$, $3^{ſ}\,21^{d}\,34'$, $7^{ſ}\,19^{d}\,39'$, $9^{ſ}\,21^{d}\,34'$, longitudes qui réſolvent le Problême par rapport à un obſervateur qui ſeroit dans le Soleil (§. 292).

(298.) Si l'on applique le calcul à la formule, & que l'on ſuppoſe la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de Saturne de $3^{ſ}\,22^{d}$; la longitude du nœud de l'anneau de $5^{ſ}\,18^{d}$; l'inclinaiſon de l'orbite ſur l'écliptique, de $2^{d}\,30'$; l'inclinaiſon du plan de l'anneau de $31^{d}\,20'$; l'on aura les réſultats ſuivans.

Premiere époque.

Arc parcouru par Saturne dans ſon orbite, pendant le tems que l'on peut obſerver de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete . . . . depuis $3^{ſ}\,15^{d}\,32'$ juſqu'à $3^{ſ}\,29^{d}\,57'$.

Dans cette premiere époque, j'ai ſuppoſé $R' = 9{,}03600$; le rapport du mouvement de Saturne au mouvement de la Terre dans leurs orbites reſpectives $= 0{,}03760$. Cette premiere époque a lieu, lorſque la longitude de Saturne vue du Soleil, eſt d'environ $3^{ſ}\,22^{d}$; elle répond aux années 1798, 1828, 1857, 1887.

Seconde époque.

Cette ſeconde époque a lieu lorſque la longitude de Saturne vue du Soleil, eſt d'environ $7^{ſ}\,20^{d}$; elle répond aux années 1808, 1837, 1867, 1896. On a alors $R' = 9{,}92710$; rapport du mouvement de Saturne au mouvement de la Terre dans leurs orbites reſpectives $= 0{,}03134$;

Arc parcouru par Saturne dans ſon orbite pendant le tems que l'on peut obſerver de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete . . . . depuis $7^{ſ}\,15^{d}\,4'$ juſqu'à $7^{ſ}\,25^{d}\,59'$.

Troiſieme époque.

Cette troiſieme époque a lieu, lorſque la longitude de Saturne vue du Soleil, eſt d'environ $9^{ſ}\,22^{d}$; elle répond aux années 1814, 1843, 1872, 1902; on a alors $R' = 1{,}00360$; rapport du mouvement de Saturne au mouvement de la Terre dans leurs orbites reſpectives $= 0{,}03060$

Arc parcouru par Saturne dans ſon orbite, pendant le tems que l'on peut obſerver de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete . . . . depuis $9^{ſ}\,16^{d}\,29'$ juſqu'à $9^{ſ}\,29^{d}\,27'$;

Quatrieme époque.

Cette quatrieme époque a lieu, lorſque la longitude de Saturne vue du Soleil, eſt d'environ $1^s\,20^d$; elle répond aux années 1794, 1823, 1853, 1882. On a alors $R' = 9{,}12620$; rapport du mouvement de Saturne au mouvement de la Terre, dans leurs orbites reſpectives $= 0{,}03676$.

Arc parcouru par Saturne dans ſon orbite, pendant le tems que l'on peut obſerver de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete . . . . . depuis $1^s\,14^d\,34'$ juſqu'à $1^s\,26^d\,34'$.

*Dans les recherches précédentes nous avons entendu par le rapport du mouvement de Saturne & de la Terre dans leurs orbites reſpectives, le rapport du nombre de dégrés décrits en même tems par ces Aſtres dans leurs orbites.

Suite du développement de la méthode pour réſoudre l'équation (1) *du* §. 294.

(299) Nous avons déja fait un pas vers la ſolution de l'équation (1) du §. 294, puiſque nous connoiſſons la longitude approchée de Saturne pour les différentes époques dont il vient d'être queſtion; & nous avons par un réſultat moyen, les réſultats ſuivans;

Longitudes approchées de Saturne correſpondantes aux différentes époques.

Premiere époque	$3^s\,22^d\,44'$.
Deuxieme époque	7 20 31.
Troiſieme époque	9 22 58.
Quatrieme époque.	1 20 30.

Si l'on jette les yeux ſur les valeurs de M, N, P du §. 296, & ſur l'équation (1) du même paragraphe, qui n'eſt qu'une transformation de l'équation (1) du §. 294, on verra facilement que dans les expreſſions de M & de N, & dans la partie de l'expreſſion de P qui eſt multipliée par le ſinus de l'inclinaiſon de l'orbite, on peut, ſans erreur ſenſible, ſubſtituer à la longitude héliocentrique de Saturne, pour chaque époque différente, l'une des longitudes approchées que nous venons de déterminer; attendu que la longitude de Saturne qui ſatisfait au Problême, differe toujours très-peu de cette longitude approchée. Soit donc

$$P' = \pm \tfrac{1}{7}\left(R' + \frac{1}{2R'}\right) - R' \operatorname{cof}(\text{inclin. de l'anneau}) \operatorname{fin}(\text{incl. de l'orbite}) \operatorname{fin}(\text{long. hélioc. Sat.} - \text{longit. du nœud de l'orbite});$$

L'équation (1) du §. 296 deviendra

$$(1)\quad M \operatorname{cof}(\text{longitude de la Terre}) - N \operatorname{fin}(\text{longit. de la Terre}) + P' - R' \operatorname{fin}(\text{inclin. de l'anneau}) \operatorname{fin}(\text{longit. du nœud de l'anneau} - \text{longit. hélioc. de Saturne}) = 0.$$

Et dans cette équation les quantités M, N & P' pourront être regardées comme des conſtantes.

Subſtituons à ſin (longitude du nœud de l'anneau — longitude hélioc. de Saturne), ſa valeur coſ (longit. hélioc. de Saturne) ſin (longit. du nœud de l'anneau) — ſin (longit. hélioc. de Saturne) coſ (longit. du nœud de l'anneau) ; l'équation (1) deviendra

(2) M coſ (longitude de la Terre) — N ſin (longitude de la Terre) + P′ — R′ ſin (incl. de l'anneau) coſ (longit. hélioc. de Sat.) ſin (longit. du nœud de l'anneau) + R′ ſin (inclin. de l'anneau) ſin (long. hél. de Sat.) coſ (longit. du nœud de l'anneau) = o.

Soit maintenant

β la longitude de Saturne, à l'inſtant où la longitude de la Terre vue du Soleil, eſt de $0^d\ 0'\ 0''$, c'eſt-à-dire, lors l'Equinoxe d'Automne ; on aura ſoin de choiſir les inſtans les plus voiſins des époques que l'on conſidere ;

$\frac{n}{m}$ le rapport des angles traverſés pendant un même eſpace de tems, par Saturne & par la Terre, dans leurs orbites reſpectives.

Il eſt évident que la longitude héliocentrique de Saturne, à l'inſtant des Phénomenes ſera égale à $\beta + \frac{n}{m}$ longitude de la Terre. Donc en vertu du théorême de Taylor

coſ (longit. hélioc. de Sat.) = coſ $\beta - \frac{n}{m}$ ſin $\beta \times$ longit. de la Terre ;

ſin (longit. hélioc. de Sat.) = ſin $\beta + \frac{n}{m}$ coſ $\beta \times$ longit. de la Terre.

Soit donc

M = ſin (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) ſin (longitude du nœud de l'anneau) $\mp \frac{1}{2}$ coſ (longitude héliocentrique de Saturne) ;

N = ſin (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) coſ (longit. du nœud de l'anneau) $\pm \frac{1}{2}$ ſin (longitude héliocentrique de Saturne) ;

$P'' = \pm \frac{1}{2} \left(R' + \frac{1}{2R'} \right) - R'$ coſ (inclin. anneau) ſin (inclin. orbite) ſin (longit. hélioc. Sat. — long. nœud de l'orbite) — R′ ſin (inclin. de l'anneau) ſin (long. du nœud de l'anneau — β) ;

$Q = \frac{n}{m}$ R′ ſin (inclin. de l'anneau) coſ (longitude du nœud de l'anneau — β) ;

L'équation (2) deviendra

(3) Longitude Terre $+ \frac{M}{Q}$ coſ (longitude Terre)

$- \frac{N}{Q}$ ſin (longit. Terre) $+ \frac{P''}{Q} = 0$.

Telle eſt l'équation que l'on aura à réſoudre.

(300) Les valeurs de M, N, P″ préſentent deux ſuites de ſignes. Il n'eſt pas indifférent de ſe ſervir de l'une ou de l'autre de ces ſuites. Pour déterminer laquelle de ces deux ſuites doit être employée, il faut avoir égard à la poſition de Saturne dans ſon orbite, à l'inſtant des phénomenes que l'on conſidere, relativement aux nœuds de l'anneau ſur

l'écliptique; car c'est par le passage du plan de l'anneau par le Soleil que se fait le changement de signes. Nous avons dit que ce passage a lieu, lorsque le lieu de Saturne dans son orbite est de $5^s\,18^d$ & de $11^s\,18^d$. Lors donc que Saturne parcourt depuis $11^s\,18^d$ jusqu'à $5^s\,18^d$ dans son orbite, on emploiera les signes supérieurs; on fera usage des signes inférieurs, dans le cas contraire.

(301) On voit facilement la formation & l'usage de l'équation (3) du §. 299. Pour chaque époque différente, on déterminera la longitude de Saturne à l'instant de l'Equinoxe d'Automne le plus voisin de l'époque; & l'on aura la valeur de β qui entre dans la formation des quantités P'' & Q. Quant à la longitude héliocentrique de Saturne qui entre dans les expressions de M, N, & du second terme de P'', on y substituera la longitude héliocentrique approchée de Saturne déterminée pour chaque époque dans la Table du §. 299. On connoîtra donc toutes les quantités qui composent l'équation (3) du §. 299; & l'on résoudra cette équation comme l'on a résolu celle du §. 124.

La solution précédente n'est qu'une solution approchée. Si l'on veut résoudre le Problême dans toute l'exactitude géométrique, il faudra avoir recours à l'équation (5) du §. 295, qui ne présentera aucune difficulté, attendu que l'on connoîtra à très-peu près les racines de l'équation.

Article IV.

Recherches sur le nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299.

On peut faire en général sur le nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299, des recherches analogues à celles auxquelles je me suis livré relativement au nombre des racines réelles de l'équation du §. 124. Je n'entrerai point dans un aussi grand détail; je me propose uniquement d'examiner ce qui a lieu pour la Terre.

Quelle doit être la longitude de la Terre & la valeur de β, pour que l'équation (3) du §. 299 acquierre ou perde des racines réelles.

(302) Dans la recherche du nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299, nous suivrons une marche analogue à celle que nous avons suivie relativement à l'équation du §. 124; il faut donc déterminer d'abord quelle doit être la valeur particuliere de β, pour que l'équation (3) du §. 299 acquierre ou perde des racines nouvelles.

Pour résoudre cette derniere question, il faut déterminer les valeurs de β, qui donnent à l'équation des racines doubles; puisque c'est par ces racines doubles que les racines de l'équation passent de l'imaginaire au réel, ou réciproquement. Or si dans l'équation (3) du §. 299, l'on

regarde la longitude de la Terre, & β comme variables, que l'on différencie l'équation dans cette fuppofition, & que l'on faffe $d\beta = 0$, la théorie de *maximis & minimis*, nous apprend que l'équation (3) du §. 299 a des valeurs doubles, lorfque l'équation fuivante a lieu,

(1) Q — M fin (longitude Terre) — N cof (longitude Terre) = o.

L'équation (3) du §. 299 ne peut donc acquérir ou perdre des racines réelles que quand l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de la Planete, s'obferve à l'inftant où la Terre a la longitude déterminée par l'équation précédente. Nous verrons bientôt quelle doit être la valeur correfpondante de β.

(303) Nous remarquerons que fi dans l'équation (3) du §. 299, au lieu de fuppofer le rapport du petit axe de l'anneau au grand axe $= \frac{3}{7}$, on l'avoit généralement fuppofé $= \frac{a}{b}$; & qu'au lieu de regarder $\frac{a}{b}$ comme connu, & β comme variable, l'on regardât au contraire β comme connu, & $\frac{a}{b}$ comme variable, & que l'on voulût d'ailleurs déterminer la longitude de la Terre qui répond aux *maxima* & aux *minima* de $\frac{a}{b}$; l'analyfe conduiroit également à l'équation (1) du §. précédent. On doit donc conclure que les longitudes de la Terre par lefquelles l'équation (3) du §. 299 acquiert ou perd des racines réelles, lorfque d'ailleurs β a la condition requife, font dans tous les cas, les valeurs qui répondent aux *maxima* ou *minima* de $\frac{a}{b}$; on aura donc

Longitudes de la Terre par lefquelles l'équation (3) du §. 299, acquiert ou perd des racines réelles lorfque d'ailleurs β a la valeur requife, & qui, dans tous les cas, répondent aux inftans où le rapport du petit axe de l'anneau au grand axe vu de la Terre, eft un maximum *ou un* minimum.

Premiere époque.			Seconde époque.			Troifieme époque.			Quatrieme époque.		
Sig.	*Dég.*	*Min.*	*Sig.*	*Dég.*	*Min.*	*Sig.*	*Dég.*	*Min.*	*Sig*	*Dég.*	*Min.*
1	10	46 *minim.*	5	2	45 *maxim.*	7	7	31 *min.*	11	1	5 *max.*
6	4	46 *max.*	9	22	44 *minim.*	0	6	29 *max.*	3	25	25 *min.*

Ces longitudes de la Terre font celles vues du Soleil; il eft fuperflu de remarquer que les lieux du Soleil vus de la Terre dans les mêmes circonftances, different de fix fignes.

(304) Il eft facile de déterminer maintenant la valeur correfpondante de β. En effet puifque l'équation (3) du §. 299, a toujours lieu; que

de plus, dans le cas particulier dont il s'agit, l'on connoît la longitude de la Terre qui satisfait à l'équation, l'on conclura facilement la valeur de β, au moyen de cette équation ; l'on parviendra par là aux résultats suivans.

Quelle doit être la longitude héliocentrique de Saturne à l'instant de l'Equinoxe d'Automne, pour que l'équation (3) du §. 299 acquierre ou perde des racines réelles.

Premiere époque.			Seconde époque.			Troisieme époque.			Quatrieme époque.		
Sig.	*Dég.*	*Min.*	*Sig.*	*Dég.*	*Min.*	*Sig.*	*Dég.*	*Min.*	*Sig.*	*Dég.*	*Min.*
3	15	6	7	10	41	9	12	53	1	17	0
3	19	20	7	16	35	9	17	29	1	22	1

(305) On pourroit être arrêté dans l'usage de l'équation (1) du §. 302 par la considération suivante. La quantité Q qui entre dans cette équation, renferme l'inconnue β ; il paroîtroit donc d'abord qu'il faudroit éliminer cette quantité avant de faire usage de l'équation. Cette opération compliqueroit nécessairement la solution. Mais si l'on réfléchit que la quantité Q (§. 299) est multipliée par la très-petite quantité $\frac{n}{m}$, on verra facilement que l'on pourra, sans erreur sensible, substituer à β la longitude approchée de Saturne que l'on trouve calculée dans le §. 299.

Du nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299, pour chacune des époques dont il a été question dans le §. 298.

(306) Pour conclure le nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299, relativement aux époques précédentes, je reprends les considérations analogues à celles qui ont été faites sur l'équation du §. 124. Prenons, par exemple, la premiere époque ; ce que nous allons dire sur cette époque, s'appliquera facilement aux autres époques. Nous avons vu (§. 304) que pour que l'équation (3) du §. 299 acquierre ou perde de nouvelles racines réelles, il faut que la longitude héliocentrique de Saturne, à l'instant de l'Equinoxe d'Automne, soit de $3^s\,15^d\,6'$ ou de $3^s\,19^d\,20'$. Dans toute autre circonstance, l'équation ne peut ni perdre ni acquérir de nouvelles racines. En général l'équation (3) du §. 299 a toujours une racine réelle : & il faut, pour que cette équation ait trois racines réelles, qu'elle en acquierre deux nouvelles par la circonstance du lieu particulier de Saturne à l'instant de l'Equinoxe d'Automne, & que de plus elle n'ait point perdu ces deux racines acquises. Nous venons de voir que lorsque Saturne a $3^s\,15^d\,6'$ de longitude à l'instant de l'Equinoxe d'Automne, la proposée acquiert ou perd deux nouvelles racines. Mainte-

nant lorfque la longitude héliocentrique de Saturne, à la même époque de l'Equinoxe d'Automne, eft de $3^f\ 19^d\ 20'$, la propofée perd ces deux racines acquifes. Donc

Premiere époque.

Par les Tables de Saturne, cherchez quelle eft la longitude de cette Planete à l'inftant de l'Equinoxe d'Automne, dans l'intervalle où elle parcourt depuis environ $3^f\ 15^d\ 32'$ jufqu'à $3^f\ 29^d\ 57'$ de fon orbite. Si à cet inftant particulier la longitude de Saturne eft entre $3^f\ 15^d\ 6'$ & $3^f\ 19^d\ 20'$, l'équation (3) du §. 299 a trois racines réelles. Si la longitude de Saturne n'eft point comprife entre ces limites, l'équation n'a qu'une racine réelle.

Seconde époque.

Par les Tables de Saturne, cherchez quelle eft la longitude de cette Planete, à l'inftant de l'Equinoxe d'Automne, dans l'intervalle où elle parcourt depuis environ $7^f\ 15^d\ 4'$ jufqu'à $7^f\ 25^d\ 59'$ de fon orbite. Si à cet inftant particulier la longitude de Saturne eft entre $7^f\ 10^d\ 41'$ & $7^f\ 16^d\ 35'$, l'équation (3) du §. 299 a trois racines réelles; fi la longitude de Saturne n'eft pas comprife entre ces limites, l'équation n'a qu'une racine réelle.

Troifieme époque.

Par les Tables de Saturne, cherchez quelle eft la longitude de cette Planete à l'inftant de l'Equinoxe d'Automne, dans l'intervalle où elle parcourt depuis environ $9^f\ 16^d\ 29'$ jufqu'à $9^f\ 29^d\ 27'$ de fon orbite. Si à cet inftant particulier la longitude de Saturne eft entre $9^f\ 12^d\ 53'$ & $9^f\ 17^d\ 29'$, l'équation (3) du §. 299 a trois racines réelles; fi la longitude de Saturne n'eft point dans ces limites, l'équation n'a qu'une racine réelle.

Quatrieme époque.

Par les Tables de Saturne, cherchez quelle eft la longitude de cette Planete, à l'inftant de l'Equinoxe d'Automne, dans l'intervalle où elle parcourt depuis environ $1^f\ 14^d\ 34'$, jufqu'à $1^f\ 26^d\ 34'$. Si à cet inftant particulier la longitude de Saturne eft entre $1^f\ 17^d\ 0'$ & $1^f\ 22^d\ 1'$, l'équation (3) du §. 299 a trois racines réelles; fi la longitude de Saturne n'eft pas dans ces limites, l'équation n'a qu'une racine réelle.

ARTICLE V.

Application des principes détaillés ci-deffus, aux phénomenes qui ont eu lieu en 1690.

(307) Il paroît qu'en 1690 Dominique Caffini s'eft occupé des Phénomenes relatifs à l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne & du diametre de cette Planete. Ce font les feules obfervations de ce genre que

l'on connoiſſe ; les voici telles qu'elles ſe trouvent conſignées dans les regiſtres de l'Obſervatoire.

Le 11 Mars 1690, le diſque de Saturne déborde tant ſoit peu l'anneau.
Le 4 Avril le bord extérieur de l'anneau touche exactement le bord de Saturne.
Le 14 Mai le diſque de Saturne déborde l'anneau.
Le 18 Janvier 1671, le diſque de Saturne paroît égal au petit axe de l'anneau.

(308) Les Phénomenes de 1690 ſont un cas particulier de la ſeconde époque. A l'inſtant de l'Equinoxe d'Automne de l'année 1689, la longitude de Saturne, d'après les Tables, étoit de $7^s\,8^d\,24'$; l'équation n'avoit donc qu'une ſeule racine réelle.

Si l'on ſuit la marche des Phénomenes, on verra facilement que le 21 Février 1690, lorſque le lieu de la Terre vu du Soleil étoit de $5^s\,2^d\,45'$, on a eu un *maximum* du petit axe de l'anneau. Le petit axe a enſuite diminué juſqu'au 15 Juillet de la même année ; & comme à l'époque du 21 Février 1690, il étoit déja plus petit que le diametre de la Planete, dans tout l'intervalle du 21 Février 1690 au 15 Juillet de la même année, il a toujours évidemment été plus petit que le diametre de Saturne. Depuis le 15 Juillet 1690, le petit axe a augmenté ; & il étoit à ſon *maximum* le 21 Février 1691. Dans cet intervalle il eſt devenu égal au diametre de Saturne, vers la fin de Novembre 1690.

(309) Si l'on rapproche les réſultats précédens, des obſervations de Dominique Caſſini, on voit que l'obſervation du 18 Janvier 1691, eſt aſſez conforme au calcul. En effet, à l'inſtant de l'égalité du petit axe de l'anneau & du diametre de Saturne, la Planete étoit plongée dans les rayons du Soleil. On n'a pu l'obſerver qu'en Janvier 1691. Alors la différence du petit axe de l'anneau & du diametre de Saturne étoit aſſez petite pour n'avoir pas été appréciée. Quant à la prétendue égalité arrivée le 4 Avril 1690, elle eſt inconciliable avec la théorie.

En effet, puiſque cette prétendue égalité ſe trouve placée entre le 11 Mars 1690, & le 14 Mai de la même année, inſtans où le petit axe de l'anneau a été obſervé plus petit que le diametre de la Planete, il faudroit, pour que l'obſervation fût véritable, que la théorie indiquât un *maximum* entre ces deux inſtans ; or il eſt évident que le calcul ſe refuſe à l'exiſtence d'un *maximum* dans cette portion de l'orbite terreſtre.

(310) Au reſte on doit ſentir combien les obſervations du genre dont il s'agit, préſentent de difficultés. En effet l'angle ſous lequel le diametre de Saturne paroît à nos yeux, eſt d'environ 18″ ; le grand axe de l'anneau eſt de 42″, & le petit axe varie en 15 années, depuis 0″ juſqu'à 22″. Quelle préciſion n'exigent donc point de ſemblables obſervations? Je ne ſais même ſi, au lieu de chercher à obſerver l'inſtant de l'égalité du petit axe de l'anneau & du diametre de Saturne, il ne vaudroit pas mieux attendre que le petit axe déborde décidément la Planete, & meſurer alors le petit axe & le grand axe de l'anneau.

CHAPITRE

CHAPITRE CINQUIEME.

Détermination des élémens de l'anneau de Saturne, d'après les observations.

DANS ce Chapitre, je me propose de donner les formules au moyen desquelles on peut déterminer les élémens de l'anneau de Saturne, d'après les observations. Dans cette recherche nous supposerons que l'on connoît exactement le lieu de la Terre, à l'instant des observations, ainsi que le lieu de Saturne, soit au moyen des Tables de ces Planetes, soit au moyen de ces mêmes Tables rectifiées par de bonnes observations. Nous diviserons les solutions en deux classes; nous supposerons d'abord que l'on ne connoît en aucune façon les élémens de l'anneau, & nous les déterminerons au moyen des équations rigoureuses; nous supposerons ensuite que les élémens sont déja connus d'une maniere approchée, & nous chercherons à les rectifier au moyen des observations, en employant les relations différentielles.

ARTICLE PREMIER.

Détermination des élémens de l'anneau de Saturne, en supposant que l'on ne connoît en aucune façon les élémens de cet anneau.

Définition des élémens de l'anneau.

(311) Il faut d'abord définir ce que nous entendons par les élémens de l'anneau de Saturne.

Les élémens de l'anneau proprement dits, sont la longitude du nœud de l'anneau sur l'écliptique, son inclinaison pareillement sur l'écliptique, & son épaisseur.

On entend par la longitude du nœud de l'anneau sur l'écliptique, les points de l'écliptique, que rencontreroit le plan de l'anneau indéfiniment prolongé, lorsque l'anneau passe par le centre du Soleil. Ces points sont éloignés de 90^d, de ceux où la perpendiculaire à l'intersection mobile du plan de l'anneau & de l'écliptique menée par le Soleil, coupe l'écliptique.

On entend par l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique, l'angle

que feroit avec l'écliptique, le plan de l'anneau, s'il étoit indéfiniment prolongé.

On entend par l'épaisseur de l'anneau, la distance interceptée sur l'écliptique entre les deux surfaces de l'anneau. Cette épaisseur est moins, peut-être, la véritable épaisseur de l'anneau, qu'une maniere géométrique de considérer l'élévation du Soleil ou de la Terre au-dessus du plan central, aux instans des disparitions & des réapparitions de l'anneau.

On pourroit aussi entendre par élémens de l'anneau, le lieu du nœud de l'anneau sur l'orbite de Saturne, ainsi que l'inclinaison du plan de l'anneau sur cette orbite; mais il est sensible que ces derniers élémens se déduisent avec la plus grande facilité des élémens précédens. Il suffira d'imaginer un triangle sphérique, dans lequel un des angles est l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique; un des côtés adjacens à cet angle, est la différence de longitude du nœud de l'anneau & du nœud de l'orbite de Saturne sur l'Ecliptique; l'autre côté adjacent est la différence du lieu du nœud de l'orbite de Saturne & du lieu du nœud de l'anneau sur l'orbite de cette Planete; l'angle opposé à ce dernier côté est l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique; & le troisieme angle est l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'orbite de Saturne.

Des équations qui servent à résoudre les questions proposées.

(312) Pour résoudre les questions proposées relativement à la détermination des élémens de l'anneau de Saturne, nous reprendrons les équations du §. 284; ou plutôt, attendu que cos(longitude héliocentrique de Saturne + 90^d — longitude du nœud de l'anneau) = sin(longitude du nœud de l'anneau — longitude héliocentrique de Saturne); & que cos(longitude de la Terre + 90^d — longitude du nœud de l'anneau) = sin (longitude du nœud de l'anneau — longitude de la Terre); que d'ailleurs sin (longitude du nœud de l'anneau — longitude héliocentrique de Saturne) = sin (longitude du nœud de l'anneau) cos (longitude héliocent. de Saturne) — cos (longit. du nœud de l'anneau) sin (longit. hélioc. Sat.); que de plus sin (longitude du nœud de l'anneau — longitude de la Terre) = sin (longitude du nœud de l'ann.) cos (longitude de la Terre) — cos (longitude du nœud de l'anneau) sin (longit. Terre) nous mettrons ces équations sous la forme suivante:

Lorsque le plan de l'anneau passe par le centre du Soleil.

Surface antérieure.

(1) R' cos (latit. hél. de Sat.) cos (longit. hél. de Sat.) sin (longit. du nœud de l'anneau) — R' cos (latit. hél. de Sat.) sin (longit. hél. de Sat.) cos (longit. du nœud de l'anneau) + R' sin (latit. hélioc de Sat.) cotang. (inclin. de l'anneau sur l'écliptique) — e = 0.

Plan Central.

(2) cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hél. de Sat.) sin (longit. du nœud de l'anneau)
— cos (latit. hélioc. de Sat.) sin (longit. hél. de Sat.) cos (longit. du nœud de l'anneau)
+ sin (latit. héliocent. de Sat.) cotang. (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) = o.

Surface postérieure.

(3) R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hél. de Sat.) sin (longit. du nœud de l'anneau)
— R′ cos (latit. hél. de Sat.) sin (longit. hél. de Sat.) cos (longit. du nœud de l'anneau)
+ R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclin. de l'anneau sur l'écliptique) + *e* = o.

Lorsque le plan de l'anneau passe par la Terre.

Surface antérieure.

(4) R cos (longitude de la Terre) sin (longitude du nœud de l'anneau)
— R sin (longitude de la Terre) cos (longitude du nœud de l'anneau)
— R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hél. de Sat.) sin (longit. du nœud de l'anneau)
+ R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) sin (longit. hél. de Sat.) cos (long. du nœud de l'anneau)
— R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclin. de l'anneau sur l'écliptique) + *e* = o.

Plan central.

(5) R cos (longitude de la Terre) sin (longitude du nœud de l'anneau)
— R sin (longitude de la Terre) cos (longitude du nœud de l'anneau)
— R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) cos (longit. hél. de Sat.) sin (long. du nœud de l'anneau)
+ R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) sin (longit. hél. de Sat.) cos (long. du nœud de l'anneau)
— R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclinaison de l'anneau sur l'écliptique) = o.

Surface postérieure.

(6) R cos (longitude de la Terre) sin (longitude du nœud de l'anneau)
— R sin (longitude de la Terre) cos (longitude du nœud de l'anneau)
— R′ cos (latit. hélioc. de Sat) cos (long. hél. de Sat.) sin (longit. du nœud de l'anneau)
+ R′ cos (latit. hélioc. de Sat.) sin (longit. hél. de Sat.) cos (long. du nœud de l'anneau)
— R′ sin (latit. hélioc. de Sat.) cotang (inclin. de l'anneau sur l'écliptique) — *e* = o.

Dans ces équations l'on n'oubliera pas que l'on entend par

2 *e* la distance interceptée sur l'écliptique entre les deux surfaces de l'anneau;

Et que R & R′ se calculent au moyen des équations (2) des §. 168 & 169. Quant à la latitude héliocentrique de Saturne, on la calculera au moyen de l'équation (4) du §. 173; on calculera pareillement la longitude héliocentrique de Saturne, au moyen de l'équation (1) du §. 175.

(313) Pour simplifier l'usage des équations précédentes, soit

F = R cos (longitude de la Terre);

G = R ſin (longitude de la Terre) ;
H = R′ coſ (latitude héliocentrique de Saturne) coſ (longit. hélioc. de Saturne) ;
K = R′ coſ (latitude héliocentrique de Saturne) ſin (longit. héliocent. de Saturne) ;
L = R′ ſin (latitude héliocentrique de Saturne) ;

Les équations précédentes deviendront

Lorſque le plan de l'anneau paſſe par le centre du Soleil.

Surface antérieure.

(1) H ſin (longitude du nœud de l'anneau) — K coſ (longitude du nœud de l'anneau) + L cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) + *e* = o ;

Plan central.

(2) H ſin (longitude du nœud de l'anneau) — K coſ (longitude du nœud de l'anneau) + L cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) = o ;

Surface poſtérieure.

(3) H ſin (longitude du nœud de l'anneau) — K coſ (longitude du nœud de l'anneau) + L cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) + *e* = o.

Lorſque le plan de l'anneau paſſe par la Terre.

Surface antérieure.

(4) (F — H) ſin (longit. du nœud de l'anneau) — (G — K) coſ (longit. du nœud de l'ann.) — L cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) + *e* = o ;

Plan central.

(5) (F — H) ſin (longit. du nœud de l'anneau) — (G — K) coſ (longit. du nœud de l'ann.) — L cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) = o ;

Surface poſtérieure.

(6) (F — H) ſin (longit. du nœud de l'anneau) — (G — K) coſ (longit. du nœud de l'anneau) — L cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) — *e* = o.

Cette forme peut paroître plus commode que celle des équations du paragraphe précédent.

De ce que l'on doit entendre par les ſurfaces antérieure & poſtérieure de l'anneau.

(314) Avant de faire uſage des équations précédentes, il faut bien fixer nos idées ſur ce que l'on doit entendre par les ſurfaces antérieure & poſtérieure de l'anneau. Par la ſurface antérieure de l'anneau, j'entends celle des deux ſurfaces de l'anneau qui a la plus grande longitude, lorſque Saturne parcourt depuis 0^d juſqu'à 180^d de ſon orbite ; & par la ſurface poſtérieure de l'anneau, j'entends celle des deux ſurfaces qui, dans la

même circonſtance, a la plus petite longitude. Par une raiſon contraire, lorſque Saturne parcourt depuis 180^d juſqu'à 360^d de ſon orbite, j'entends par la ſurface antérieure de l'anneau, celle qui a la plus petite longitude, & par la ſurface poſtérieure, celle qui a la plus grande longitude. Il ſuit de là que la ſurface antérieure de l'anneau eſt celle qui eſt éclairée depuis le paſſage de Saturne par le nœud deſcendant de l'anneau juſqu'à ſon paſſage par le nœud aſcendant, & que la ſurface poſtérieure eſt celle qui eſt éclairée depuis le paſſage de Saturne par le nœud aſcendant de l'anneau, juſqu'à ſon paſſage par le nœud deſcendant.

Uſage des équations précédentes.

(*315*) Nous ne nous étendrons pas beaucoup ſur les uſages des équations précédentes. Nous remarquerons d'abord, que ſi l'on ſuppoſe connus deux élémens, une ſeule obſervation ſuffira pour déterminer le troiſieme. L'équation même ne montera jamais qu'au premier degré, excepté toutefois le cas où l'on ſuppoſeroit inconnue la longitude du nœud de l'anneau. On auroit alors à réſoudre une équation du ſecond degré.

Si l'on ne ſuppoſoit connu qu'un ſeul des élémens, il faudroit employer deux obſervations; & ſi l'élément connu étoit la longitude du nœud de l'anneau, l'équation finale ne monteroit qu'au premier degré. Si la longitude de l'anneau étoit une des inconnues, on auroit alors à réſoudre une équation du ſecond degré.

(*316*) Examinons maintenant le cas le plus compliqué, celui où, ne ſuppoſant connus aucuns des élémens, on ſe propoſe de déterminer ces élémens au moyen de trois obſervations, ſoit de la diſparition, ſoit de la réapparition de l'anneau.

Soient

$F1$, $G1$, $H1$, $K1$, $L1$, les valeurs de F, G, H, K, L, correſpondantes à la premiere obſervation;

$F2$, $G2$, $H2$, $K2$, $L2$, les valeurs de F, G, H, K, L, correſpondantes à la ſeconde obſervation;

$F3$, $G3$, $H3$, $K3$, $L3$, les valeurs de F, G, H, K, L, correſpondantes à la troiſieme obſervation.

L'on aura pour chacune de ces obſervations, une équation de la forme ſuivante

(1) $(F1 - H1)$ ſin (longit. du nœud de l'anneau) $- (G1 - K1)$ coſ (long. du nœud de l'ann.) $- L1$ cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) $+ e = 0$;

(2) $(F2 - H2)$ ſin (longit. du nœud de l'anneau) $- (G2 - K2)$ coſ (long. du nœud de l'ann.) $- L2$ cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) $+ e = 0$;

(3) $(F3 - H3)$ ſin (longit. du nœud de l'anneau) $- (G3 - K3)$ coſ (long. du nœud de l'ann.) $- L3$ cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) $+ e = 0$.

De la comparaiſon des deux premieres équations l'on tire

$$(4)\ (F1 - F2 - H1 + H2)\ \text{ſin (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- (G1 - G2 - K1 + K2)\ \text{coſ (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- (L1 - L2)\ \text{cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique)} = 0.$$

De la comparaiſon de la ſeconde & de la troiſieme équation, l'on tire

$$(5)\ (F2 - F3 - H2 + H3)\ \text{ſin (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- (G2 - G3 - K2 + K3)\ \text{coſ (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- (L2 - L3)\ \text{cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique)} = 0.$$

De la comparaiſon de la quatrieme & de la cinquieme équation, l'on tire

$$(6)\ ((F1 - H1)(L2 - L3) + (F2 - H2)(L3 - L1) + (F3 - H3)(L1 - L2))\ \text{ſin (long. ann.)}$$
$$+ ((G1 - K1)(L3 - L2) + (G2 - K2)(L1 - L3) + (G3 - K3)(L2 - L1))\ \text{coſ (long. an.)} = 0.$$

Equation qui déterminera la longitude du nœud de l'anneau.

Lorſque la longitude du nœud de l'anneau ſera connue, l'on déterminera l'inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique, au moyen de l'une des deux équations (4) ou (5), & l'épaiſſeur de l'anneau au moyen de l'une des équations (1), (2) ou (3).

Article II.

Détermination des élémens de l'anneau de Saturne, en ſuppoſant que ces élémens ſont déja connus d'une façon approchée.

(317) Pour déterminer les élémens de l'anneau de Saturne, en ſuppoſant que ces élémens ſont déja connus d'une façon approchée, reprenons l'équation (4) du §. 313 ; ou, plutôt, mettons-là ſous la forme ſuivante

$$(1)\ (F - H)\ \text{ſin (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- (G - K)\ \text{coſ (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- L\ \text{cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique)} \pm e = 0\ ;$$

afin de conſidérer à la fois le cas de la ſurface antérieure & celui de la ſurface poſtérieure de l'anneau.

Il eſt évident que ſi l'on connoiſſoit les élémens de l'anneau, & que l'on eût obſervé rigoureuſement l'inſtant du paſſage du plan de l'anneau par la Terre, l'équation précédente ſeroit nulle. Mais ſi l'on ſuppoſe quelqu'erreur dans les élemens, ou dans le véritable inſtant du paſſage de l'anneau par la Terre, au lieu de l'équation précédente, on aura celle qui ſuit

$$(2)\ (F - H)\ \text{ſin (longit. du nœud de l'anneau)}$$
$$- (G - K)\ \text{coſ (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$- L\ \text{cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique)} \pm e$$
$$+ ((F - H)\ \text{coſ (longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$+ (G - K)\ \text{ſin (long. du nœud de l'ann.)}) \times d\,\text{(long. du nœud de l'ann.)}$$

$+ \frac{L}{\text{ſin}^2 \text{(incl. de l'anneau ſur l'écliptique)}}$ d (inclinaiſon de l'anneau) $\pm de$
+ ſin (longitude du nœud de l'anneau) $(dF - dH)$
— coſ (longitude du nœud de l'anneau) $(dG - dK)$
— cotang (inclinaiſon de l'anneau ſur l'écliptique) $dL = 0$.

Il ne s'agit plus que d'avoir l'expreſſion de dF, dH, dG, dK, dL, en erreur de l'inſtant précis de l'obſervation.

(318) Pour y parvenir, je remarque que ſi les obſervations ont été faites avec de bonnes lunettes, & par des Obſervateurs exercés, il eſt difficile de ſuppoſer une erreur de plus de ſept ou huit jours dans les inſtans précis des obſervations. Dans cet intervalle le rayon vecteur de Saturne & la latitude héliocentrique de cette Planete, varient d'une maniere inſenſible ; on peut donc ſuppoſer connus le ſinus & le coſinus de la latitude héliocentrique de Saturne, ainſi que la quantité R'. De plus, relativement à un même intervalle de tems, la variation de la longitude héliocentrique de Saturne $= \frac{1}{29,5}$ variation de la longitude héliocentrique de la Terre ; on aura donc

$dH = -\frac{1}{29,5}$ R' coſ (latitude héliocentrique de Saturne) ſin (longitude héliocentrique de Saturne) d (longitude de la Terre) ;

$dK = \frac{1}{29,5}$ R' coſ (latitude héliocentrique de Saturne) coſ (longitude héliocentrique de Saturne) d (longitude de la Terre) ;

$dL = 0$.

Par des raiſons analogues on pourra négliger la variation de R, & l'on aura

$dF = -$ R ſin (longitude de la Terre) d (longitude de la Terre) ;
$dG =$ R coſ (longitude de la Terre) d (longitude de la Terre).

L'équation (2) du §. précédent deviendra donc, en confondant le coſinus de la latitude héliocentrique de Saturne avec le rayon, dans les expreſſions différentielles,

(1) $\pm e \pm$ L cotang (inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'écliptique)
+ (F — H) ſin (longitude du nœud de l'anneau)
— (G — K) coſ (longitude du nœud de l'anneau)
$\pm de + \frac{L}{\text{ſin}^2 \text{(inclin. du plan de l'ann.)}}$ d (inclinaiſon du plan de l'anneau)
+ ((F — H) coſ (longitude du nœud de l'anneau)
+ (G — K) ſin (longit. du nœud de l'ann.)) d (long. du nœud de l'ann.)
+ (($\frac{1}{29,5}$ R' coſ (longit. hél. de Sat. — longit. du nœud de l'anneau)
— R coſ (longitude de la Terre — longitude du nœud de l'anneau))
× d (longitude de la Terre) $= 0$.

Cette équation résoudra toutes les questions que l'on peut se proposer sur la détermination des élémens.

Dans cette équation l'on entendra par

de la différence entre la véritable épaisseur de l'anneau & l'épaisseur hypothétique;

d (inclinaison du plan de l'anneau) la différence entre la véritable inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique, & l'inclinaison hypothétique;

d (longitude du nœud de l'anneau) la différence entre la véritable longitude du nœud de l'anneau & la longitude hypothétique;

d (longitude de la Terre) la différence entre la longitude de la Terre lors du véritable instant du phénomene, & la longitude de la Terre à l'instant hypothétique.

La premiere suite de signes appartient à la surface antérieure de l'anneau; la seconde suite de signes appartient à la surface postérieure.

(319) L'équation du paragraphe précédent a lieu lors du passage de la Terre par le plan de l'anneau de Saturne; si l'on vouloit avoir l'équation analogue pour le passage du plan de l'anneau par le centre du Soleil, l'on auroit

$$(1) \pm e - L \text{ cotang (inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique)}$$
$$- H \sin \text{(longit. du nœud de l'ann.)} + K \cos \text{(longit. du nœud de l'ann.)}$$
$$\pm de + \frac{L}{\sin^2 \text{(incl. du plan de l'ann.)}} d \text{ (inclinaison du plan de l'anneau)}$$
$$- (H \cos \text{(longitude du nœud de l'anneau)}$$
$$+ K \sin \text{(longit. du nœud de l'anneau)}) \, d \text{ (long. du nœud de l'ann.)}$$
$$+ \frac{1}{29{,}5} R' \cos \text{(longitude héliocentrique de Saturne}$$
$$- \text{longit. du nœud de l'anneau)} \, d \text{ (longit. de la Terre)} = 0.$$

Dans les équations (1) des §. 318 & 319, les quantités e & de sont exprimées en parties telles que la moyenne distance du Soleil à la Terre $= 1$; quant aux quantités d (inclinaison du plan de l'anneau), d (longitude du nœud de l'anneau), d (longitude de la Terre), ce sont les différentielles de l'inclinaison du plan de l'anneau, de la longitude du nœud de l'anneau, de la longitude de la Terre, exprimées en arc de cercle. Si l'on vouloit que ces dernieres quantités fussent exprimées en minutes de degré, alors il faudroit substituer, dans les équations, à d (inclinaison du plan de l'anneau), d (longitude du nœud de l'anneau), d (longitude Terre), les expressions suivantes $\frac{1}{3438} d$ (incl. du plan de l'ann.) $\frac{1}{3438} d$ (longit. de la Terre), $\frac{1}{3438} d$ (longitude du nœud de l'anneau).

Nous remarquerons aussi que puisque d (longitude Terre) est la différence entre la longitude hypothétique de la Terre pour l'instant des Phénomenes, & la véritable longitude de notre globe; lorsque nous supposerons que d (longitude Terre) est exprimée en minutes de degré, comme d'ailleurs la Terre, en vertu du mouvement annuel, parcourt environ un degré par jour, chaque minute de degré répond à 24′ de tems.

Nous

Nous remarquerons enfin que compl. log. $\frac{1}{3438} = 6 \cdot 4636941$; compl. log. $\frac{1}{29,5} = 8 \cdot 5301780$.

(320) Il eſt aiſé de ſentir que chaque obſervation donne une équation de la forme de celles des §. 318 & 319. Si donc l'on ne veut calculer qu'une ſeule obſervation, alors l'on n'aura qu'une ſeule équation, & l'on ne déterminera, par exemple, que l'épaiſſeur de l'anneau. Si l'on veut calculer deux obſervations, l'on aura deux expreſſions différentes de $e + de$; & de la comparaiſon de ces deux expreſſions l'on fera réſulter une relation entre d (inclinaiſon du plan de l'anneau) & d (longitude du nœud de l'anneau). On pourra donc indiſtinctement déterminer d (inclinaiſon de l'anneau) ou d (longitude du nœud de l'anneau), pourvu toutesfois que l'on ſuppoſe l'une de ces deux quantités connue. Si l'on veut calculer trois obſervations, comme alors on aura trois expreſſions différentes de $e + de$, on parviendra facilement à un réſultat final qui ne contiendra qu'une des inconnues combinée avec des connues ; & l'on déterminera toutes les inconnues du Problême.

Si l'on avoit pluſieurs obſervations de la même diſparition de l'anneau ; alors on pourroit, en ajoutant les réſultats, avoir une équation moyenne déduite de ces différentes obſervations. Au reſte, il me paroît ſuperflu de m'étendre davantage ſur les réflexions précédentes ; l'uſage de ces méthodes les rendra ſenſibles.

ARTICLE III.

Des changemens qu'il faut faire aux équations de l'Article précédent ; lorſque l'on fait entrer dans le calcul, un élément dépendant de l'élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau.

(321) Nous n'avons point conſidéré, dans les calculs précédens, l'élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau, à l'inſtant des Phénomenes ; il eſt cependant probable que cette élévation doit influer ſur les réſultats. En effet, l'anneau de Saturne n'eſt point lumineux par lui-même. Semblable à toutes les Planetes, il réfléchit la lumiere qu'il reçoit du Soleil. En général, un corps éclairé par un autre, réfléchit d'autant plus de lumiere que lui-même en reçoit davantage du corps lumineux. Cette derniere quantité, toutes choſes égales, eſt proportionnelle au ſinus de l'élévation du corps lumineux au-deſſus du plan éclairé ; & par conſéquent, lorſque l'élévation eſt fort petite, cette quantité eſt proportionnelle aux différentes élévations du corps lumineux au-deſſus du plan réfléchiſſant. Il paroît donc naturel de faire entrer dans les calculs, un élément dépendant de l'élévation du Soleil au-deſſus du

plan de l'anneau. Examinons au surplus quel changement cette nouvelle considération occasionnera dans les formules de l'Article précédent.

Il suit des recherches précédentes que si l'on nomme

e' une quantité telle que l'on ait pour une quelconque des observations, l'équation suivante,

(1) $\pm e'$ — L cotang (inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique) — H sin (longit. du nœud de l'ann.) + K cos (long. du nœud de l'ann.) = 0,

les valeurs de e' déterminées par cette derniere équation seront proportionnelles à l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, à l'instant des phénomenes.

Si donc l'on suppose que pour chaque observation, l'aptitude de l'anneau à reparoître, est en raison inverse des différentes élévations e' du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, il est évident que si l'on compare deux passages du plan de l'anneau par la Terre, & que l'on nomme $e1$, $de1$, $e'1$, les quantités relatives au premier passage ; $e2$, $de2$, $e'2$, les quantités analogues relatives au second passage ; l'on aura $e1 + de1 : e2 + de2 :: e'2 : e'1$.

(322) Il suit de cette théorie que si l'on a, par exemple, un certain nombre d'observations de disparitions & de réapparitions de l'anneau faites à des instans différens (1), (2), (3), &c. Au lieu d'avoir, pour ces instans, les seules équations de la forme de celles des §. 318 & 319, l'on aura de plus les équations suivantes

$$(1)\quad e2 + de2 = \frac{e'1}{e'2}(e1 + de1);$$

$$(2)\quad e3 + de3 = \frac{e'1}{e'3}(e1 + de1);$$

& ainsi de suite. Ces nouvelles équations ne présentent aucunes difficultés dans l'usage.

(323) Nous avons vu que pour chaque passage de la Terre par le plan de l'anneau, l'on a une valeur de $e + de$ & de e' que nous avons appris à déterminer. Par la même raison, pour chaque passage de l'anneau par le centre du Soleil, l'on a une valeur de $e' + de'$ & de e. Lorsque l'on compare deux passages de la Terre par le plan de l'anneau, nous avons vu que si l'on nomme $e1 + de1$, $e'1$, les valeurs qui appartiennent à la premiere observation, $e2 + de2$, $e'2$ les valeurs qui appartiennent à la seconde observation, il falloit faire $e1 + de1 : e2 + de2 :: e'2 : e'1$. Par une raison analogue, si l'on compare deux passages du plan de l'anneau par le centre du Soleil, il paroît naturel de supposer $e'1 + de'1 : e'2 + de'2 :: e2 : e1$. Nous remarquerons seulement que, comme a chaque époque, l'anneau ne passe qu'une seule fois par le centre du Soleil, cette comparaison ne peut être faite que dans deux époques différentes éloignées entr'elles d'environ quinze ans.

CHAPITRE SIXIEME.

Application des formules du Chapitre précédent, aux Obfervations faites en 1773 & 1774; 1714 & 1715; & 1671.

ARTICLE PREMIER.

Application des formules du Chapitre précédent, aux Obfervations faites en 1773 & 1774.

Détail des Obfervations faites en 1773 & 1774.

Obfervations de M. Meffier.

(324) AVANT de difcuter les phénomenes qui ont eu lieu en 1773 & 1774, je vais mettre fous les yeux du Lecteur, les Obfervations faites à cette époque; je commencerai par celles de M. Meffier; les voici telles qu'elles m'ont été communiquées par cet Aftronome.

« Le 6 Octobre 1773 au matin, par un ciel très-ferein, j'examinai » Saturne pendant plus d'une heure, avec la lunette achromatique de » M. Bertin, de trois pieds de rayon & à triple objectif; j'étois alors » à Corbeil. Je vis diftinctement les deux anfes de l'anneau. La lu» miere que ces deux anfes répandoient, étoit extrêmement foible; » on les perdoit de vue de tems en tems. Ce même jour 6 Octobre, » je quittai Corbeil pour venir fuivre à Paris, la difparition de l'anneau, » avec la Lunette achromatique de M. de Saron. Cette lunette eft une » des meilleures qui foient forties des mains de Dollond.

» Du 6 Octobre au 11 du même mois, je ne pus faire aucune obfer» vation à caufe des nuages.

» Le 11 Octobre, le Ciel étant devenu ferein quelques minutes avant » cinq heures du matin, je dirigeai fur Saturne, la lunette de M. de » Saron, que j'avois fait groffir cent quinze fois. J'examinai Saturne » avec beaucoup d'attention. Le Ciel étoit parfaitement beau; j'apperçus » encore un filet de lumiere très-délié. Les anfes étoient fi foibles, » que je les perdois de vue à chaque inftant. Elles paroiffoient dé» tachées du globe de Saturne auquel elles ne tenoient plus, comme » lors de l'obfervation du 6 Octobre. Je ne vis aucune différence entre » l'anfe occidentale & l'anfe orientale, relativement à l'intenfité de » la lumiere.

» Le 12 Octobre le Ciel étant en partie découvert; j'apperçus vers

» cinq heures du matin, Saturne qui me parut aussi bien terminé que la
» veille. Il ne me fut pas possible d'appercevoir aucune trace de l'anneau.

» Le 4 Janvier Saturne me parut sans aucun vestige de son anneau.
» Depuis le 4 Janvier 1774 jusqu'au 11, le Ciel fut toujours couvert.
» Le 11 au matin, par un Ciel très-serein, je dirigeai sur Saturne,
» la lunette de M. de Saron que j'avois fait grossir comme le 11 Oc-
» tobre 1773. Je vis les anses qui commençoient à paroître de chaque
» côté de la Planete ; il étoit alors quatre heures & demie du matin,
» & j'observai jusqu'à sept heures. La lumiere des anses étoit extrê-
» mement foible ; elles disparoissoient de tems en tems ; elles étoient
» détachées du globe de Saturne comme dans l'Observation du 11 Oc-
» tobre. La lunette renversoit les objets ; l'anse qui étoit à la droite
» de Saturne dans l'instrument, paroissoit un peu plus longue que
» celle de la gauche.

» Le 1 Avril 1774, par un Ciel très-serein, je dirigeai sur Saturne,
» la lunette de M. de Saron que j'avois fait grossir cent quinze fois.
» Je dirigeai pareillement sur Saturne, un télescope grégorien qui gros-
» sissoit cent quatre fois, & une lunette de M. Baudouin, qui grossissoit
» cent vingt fois. Saturne étoit très-près du Méridien. Les anses parois-
» soient avoir perdu beaucoup de leur lumiere. On les voyoit passa-
» blement bien avec la lunette de M. de Saron & avec le télescope.
» On les voyoit moins bien avec la lunette de M. Baudouin.

» Le 3 Avril, le Ciel étant parfaitement beau & Saturne presque
» dans le Méridien, j'examinai cette Planete depuis neuf heures trois
» quarts jusqu'à dix heures un quart du soir. Les anses avoient beau-
» coup perdu de leur lumiere depuis la veille. A peine pouvoit-on les
» appercevoir avec la lunette de M. de Saron & avec le télescope. On
» les perdoit de vue très-fréquemment, & il n'étoit pas possible de
» juger de leur longueur. L'anse de la droite paroissoit seulement un
» peu moins éteinte que l'anse de la gauche. Les anses ne se voyoient
» plus avec la lunette de M. Baudouin.

» La nuit du 4 au 5 Avril, le Ciel fut couvert.

» Le 5 Avril au soir, par un Ciel très-pur, Saturne me parut par-
» faitement rond.

» Le 30 Juin 1774, par un Ciel très-pur & par une nuit sans Lune,
» j'observai Saturne depuis neuf heures du soir jusqu'à dix heures. Il
» me parut parfaitement rond. Le lendemain 1 Juillet, je dirigeai sur
» Saturne la lunette de M. de Saron, que j'avois fait grossir cent quinze
» fois. L'Astre étoit parfaitement terminé. J'apperçus dans la lunette,
» l'anse occidentale de l'anneau. Sa lumiere très-foible & presqu'éteinte,
» échappoit souvent à la vue. Quant à l'anse orientale, il ne me fut
» pas possible de l'appercevoir.

» Le 2 Juillet 1774, je vis très-distinctement les deux anses de

» l'anneau, depuis neuf heures du ſoir juſqu'à neuf heures & demi.
» Elles étoient détachées du globe de Saturne comme dans les Obſer-
» vations des 11 Octobre 1773 & 11 Janvier 1774.

» Lorſqu'il eſt queſtion de la lunette de M. de Saron, on ne doit
» point oublier qu'elle renverſe les objets; ainſi quand j'ai parlé de
» l'anſe occidentale de l'anneau, on doit entendre l'anſe occidentale
» vue dans la lunette, & par conſéquent l'anſe orientale de Saturne;
» & réciproquement.

Obſervations recueillies par M. de la Lande.

(325) Voici maintenant le détail des Obſervations recueillies par M. de la Lande; elles ſont conſignées dans la connoiſſance des tems pour l'année 1775. Cet Aſtronome ſe trouvoit en Languedoc lors de la premiere diſparition de l'anneau. Voici comment il s'exprime, ſoit relativement à ſes Obſervations particulieres, ſoit relativement à celles dont il donne la notice.

» Dès le 28 Septembre 1773, avec une lunette ordinaire de ſeize
» pieds, je ne voyois plus aucune apparence de l'anneau; non plus
» que MM. Bouillet, Clauzade & Bertholon, Aſtronomes de l'Académie
» de Béziers, avec leſquels j'obſervois.

» M. le Monnier a ceſſé de voir l'anneau le 30 Septembre, avec une
» lunette achromatique de dix pieds & demi. MM. de Ratte & Poi-
» tevin l'ont perdu de vue à Montpellier le 2 Octobre. MM. le Gentil
» & Caſſini fils ont ceſſé de le voir le 6 Octobre, & M. Meſſier le 11.
» Ces Aſtronomes obſervoient avec des lunettes achromatiques de trois
» pieds & demi à grandes ouvertures. M. de Saint-Jacques, à Marſeille,
» avec un grand téleſcope de Short, a ceſſé de voir l'anneau, le 12 Octobre;
» & le Pere Meyer, à Shwezingen, prétend l'avoir encore vu le 16.

» Le 3 Avril 1774, j'ai perdu de vue l'anneau pour la ſeconde fois.
» La diſparition de l'anneau a été obſervée le même jour à Wilna, par
» le Pere Poczobut, avec un très-grand téleſcope de Short.

Obſervations faites à l'Obſervatoire Royal de Paris.

(326) Nous avons auſſi les Obſervations faites à l'Obſervatoire royal de Paris, par MM. Caſſini, le Gentil, & Du Vancel, avec la lunette de M. le Duc de Chaulnes. Ces Aſtronomes obſervoient avec la même lunette, & chacun en particulier conſignoit dans les Regiſtres de l'Obſervatoire, le réſultat de ſon Obſervation. On peut voir le détail de ces Obſervations dans un Mémoire de M. Caſſini fils. Il réſulte de ce Mémoire que MM. Caſſini, le Gentil & Du Vaucel ont fixé la premiere diſparition de l'anneau, au 6 Octobre 1773. Quant à M. l'Abbé Rochon, il croit avoir vu l'anneau juſqu'au 10 du même mois. Voici comment

il s'exprime dans une note communiquée à l'Académie des Sciences, & qu'il m'a prié de rendre publique.

« Le 10 Octobre 1773 au matin, MM. le Gentil, Du Vaucel & » moi, nous avons regardé dans la lunette de Dollond, (celle de feu » M. le Duc de Chaulnes) depuis quatre heures quarante-cinq minutes » du matin, jusqu'à cinq heures & demie. Le tems paroissoit assez beau; » cependant il y avoit des vapeurs, car une petite Etoile, qui étoit » au-dessous de Saturne, paroissoit & disparoissoit par intervalle. MM. le » Gentil & Du Vaucel ont vu la phase ronde, & Saturne sans anses, » quoiqu'ils vissent distinctement l'ombre de l'anneau sur le disque. » Quant à moi il m'a semblé voir encore un foible reste de l'anneau » très-rétréci & très-court.

La réapparition de l'anneau n'a été constatée à l'Observatoire, que le 13 Janvier 1774, sur l'avis donné par M. Messier, de cette réapparition. Quant à la seconde disparition de l'anneau, il paroît qu'il y a de l'incertitude entre le 2 & le 3 d'Avril.

Observations de Cadix.

(327) A Cadix, la premiere disparition de l'anneau a été fixée par M. Tofino, au 6 Octobre 1773. Cette Observation a été faite avec une excellente lunette achromatique de Dollond, de la même force à peu près que celle dont on se servoit à l'Observatoire royal de Paris. M. le Gentil se sert de cette Observation, faite dans un climat pur & sans nuages, pour persister à penser, contre l'opinion de MM. Messier & Rochon, que l'anneau a réellement disparu le 6 Octobre 1773. M. le Gentil se fonde aussi sur la très-grande diminution de la lumiere de l'anneau, dans l'intervalle du 1 Octobre au 6 du même mois ; diminution qui ne peut, suivant lui, permettre de penser que l'anneau ait encore été visible le 11 Octobre.

Quant à la seconde disparition de l'anneau, M. Tofino estime, d'après ses Observations du 4 Avril 1774, qu'elle est arrivée le 5 du même mois à quatre heures du matin.

Observations de Toulouse.

(328) A Toulouse, M. d'Arquier a vu l'anneau de Saturne le 28 Septembre 1773 ; le tems ne lui a pas permis d'observer jusqu'au 6 Octobre, jour auquel il n'a plus vu l'anneau. La réapparition de l'anneau n'a été observée par lui que le 16 Janvier 1774; & la seconde disparition, le 2 Avril de la même année.

Observations de la derniere réapparition de l'anneau.

(329) Quant à la seconde réapparition de l'anneau, elle présente beaucoup moins d'incertitude que les autres Observations. Presque tous

les Astronomes s'accordent à fixer cette seconde réapparition au 1 Juillet 1774 au soir. Nous avons, pour déterminer cet instant précis, les Observations faites à Paris par M. Messier, & à Toulouse par M. d'Arquier. Nous ne pouvons passer sous silence, une circonstance honorable pour ce dernier Astronome. Dans la Séance publique de l'Académie de Toulouse, du mois d'Avril 1774, il avoit annoncé la prochaine réapparition de l'anneau pour le 1 Juillet, & l'événément a justifié ses calculs.

Remarques sur les Observations détaillées ci-dessus.

(330). On ne peut se dissimuler que l'instant précis de la premiere disparition de l'anneau de Saturne, ne présente de l'incertitude. Entre l'Observation de M. de la Lande & celle de M. Messier, il y a douze jours d'intervalle. On doit sans doute attribuer cette grande différence, aux lunettes dont ces deux Astronomes se sont servis. D'ailleurs M. de la Lande n'attache aucune prétention à son Observation, & il seroit facile de se décider si l'on n'avoit pas d'autres difficultés à résoudre. Mais il y a cinq jours d'intervalle entre les Observations de MM. Cassini, le Gentil, Du Vaucel & Tofino, & celle de M. Messier, quoique faites avec des instrumens à-peu-près de même force; & cette difficulté est plus réelle. Je n'entrerai pas, quant à présent, dans la critique de ces Observations. Comme cependant il faut partir d'une supposition déterminée, que cette supposition est absolument arbitraire, & que je me propose de donner les résultats dans toutes les hypotheses, je supposerai que l'anneau a disparu le 6 Octobre 1773 à midi, à raison du passage de la Terre par la surface antérieure de l'anneau. J'ai choisi cette époque, parce qu'elle tient le milieu entre les premieres & les dernieres Observations de la disparition de l'anneau de Saturne, & que d'ailleurs elle cadre avec les Observations faites à Cadix & à l'Observatoire royal de Paris.

Je supposerai pareillement que l'anneau a reparu le 11 Janvier 1774 à midi, à raison du passage de la surface postérieure de l'anneau par le Soleil. Cette époque est celle de l'Observation de M. Messier. Je remarquerai cependant que dans les jours précédens, Saturne n'ayant pas été observé, à cause des nuages, l'Observation de M. Messier manque d'un dégré de certitude que cet Astronome n'a pu lui donner. Au reste il est fâcheux que cette réapparition n'ait pas été constatée avec plus d'exactitude. C'eût été la premiere Observation de ce genre que présenteroit l'histoire de l'Astronomie; car l'on n'a pas encore une seule Observation exacte de l'instant du passage de l'anneau par le centre du Soleil. En 1715, M. Maraldi s'est trouvé dans les mêmes circonstances que M. Messier en 1774; & les nuages ont fait manquer l'Observation.

Je supposerai que l'anneau a disparu une seconde fois le 2 Avril 1774 à midi, à raison du passage de la Terre par la surface postérieure

de l'anneau ; c'eſt ce qui réſulte des Obſervations faites à l'Obſervatoire royal de Paris. M. Meſſier fixe cette diſparition entre le 3 & le 5 Avril, & j'aurai égard à cette fixation, dans les calculs. Comme Saturne a été obſervé avant & après le jour auquel j'ai fixé la diſparition de l'anneau, on ne peut pas faire ſur cette Obſervation, l'objection propoſée contre celle du 11 Janvier 1774.

Je ſuppoſerai enfin que l'anneau a reparu le 1 Juillet 1774, à midi, à raiſon du paſſage de la Terre par la ſurface poſtérieure de l'anneau. Cette obſervation eſt dans le cas de la précédente ; & comme Saturne a été obſervé avant & après le jour auquel on a fixé cette réapparition, il paroît que l'Obſervation eſt au-deſſus de toute critique. Elle a même un avantage au-deſſus de celle du 2 Avril, c'eſt que tous les Aſtronomes ſont d'accord relativement au jour de cette derniere réapparition.

D'un uſage particulier de l'Obſervation du paſſage du plan de l'anneau, par le centre du Soleil.

(331) Je ne puis paſſer ſous ſilence la réflexion ſuivante, relativement à l'Obſervation du paſſage du plan de l'anneau par le centre du Soleil. Ce phénomene étoit d'autant plus intéreſſant à obſerver, qu'il fournit une méthode facile, pour meſurer la véritable épaiſſeur de l'anneau de Saturne. En effet cette épaiſſeur eſt égale à l'ombre de l'anneau ſur le corps de la Planete, pour l'inſtant dont il s'agit. L'Obſervation étoit encore importante, en ce qu'elle pouvoit fournir le moyen de meſurer l'inclinaiſon de l'anneau ſur le plan de l'Ecliptique ; car cette inclinaiſon eſt égale à l'angle de l'ombre de l'anneau projettée ſur Saturne, avec un cercle parallele à l'Ecliptique mené par Saturne, pour l'inſtant du paſſage du plan de l'anneau pour le centre du Soleil.

Elémens hypothétiques dont nous ferons uſage dans le calcul des Obſervations de 1773 & 1774.

(332) Dans le calcul des Obſervations de 1773 & 1774, je ſuppoſerai que les lieux de la Terre & ſa diſtance au Soleil donnés par les Tables de M. l'Abbé de la Caille, ſont exacts. Je ſuppoſerai que les dimenſions de l'orbite de Saturne, telles qu'elles ſe trouvent dans la nouvelle édition de l'Aſtronomie de M. de la Lande, ſont pareillement exactes. Mais comme il réſulte de l'Obſervation de l'oppoſition de Saturne du 12 Mars 1774, que les Tables de Saturne inſérées dans la nouvelle édition de l'Aſtronomie de M. de la Lande, font cette Planete trop avancée de 8′ 40″ dans ſon orbite, j'en conclurai que ſi l'on veut avoir le vrai lieu de Saturne, du moins pour l'époque dont il s'agit, il faut retrancher 8′ 40″ du lieu calculé par les Tables. En un mot je partirai des élémens ſuivans.

Longitude

Longitude du nœud aſcendant de l'orbite de Saturne.	$3^s\,21^d\,43'\,12''$.
Longitude du nœud de l'anneau ſur l'écliptique	5 17 5 0
Lieu du périhélie de Saturne dans ſon orbite	3 0 30 30
Longitude du périhélie de la Terre vue du Soleil	3 9 4 16
Inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'écliptique	31 20 0
Inclinaiſon du plan de l'orbite de Saturne ſur l'écliptique . . .	2 30 20

Calcul de l'Obſervation du 6 Octobre 1773.

(333) Le 6 Octobre 1773, à midi, la longitude du Soleil étoit de $6^s\,13^d\,29'\,55''$; la longitude de la Terre vue du Soleil étoit donc de $0^s\,13^d\,29'\,55''$. D'après les Tables inſérées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, le lieu de Saturne dans ſon orbite étoit de $5^s\,17^d\,30'\,16''$, qu'il faut diminuer (§. 332) de $8'\,40''$, pour avoir le vrai lieu de Saturne dans ſon orbite. L'on a donc, vrai lieu de Saturne dans ſon orbite $= 5^s\,17^d\,21'\,36''$. Donc latitude héliocentrique de Saturne $= 2^d\,4'\,5''$; longitude héliocentrique de Saturne $= 5^s\,17^d\,19'\,59''$; $R = 0{,}99840$; $R' = 9{,}39075$; $F = 0{,}97083$; $G = 0{,}23305$; $H = -9{,}15619$; $K = 2{,}05784$; $L = 0{,}33865$. Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (1) du §. 318, en faiſant uſage de la premiere ſuite de ſignes, attendu qu'il s'agit du paſſage de la Terre par la ſurface antérieure de l'anneau ; l'on aura

(1) $e + de = 0{,}07135 - 0{,}000364000\,d$ (inclinaiſon du plan de l'anneau)
$+ 0{,}00298973\,d$ (longitude du nœud de l'anneau)
$- 0{,}00034615\,d$ (longitude de la Terre).

Calcul des Obſervations des 11 Janvier, 2 Avril & 1 Juillet 1774.

(334) Le 11 Janvier 1774, à midi, le lieu de Saturne dans ſon orbite étoit, ſuivant les Tables de M. de la Lande, de $5^s\,20^d\,50'\,24''$. Si l'on ôte $8'\,40''$, conformément à la remarque du §. 332, l'on aura pour le vrai lieu de Saturne dans ſon orbite $5^s\,20^d\,41'\,44''$; donc latitude héliocentrique de Saturne $= 2^d\,8'\,50''$; longitude héliocentrique de Saturne $= 5^s\,20^d\,40'\,20''$; $R' = 9{,}41845$; $H = -9{,}28737$; $K = 1{,}52547$; $L = 0{,}35288$. Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (1) du §. 319, en faiſant uſage de la ſeconde ſuite de ſignes, attendu qu'il s'agit du paſſage de la ſurface poſtérieure de l'anneau par le centre du Soleil ; l'on aura

(1) $e + de = 0{,}00960 + 0{,}00037947\,d$ (inclinaiſon du plan de l'anneau)
$- 0{,}00273273\,d$ (longitude du nœud de l'anneau)
$+ 0{,}00009268\,d$ (longitude Terre).

On trouvera de même que pour l'Obſervation du 2 Avril 1774, l'on avoit, lieu de Saturne dans ſon orbite $= 5^s\,23^d\,27'\,56''$, longitude héliocentrique de Saturne $= 5^s\,23^d\,26'\,50''$, longitude de la Terre vue du Soleil $= 6^s\,12^d\,47'\,38''$; d'où l'on conclura

(2) $e + de = 0{,}01411 + 0{,}00039108\,d$ (inclinaiſon du plan de l'anneau) $- 0{,}00246605\,d$ (long. du nœud de l'ann.) $- 0{,}00017516\,d$ (longit. Terre).

On trouvera enfin que pour l'Obſervation du 1er. Juillet 1774, l'on avoit, longitude de la Terre vue du Soleil $= 9^{s} 9^{d} 33' 56''$; lieu de Saturne dans ſon orbite $= 5^{s} 26^{d} 40' 7''$; longitude héliocentrique de Saturne $= 5^{s} 26^{d} 39' 1''$; d'où l'on conclura

(3) $c + dc = -0{,}00585 + 0{,}00040294\, d$ (inclinaiſon du plan de l'anneau) $- 0{,}00282915\, d$ (longit. du nœud de l'ann) $+ 0{,}00020241\, d$ (longit. Terre).

On n'oubliera pas que dans les équations précédentes, chaque minute de degré de variation de d (longitude de la Terre) répond à 24′ de tems.

Réſultat des équations précédentes.

(335) Si l'on combine les équations (1) du §. 333; (1), (2), (3) du §. 334, & que l'on nomme

d (longitude Terre 1), la valeur de d (longitude Terre) correſpondante à l'Obſervation du 6 Octobre 1773;

d (longitude Terre 2), la valeur de d (longitude Terre) correſpondante à l'Obſervation du 11 Janvier 1774;

d (longitude Terre 3), la valeur de d (longitude Terre) correſpondante à l'Obſervation du 2 Avril 1774;

d (longitude Terre 4), la valeur de d (longitude Terre) correſpondante à l'Obſervation du 1er. Juillet 1774;

L'on aura les réſultats ſuivans.

(1) d (longit. du nœud de l'ann.) $= -68',721 - 0{,}020\, d$ (longit. Terre 1) $+ 0{,}641\, d$ (longitude Terre 3) $+ 0{,}729\, d$ (longitude Terre 4);

(2) d (inclin. du plan de l'anneau) $= -421' - 0{,}603\, d$ (longit. Terre (1)) $+ 4{,}865\, d$ (longitude Terre 3) $+ 5{,}269\, d$ (longitude Terre 4);

(3) $c + dc = 0{,}01894 - 0{,}0000183626\, d$ (longitude Terre 1) $+ 0{,}0000014653\, d$ (longit. Terre 3) $+ 0{,}0000026214\, d$ (long. Terre 4);

(4) d (longitude Terre 2) $= -208' - 0{,}118\, d$ (longitude Terre 1) $+ 0{,}619\, d$ (longitude Terre 3) $+ 2{,}891\, d$ (longitude Terre 4).

Remarque ſur les équations précédentes.

(336) L'uſage de l'analyſe précédente m'a fait appercevoir qu'on peut donner aux équations du §. précédent, un degré d'exactitude que l'on ne doit pas négliger. En effet, je me ſuis apperçu, ainſi qu'il ſera facile de le conſtater par les Tables des §. 341 & 342, que l'inclinaiſon du plan de l'anneau que l'on trouve par le réſultat final, varie d'une maniere très-ſenſible, ſuivant les Obſervations dont on croit devoir faire uſage. Si donc dans les équations (1) des §. 318 & 319 l'on emploie l'inclinaiſon hypothétique de l'anneau, cette inclinaiſon peut être aſſez differente de l'inclinaiſon que donne le calcul, pour que l'on ait à craindre une aſſez grande inexactitude dans les réſultats obtenus par les méthodes différentielles. Cette réflexion m'a fait penſer qu'au lieu d'évaluer dans les équations (1) des §. 318 & 319, les quantités qui dé-

pendent de l'inclinaison du plan de l'anneau, au moyen de l'inclinaison hypothétique, il est plus à propos de laisser subsister ces termes non-évalués, dans les résultats, sauf ensuite à déterminer l'inclinaison du plan de l'anneau par des considérations particulieres.

Si l'on suit cette analyse, au lieu des équations (1) du §. 333, (1), (2), (3) du §. 334, l'on aura les équations suivantes

Observation du 6 Octobre 1774.

$$(1)\ e + de = -0{,}48529 + 0{,}33865 \text{ cotang (inclin. du plan de l'anneau)} - \frac{0{,}00009857}{\sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)}} d \text{ (inclinaison de l'anneau)} + 0{,}00298973\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} - 0{,}00034615\, d \text{ (longitude Terre).}$$

Observation du 11 Janvier 1774.

$$(2)\ e + de = 0{,}58926 - 0{,}35288 \text{ cotang (inclinaison du plan de l'anneau)} + \frac{0{,}00010265}{\sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)}} d \text{ (inclinaison de l'anneau)} - 0{,}00275273\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} + 0{,}00009268\, d \text{ (longitude Terre).}$$

Observation du 2 Avril 1774.

$$(3)\ e + de = 0{,}61152 - 0{,}36570 \text{ cotang (inclinaison du plan de l'anneau)} + \frac{0{,}00010579}{\sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)}} d \text{ (inclinaison du plan de l'anneau)} - 0{,}00246605\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} - 0{,}00017516\, d \text{ (longitude Terre).}$$

Observation du 1er. Juillet 1774.

$$(4)\ e + de = 0{,}60966 - 0{,}37473 \text{ cotang (inclinaison du plan de l'anneau)} + \frac{0{,}00010900}{\sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)}} d \text{ (inclinaison du plan de l'anneau)} - 0{,}00282925\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} + 0{,}00020241\, d \text{ (longitude Terre).}$$

(337) Si l'on combine les équations du §. précédent ainsi que nous avons combiné celles des §. 333 & 334, l'on parviendra au résultat suivant,

$$(1)\ d \text{ (inclin. du plan de l'anneau)} = \sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)} \times (3439' \text{ cotang (inclin. de l'ann.)} - 7206' - 2{,}198\, d \text{ (longit. Terre 1)} + 17{,}962\, d \text{ (longit. Terre 3)} + 19{,}447\, d \text{ (longitude Terre 4)}).$$

Mais il est aisé de voir *à priori*, que la véritable expression de l'inclinaison de l'anneau doit être telle que, si on la substitue dans l'équation

précédente, la valeur de d (inclinaiſon du plan de l'anneau) doit être nulle. Et en effet, l'on n'eſt ſûr d'avoir la véritable inclinaiſon du plan de l'anneau, qu'autant qu'en ſubſtituant cette inclinaiſon dans l'équation dont il s'agit, il n'en réſulte aucune correction pour l'expreſſion de l'inclinaiſon, & conſéquemment qu'autant que d (inclinaiſon de l'anneau) $= 0$.

Si dans l'équation (1) l'on ſuppoſe d (inclinaiſon du plan de l'anneau) $= 0$; l'on conclura

$$(2)\ \text{Tang (inclinaiſon de l'anneau)} = \frac{3{,}430}{7{,}206 + 0{,}0002198\, d\,(\text{long. Terre } 1) - 0{,}0017961\, d\,(\text{long. Terre } 3) - 0{,}0019447\, d\,(\text{long. Terre } 4)}.$$

Dans l'uſage, il faudra employer cette équation au lieu de l'équation (2) du §. 335.

(338) Au moyen des équations (1) du §. 333, (1), (2), (3) du §. 334, on parviendra aux équations ſuivantes, en employant d'ailleurs l'inclinaiſon de l'anneau déterminée par l'équation (2) du §. précédent,

$$(1)\ d\,(\text{longit. du nœud de l'ann.}) = -54'{,}955 + 0{,}482\, d\,(\text{longit. Terre } 3) + 0{,}557\, d\,(\text{longit. Terre } 4) + 0{,}0327\, d\,(\text{inclin. du plan de l'anneau});$$

$$(2)\ e + de = 0{,}14693 - 0{,}0013637\, d\,(\text{longitude Terre } 3) - 0{,}0013736\, d\,(\text{longit. Terre } 4) + 0{,}0003104\, d\,(\text{inclin. de l'ann.});$$

$$(3)\ d\,(\text{longitude Terre } 2) = -113' - 0{,}501\, d\,(\text{longitude Terre } 3) + 1{,}710\, d\,(\text{longitude Terre } 4) + 0{,}231\, d\,(\text{inclinaiſon de l'anneau}).$$

On voit par ces dernieres équations, que l'inclinaiſon de l'anneau influe peu ſur les autres élémens; on pourra donc, ſans erreur ſenſible, faire uſage des équations (1), (3), (4) du §. 335.

Expreſſion de l'élévation du Soleil & de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau, aux inſtans des diſparitions & des réapparitions de l'anneau.

(339) Nous remarquerons, qu'il réſulte du §. 287, que pour conclure l'élévation de la Terre au-deſſus du plan central de l'anneau lors des diſparitions & des réapparitions de l'anneau, occaſionnées par le paſſage de la Terre par le plan de l'anneau, l'on a l'équation ſuivante

$$(1)\ \text{ſin (élévation de la Terre au-deſſus du plan central de l'anneau)} = \frac{(e + de)\ \text{ſin (inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'écliptique)}}{\text{Diſtance de Saturne à la Terre}}$$

Dans le cas d'une diſparition ou d'une réapparition de l'anneau occaſionnée par le paſſage de l'anneau par le Soleil, l'on a (§. 286)

$$(2)\ \text{ſin (élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau)} = \frac{(e + de)\ \text{ſin (inclinaiſon du plan de l'anneau)}}{\text{Rayon vecteur de Saturne}}.$$

Dans l'équation (1) l'on évaluera la diſtance de Saturne à la Terre, au moyen de l'équation (2) du §. 289.

Examen ſommaire des différentes Obſervations.

(340) Je vais paſſer maintenant à l'examen des différentes Obſervations. Nous avons vu que les Aſtronomes ne ſont point d'accord ſur les inſtans précis des diſparitions & des réapparitions de l'anneau en 1773 & 1774. Je ne prononcerai point ſur l'exactitude de ces Obſervations ; les circonſtances locales, l'état de l'atmoſphere, la force des lunettes, ſont ſans contredit des élémens qui ont dû influer beaucoup dans ces déterminations. Quoi qu'il en ſoit, voici deux hypotheſes auxquelles j'ai cru devoir m'arrêter, pour ne pas trop multiplier les calculs. Dans la premiere hypotheſe, je ſuppoſerai que l'anneau a diſparu la ſeconde fois le 2 Avril 1774, 12 heures, & qu'il a reparu le 1er. Juillet 1774, 8 heures. Je partirai de cette ſuppoſition, parce que beaucoup d'Aſtronomes s'accordent ſur ces deux circonſtances. Je donnerai en conſéquence les différens réſultats, en ſuppoſant ſucceſſivement que la premiere diſparition de l'anneau a eu lieu depuis le 1er Octobre 1773 juſqu'au 12 du même mois. Je ſuppoſerai enſuite que l'anneau a diſparu la ſeconde fois le 3 Avril 1774, 12 heures, qu'il a reparu le 1 Juillet de la même année, 8 heures; & je donnerai pareillement les réſultats en ſuppoſant comme ci-deſſus que la premiere diſparition de l'anneau a eu lieu depuis le 1 Octobre 1773, juſqu'au 12 du même mois.

(341) Si l'on ſuppoſe que la ſeconde diſparition de l'anneau a eu lieu le 2 Avril 1774, 12 heures, & que la ſeconde réapparition de l'anneau eſt arrivée le 1 Juillet 1774, 8 heures, on formera la Table ſuivante.

Premiere diſparition de l'anneau.	Inclinaiſon du plan de l'anneau.	Longitude du nœud de l'anneau.	Elévation de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau, à l'inſtant de la diſparition.
1er. Octobre 1773.	$31^d\ 28'$ . . .	$5^f\ 16^d\ 37'$ . . .	$+ 15'\ 46''$
2	30 54 . . .	5 16 36 . . .	+ 13 41
3	30 20 . . .	5 16 35 . . .	+ 11 36
4	29 46 . . .	5 16 33 . . .	+ 9 31
5	29 15 . . .	5 16 32 . . .	+ 7 26
6	28 44 . . .	5 16 30 . . .	+ 5 21
7	28 13 . . .	5 16 29 . . .	+ 3 16
8	27 45 . . .	5 16 28 . . .	+ 1 11
9	27 17 . . .	5 16 26 . . .	— 0 54
10	26 48 . . .	5 16 25 . . .	— 2 59
11	26 21 . . .	5 16 24 . . .	— 5 4
12	25 55 . . .	5 16 23 . . .	— 7 9

(342) Si l'on suppose que la seconde disparition de l'anneau a eu lieu le 3 Avril 1774, 12 heures, & que la seconde réapparition est arrivée le 1er Juillet 1774, 8 heures, on formera la table suivante,

Premiere disparition de l'anneau.	Inclinaison du plan de l'anneau.	Longitude du nœud de l'anneau.	Élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau à l'instant de la disparition.
1er Octobre 1773.	37^d 8′ . . .	5^f 17^d 15′ . .	+ 17′ 21″
2	36 22	5 17 14 . .	+ 15 15
3	35 37	5 17 13 . .	+ 13 9
4	34 52	5 17 12 . .	+ 11 3
5	34 10	5 17 10 . .	+ 8 57
6	33 29	5 17 9 . .	+ 6 51
7	32 49	5 17 8 . .	+ 4 45
8	32 11	5 17 7 . .	+ 2 39
9	31 34	5 17 5 . .	+ 0 33
10	30 58	5 17 4 . .	— 1 33
11	30 24	5 17 3 . .	— 3 39
12	29 50	5 17 2 . .	— 5 45

(343) Il est aisé de sentir comment nous avons formé les Tables précédentes. Pour former la Table du §. 341, dans les équations (1) & (3) du §. 335, ainsi que dans l'équation (2) du §. 337, nous avons supposé d (longitude Terre 3) = 30′; d (longitude Terre 4) = 20′; puis nous avons supposé successivement d (longitude Terre 1) = — 300′, — 240′, — 180′ &c. conformément à la remarque du §. 319.

Pour former la Table du §. 342 nous avons supposé d (longitude Terre 3) = 90′; d (longitude Terre 4) = 20′; puis nous avons supposé successivement d (longitude Terre 1) = — 300′, — 240′, — 180′ — &c.

Si dans ces différens cas, nous avions porté les mêmes valeurs dans l'équation (4) du §. 335, nous aurions trouvé par un résultat moyen, d (longitude Terre 2) = — 200′; de sorte qu'il me paroît évident que l'on a observé la réapparition de l'anneau du commencement du mois de Janvier 1774, un peu plus de trois jours après sa véritable époque.

Quant à l'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau, elle a été calculée au moyen de l'équation (1) du §. 338.

Récapitulation des recherches précédentes.

(344) Si l'on récapitule les recherches précédentes, on verra qu'en général les Observations ont été bien faites en 1773 & 1774, & que les élémens que l'on déduit de ces Observations, retombent à très-

peu près dans les résultats connus. Si l'on supposoit, par exemple, que la premiere disparition de l'anneau a eu lieu entre le 9 & le 10 Octobre 1773; que la seconde disparition est arrivée le 3 Avril 1774, 12 heures, & la seconde réapparition le 1 Juillet 1774, 8 heures, on voit par la Table du §. 342, que l'on retomberoit dans les élémens hypothétiques du §. 332. Je suis d'autant plus tenté d'adopter ces élémens, que les instans dont il vient d'être question, me paroissent très-probablement les véritables instans des Phénomenes.

Une nouvelle raison doit encore déterminer à adopter ces résultats; c'est que l'on n'est point obligé, dans cette hypothese, de supposer à la Terre une dépression au-dessous du plan de l'anneau, à l'instant de la disparition de l'anneau. Cette derniere réflexion doit rendre très-suspecte l'Observation du pere Meyer du 16 Octobre 1773; & je ne fais aucun doute qu'on ne doive la rejetter.

ARTICLE II.

Application des formules du Chapitre précédent, aux Observations faites en 1714 & 1715.

(345) Je vais appliquer maintenant le calcul, aux Observations faites par M. Maraldi en 1714 & 1715; mais auparavant il faut remettre ces Observations sous les yeux du Lecteur. Elles sont tirées de deux Mémoires insérés dans les Recueils de l'Académie pour les années 1715 & 1716.

Détail des Observations faites en 1714 & 1715 par M. Maraldi.

(346) Voici comment M. Maraldi s'exprime relativement à ces Observations.

« Les changemens qui devoient arriver à l'anneau de Saturne, dans » la situation du Ciel où il se trouve présentement, m'ont rendu at- » tentif à observer cette Planete aussi-tôt qu'on a pu l'appercevoir, » après sa sortie des rayons du Soleil.

» La conjonction de ces deux Astres arriva le 8 Septembre 1714; & » quoique Saturne fût alors dans un signe du Zodiaque des plus pro- » pres pour se dégager promptement du Crépuscule du matin, on ne » put le voir que le 25 Septembre, dix-huit jours après sa conjonction » avec le Soleil. Encore ne l'auroit-on pas vu si promptement, si l'on » n'avoit sçu par les Ephémérides, que ce jour-là & les jours suivans, » il devoit se trouver proche de Mercure, qui par sa lumiere plus » éclatante, se voyoit facilement dans le Crépuscule, & nous fit ap- » percevoir Saturne dont la lumiere étoit beaucoup plus foible. Ce qui » se remarqua non-seulement proche de l'Horizon & à la vue simple,

» mais aussi dans le Méridien à l'aide des lunettes ; car nous ne pûmes » voir Saturne, qui y devoit passer une heure avant midi, quoique » ce jour-là & les suivans on y observât Mercure qui y passoit vers » le même tems.

» Ayant donc observé Saturne le 25 Septembre, avec une lunette » de 34 pieds faite par Campani, son anneau étoit encore assez clair, » mais si étroit qu'on ne voyoit plus aucun intervalle entre lui & le Globe. » Cependant il avoit un peu de courbure, qui dans sa partie inférieure » exposée à la Terre, tournoit vers le Septentrion, comme les années » précédentes ; ce qui faisoit voir qu'il n'avoit point changé de situation » dans le tems qu'il avoit été caché dans les rayons du Soleil. Dans » la suite nous avons été attentifs à l'observer tous les jours qu'il a » fait beau, & nous avons remarqué que l'anneau se rétrécissoit assez » sensiblement d'un jour à l'autre, jusqu'à ce qu'enfin on a cessé de le » voir ; ce qui est arrivé le 14 Octobre. Mais avant que de disparoître » entiérement, nous remarquâmes diverses phases qui méritent d'être » rapportées.

» Depuis le 25 Septembre jusqu'au 30, nous ne trouvâmes aucune » différence sensible entre les deux anses. Le premier Octobre l'anse » orientale nous parut un peu plus large que l'occidentale ; ce que nous » vîmes encore le 3, le 5 & le 7 du même mois, qui furent les jours » que les nuages nous permirent d'observer Saturne. Nous remarquâmes » encore, qu'à mesure que les anses devenoient plus étroites, elles se » racourcissoient ; de sorte que le 9 Octobre nous les jugeâmes de » moitié plus courtes qu'à l'ordinaire ; les parties extérieures des anses » ayant disparu, lorsqu'on continuoit de voir distinctément les deux » moitiés intérieures, dont l'orientale paroissoit encore plus large que » l'occidentale.

» Depuis le 9 Octobre nous ne pûmes voir Saturne que le 12, à » cause des nuages. Ce jour-là il parut avec une seule anse qui étoit » du côté de l'Occident, l'autre moitié de l'anse qui devoit être vers » l'Orient ayant disparu. Il faut remarquer que l'anse orientale, qui » les jours précédens étoit la plus large & la plus apparente, a été » la premiere à disparoître ; ce qui ne paroît pas conforme à ce qui » devoit naturellement arriver ; à moins qu'on ne suppose que depuis » le 9 jusqu'au 12, elle avoit passé par un mouvement propre autour » de Saturne, de la partie orientale à l'occidentale. Le 13 le Ciel fut » couvert, & l'on ne pût observer Saturne que le 14, auquel jour on » ne vit plus aucune anse, & Saturne parut entiérement rond ; comme » on a continué de l'observer depuis ce tems-là, jusqu'au 1 Février qui » fut le dernier jour que nous l'avons observé rond ; cette phase ayant » duré plus de trois mois & demi.

» Le tems fut contraire aux Observations depuis le 1 Février jus- » qu'au 10. Nous vîmes ce jour-là Saturne qui avoit repris ses anses.

» Pendant

» Pendant tout le tems que l'anneau a diſparu, on voyoit ſur le globe » de Saturne une bande noire, qui étoit formée en partie par l'anneau » obſcur projeté ſur le globe, & en partie par l'ombre que l'anneau » a coutume de jeter ſur le même globe, & qui s'y voit pendant » pluſieurs années de la révolution de Saturne.

» Le 10 Février les anſes ayant commencé à paroître ſombres, » on continua de les obſerver plus claires le reſte de Février & dans » le mois de Mars; mais depuis leur apparition elles allerent en ſe » rétréciſſant juſqu'au 21 Mars qu'on commença à les voir difficile- » ment. Le 22 on ne vit plus que la trace foible d'une anſe du côté » d'Occident; celle qui devoit être vers l'Orient, à l'égard du globe » de Saturne, ayant diſparu. Enfin le 23 Mars l'anſe occidentale ne » ſe voyoit plus; & Saturne a paru rond & ſans anſes le reſte de Mars, » tout le mois d'Avril, de Mai, de Juin, & une partie de Juillet. On » l'obſerva encore en cet état, le 10 & le 11 du même mois. Mais le 12 » il avoit repris ſes deux anſes qui paroiſſoient inégales, l'occidentale » ayant paru plus large que l'orientale, qui étoit à peine viſible. On » les a vues toutes les deux s'élargir ſenſiblement pendant dix jours » de ſuite qu'on a pu continuer les Obſervations; mais le 23, à cauſe » de la proximité des rayons du Soleil dans leſquels Saturne entra, » il ne fut plus poſſible de l'obſerver que quatre mois après, lorſqu'il » commença de ſortir des mêmes rayons; & pour lors les anſes étoient » fort dilatées & ouvertes.

» Ainſi dans l'eſpace de neuf mois, Saturne a perdu deux fois ſes » anſes, une en Octobre 1714 & l'autre en Mars 1715. Il les a repriſes » auſſi deux fois; la premiere en Février 1715, & la ſeconde en » Juillet; & il les a conſervées quinze ans de ſuite, c'eſt-à-dire, » juſqu'en 1730. Les Obſervations de la diſparition des anſes du 23 » Mars 1715 & de la réapparition du 12 Juillet, ſe ſont trouvées confor- » mes au calcul que nous en avions donné auparavant, fondé ſur les » lumieres qu'on avoit tirées des Obſervations précédentes.

» On a vu dans la diſparition des anſes du 23 Mars 1715, auſſi » bien que dans celle du 12 Octobre 1714, que l'anſe orientale avoit » diſparu avant l'occidentale. On a auſſi remarqué dans leur réapparition » du 12 Juillet 1715, que l'anſe orientale étoit plus apparente que l'oc- » cidentale; ce qui confirme la conjecture de feu M. Caſſini, fondée » ſur une ſemblable Obſervation qu'il fit en 1671, que l'anneau n'eſt » pas dans un même plan.

» Après l'occultation entiere de l'anneau arrivée au mois d'Octobre » 1714, on commença à voir ſur le diſque de Saturne une bande qui » paſſoit à peu-près par le milieu de ce diſque. Cette bande qui d'abord » étoit fort mince, ſe dilata inſenſiblement en Octobre, en Novembre, » & augmenta juſqu'à la fin de Décembre. Enſuite elle diminua en » Janvier. Cependant elle étoit encore fort ſenſible le 1er. Février;

» mais dix jours après, lorsqu'on commença à appercevoir les anses » aux deux côtés de Saturne, cette bande obscure étoit presqu'invisible. » Elle continua de même le reste de Février, & depuis le commen- » cement de Mars jusqu'au 23, c'est-à-dire, tout le tems que les anses » furent visibles. Après le 23 Mars, qu'elles disparurent, la bande » noire commença de paroître plus sensible; & se dilata en Avril, » jusqu'au 17 Mai; ensuite, elle diminua, quoiqu'elle parût encore » tout le mois de Juin; mais au commencement de Juillet, lorsque » les anses parurent de nouveau, elle étoit fort mince.

» Deux causes différentes ont concouru à former la bande noire sur » le disque de Saturne. La premiere est une privation de lumière, ou » une véritable ombre causée par l'anneau. Car comme il est opaque, » aussi bien que le globe de Saturne, la partie de cet anneau com- » prise entre Saturne & le Soleil, intercepte ses rayons, & fait une » Eclipse de Soleil, en jetant sur le globe de Saturne, une ombre » d'une largeur à peu-près égale à celle que paroîtroit avoir l'anneau » vu du Soleil.

» La seconde cause qui concourt à former la bande obscure, est une » espece d'Eclipse du globe de Saturne faite seulement à notre égard, » par la partie de l'anneau obscur, comprise entre le globe de Saturne » & la Terre ».

J'ajouterai à ce qui vient d'être rapporté par M. Maraldi, ce que M. Cassini a lu à l'Académie, en 1774. Suivant cet Astronome, quoique M. Maraldi ait fixé dans son Mémoire imprimé, l'époque de la premiere disparition de l'anneau, au 12 Octobre 1714, il paroît cependant, d'après une note que l'on trouve de sa main, dans les registres de l'Observatoire, qu'il soupçonnoit avoir encore vu l'anneau, le 16 du même mois.

Calcul des Observations faites en 1714 & 1715.

(346) Dans le calcul des Observations faites en 1714 & 1715, je supposerai que les lieux du Soleil donnés par les Tables de M. de la Caille, sont exacts. Je supposerai pareillement que les dimensions de l'orbite de Saturne, telles qu'elles se trouvent dans la nouvelle édition de l'Astronomie de M. de la Lande, sont exactes; que les Tables de M. de la Lande ne représentent pas exactement le lieu de Saturne, à l'époque dont il s'agit; qu'elles font cette Planete, de 4′ 46″ trop avancée dans son orbite, ainsi qu'il résulte de l'Observation de l'opposition de Saturne du 11 Mars 1715, comparée aux Tables; que par conséquent pour avoir le vrai lieu de Saturne pour un certain jour, à l'époque de 1714 & 1715, il faut retrancher 4′ 46″ du lieu calculé. Je supposerai aussi que l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique, est de $31^d\,20'\,0''$; que le lieu de son nœud sur l'Ecliptique, répond au même point du Ciel qu'en 1774; que par conséquent dans l'intervalle de 1715 à 1774, il n'a eu d'autre mouvement apparent que

celui de précession ; & qu'en 1715 il répondoit à $5^s\ 16^d\ 16'$ comptés du premier point d'*Ariès*. Je supposerai enfin qu'à cette époque la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne, étoit de $3^s\ 21^d\ 13'\ 47''$; la longitude du périhélie de la Terre vue du Soleil, de $3^s\ 7^d\ 59'\ 52$; & le lieu du périhélie de Saturne dans son orbite, de $2^s\ 29^d\ 2'\ 0''$. En un mot, je partirai des élémens suivans.

Elémens hypothétiques dont on fera usage dans les calculs.

(347) Dans les calculs, nous ferons usage des élémens hypothétiques suivans.

Longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne	$3^s 21^d 13' 47''$
Longitude du nœud de l'anneau sur l'écliptique.	5 16 16 0
Lieu du périhélie de Saturne dans son orbite	2 29 2 0
Longitude du périhélie de la Terre vue du Soleil	3 7 59 52
Inclinaison du plan de l'anneau sur l'écliptique	31 20 0
Inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique	2 30 20

Je supposerai que l'anneau a disparu une premiere fois le 12 Octobre 1714, 0 heures, à raison du passage de la Terre par la surface antérieure de l'anneau ; qu'il a reparu une premiere fois, le 10 Février 1715, 0 heure, à raison du passage de la surface postérieure de l'anneau par le centre du Soleil ; qu'il a disparu une seconde fois le 23 Mars 1715, 0 heure, à raison du passage de la Terre par la surface postérieure de l'anneau ; & qu'il a reparu une seconde fois le 12 Juillet 1715, 0 heure, à raison du passage de la Terre par la surface postérieure de l'anneau.

Par des calculs analogues à ceux de l'Article précédent, on parviendra aux résultats suivans.

Calcul de l'Observation du 12 Octobre 1714.

(348) Le 12 Octobre 1714, à midi, la longitude de la Terre vue du Soleil étoit de $0^s\ 18^d\ 45'\ 33''$. Suivant les nouvelles Tables de M. de la Lande, le lieu de Saturne dans son orbite étoit de $5^s\ 15^d\ 59'\ 9''$. Si l'on ôte de ce résultat, $4'\ 46''$ conformément à la remarque du §. 346, l'on aura pour le vrai lieu de Saturne dans son orbite $5^s\ 15^d\ 54'\ 23''$; & par conséquent la longitude héliocentrique de Saturne étoit de $5^s\ 15^d\ 52'\ 52''$; d'où l'on conclura

$$(1)\quad e + de = -0{,}47220 + 0{,}33496 \text{ cotang. (inclin. de l'anneau)} + 0{,}00297423\, d\,\text{(longitude du nœud de l'anneau)} - \frac{0{,}00009743}{\text{sin}^2\,\text{(inclin. de l'anneau)}}\, d\,\text{(inclinaison de l'anneau)} - 0{,}00033321\, d\,\text{(longitude Terre)}.$$

Calcul de l'Observation du 10 Février 1715.

(349) Le 10 Février 1715, à midi le lieu de Saturne dans son orbite

étoit suivant les Tables de M. de la Lande de $5^{s}\,20^{d}\,8'\,38''$. Si l'on ôte de ce résultat $4'\,46''$ conformément à la remarque du §. 346, l'on aura pour le vrai lieu de Saturne dans son orbite, $5^{s}\,20^{d}\,3'\,52''$, & par conséquent pour longitude héliocentrique de Saturne, $5^{s}\,20^{d}\,2'\,22''$; d'où l'on conclura

$$(1)\ e + de = 0,61990 - 0,35266 \text{ cotang. (inclinaison de l'anneau)} - 0,0027345 6\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} + \frac{0,00010258}{\sin^2 \text{(inclin. de l'anneau)}}\, d \text{ (inclinaison de l'anneau)} + 0,0008900\, d \text{ (longitude Terre)}.$$

Calcul de l'Observation du 23 Mars 1715.

(350) Le 23 Mars 1715, à midi, la longitude de la Terre vue du Soleil étoit de $9^{s}\,2^{d}\,14'\,2''$. Suivant les Tables de M. de la Lande, le lieu de Saturne dans son orbite étoit de $5^{s}\,21^{d}\,32'\,42$. Si l'on ôte de ce résultat $4'\,46''$ conformément à la remarque du §. 346, l'on aura pour le vrai lieu de Saturne dans son orbite $5^{s}\,21^{d}\,27'\,56''$; & pour longitude héliocentrique de Saturne $5^{s}\,21^{d}\,26'\,34''$; d'où l'on conclura

$$(1)\ e + de = 0,57656 - 0,35826 \text{ cotang (inclin. du plan de l'ann.)} - 0,00245365\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} + \frac{0,00010421}{\sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)}}\, d \text{ (inclinaison de l'anneau)} - 0,00018978\, d \text{ (longitude Terre)}.$$

Calcul de l'Observation du 12 Juillet 1715.

(351) Le 12 Juillet 1715, à midi, la longitude de la Terre vue du Soleil étoit de $9^{s}\,19^{d}\,20'\,40''$. Suivant les Tables de M. de la Lande, le lieu de Saturne dans son orbite étoit de $5^{s}\,25^{d}\,19'\,14''$. Si l'on ôte de ce résultat, $4'\,46''$ conformément à la remarque du §. 346, l'on aura pour le vrai lieu de Saturne dans son orbite, $5^{s}\,25^{d}\,14'\,18''$, & pour longitude héliocentrique de cette Planete $5^{s}\,25^{d}\,13'\,9''$, d'où l'on conclura

$$(1)\ e + de = 0,62163 - 0,37232 \text{ cotang (incl. du plan de l'anneau)} - 0,00288161\, d \text{ (longitude du nœud de l'anneau)} + \frac{0,00010830}{\sin^2 \text{(inclinaison du plan de l'anneau)}}\, d \text{ (inclinaison de l'anneau)} + 0,00025066\, d \text{ (longitude Terre)}.$$

Résultat des équations précédentes.

(352) Si l'on combine les équations précédentes, ainsi que l'on a

a combiné les équations du §. 336, & que l'on nomme

d (longitude Terre 1), la valeur de d (longitude Terre) correspondante à l'Observation du 12 Octobre 1714 ;

d (longitude Terre 2), la valeur de d (longitude Terre) correspondante à l'Observation du 10 Février 1715 ;

d (longitude Terre 3), la valeur de d (longitude Terre) correspondante à l'Observation du 23 Mars 1715 ;

d (longitude Terre 4), la valeur de d (longitude Terre) correspondante à l'Observation du 12 Juillet 1715 ;

L'on parviendra aux résultats suivans ;

$$(1)\ \text{Tang (inclinaison du plan de l'anneau)} = \frac{3{,}438}{3{,}1859 + 0{,}002225\, d\,(\text{long. Terre 1}) - 0{,}017337\, d\,(\text{long. Terre 3}) - 0{,}021220\, d\,(\text{long. Terre 4})}.$$

$$(2)\ d\,(\text{longitude du nœud de l'anneau}) = 74',884. - 0{,}021\, d\,(\text{longitude Terre 1}) + 0{,}608\, d\,(\text{longitude Terre 3}) + 0{,}789\, d\,(\text{longitude Terre 4}).$$

$$(3)\ e + de = 0{,}06091 - 0{,}00017961\, d\,(\text{longitude Terre 1}) + 0{,}00012166\, d(\text{longit. Terre 3}) + 0{,}00027591\, d(\text{longit. Terre 4}).$$

$$(4)\ d(\text{longitude Terre 2}) = -311' - 0{,}118\, d\,(\text{longitude Terre 1}) - 0{,}029\, d\,(\text{longitude Terre 3}) + 2{,}832\, d\,(\text{longitude Terre 4}).$$

$$(5)\ d\,(\text{inclinaison du plan de l'anneau}) = 666' - 0{,}602\, d\,(\text{longitude Terre 1}) + 4{,}688\, d\,(\text{longitude Terre 3}) + 5{,}738\, d\,(\text{longitude Terre 4}).$$

(353) Si dans l'équation (1) du §. précédent l'on fait d (longitude Terre 1) = 0 ; d (longitude Terre 3) = 0 ; d (longitude Terre 4) = 0 ; l'on conclura

Inclinaison de l'anneau = $47^d\ 10'\ 47''$.

Cette inclinaison est trop différente de celle que l'on connoît, pour ne pas être convaincu que les instans hypothétiques des disparitions & des réapparitions de l'anneau du §. 347, ne sont pas exacts.

Supposons maintenant que l'on veuille partir des élémens hypothétiques des §. 346 & 347, & que l'on cherche à déterminer les erreurs des instans des Observations hypothétiques dans cette supposition ; comme dans les équations du §. 352, il faudra faire d (longitude du nœud de l'anneau) = 0 ; $e + de = 0$; d (inclinaison du plan de l'anneau) = 0, l'on aura

$$(1)\ 74',884 - 0{,}021\, d\,(\text{longitude Terre 1}) + 0{,}608\, d\,(\text{longitude Terre 3}) + 0{,}789\, d\,(\text{longitude Terre 4}) = 0;$$

$$(2)\ 0{,}06091 - 0{,}000{,}7961\, d\,(\text{longitude Terre 1}) + 0{,}00012166\, d\,(\text{longitude Terre 3}) + 0{,}00027591\, d\,(\text{longitude Terre 4}) = 0;$$

$$(3)\ 666' - 0{,}602\, d\,(\text{longitude Terre 1}) + 4{,}688\, d\,(\text{longitude Terre 3}) + 5{,}738\, d\,(\text{longitude Terre 4}) = 0.$$

De ces équations l'on tire

d (longitude Terre 1) $= 234'$
d (longitude Terre 3) $= -61',5$
d (longitude Terre 4) $= -41',3$.

On voit par là, que pour que les élémens hypothétiques des §. 346 & 347 eussent satisfait aux Observations, il auroit fallu que la premiere disparition de l'anneau fût arrivée le 15 Octobre 1714, 22 heures ; que la seconde disparition fût arrivée le 22 Mars 1715, 0 heure, & que la troisieme réapparition fût arrivée le 11 Juillet 1715, 8 heures.

Rapprochement des résultats, aux Observations faites par M. Maraldi, en 1714 & 1715.

(354) Les conclusions précédentes m'ont fait examiner plus attentivement les Observations faites par M. Maraldi, en 1714 & 1715 ; & il m'a semblé que toutes les réflexions que le calcul a fait naître, ne sont point contraires au texte des Observations. La disparition du 15 Octobre 1714, 22 heures, est d'abord conforme à la note communiquée par M. Cassini d'après laquelle il paroît que M. Maraldi a cru voir encore l'anneau le 16 Octobre au matin. Je penserois donc que dans les équations précédentes, on peut, sans s'écarter de la vérité, supposer d (longitude Terre 1) $= 234'$.

Relativement à l'Observation du 23 Mars 1715, M. Maraldi rapporte dans son Mémoire, que le 21 Mars on commença à voir difficilement le anses ; que le 22 on ne vit plus que la trace foible d'une anse du côté d'occident ; & qu'enfin le 23, l'anse occidentale ne paroissoit plus. M. Maraldi observoit le matin. Dans mes calculs, j'ai supposé que l'anneau avoit disparu le 23 Mars, 0 heure, c'est-à-dire, le 23 Mars à midi. On ne fait donc aucune violence au texte, en faisant dans les équations, d (longitude Terre 3) $= -60'$.

Relativement à l'Observation du 12 Juillet 1715, M. Maraldi assure que le 11 Juillet, Saturne a paru rond ; mais que le 12 au soir, il avoit repris ses deux anses. Cette réapparition des deux anses prouve que le moment de l'Observation n'étoit pas celui de la véritable réapparition de l'anneau ; car nous avons vu que le commencement de la réapparition se fait toujours par une seule anse. Ce Phénomene est constaté par les autres observations de M. Maraldi. D'ailleurs on étoit alors dans les plus longs jours de l'Eté, & l'on ne pouvoit observer Saturne que pendant une heure environ sur vingt-quatre. Toutes ces raisons réunies me font croire que l'on peut aussi supposer d (longitude Terre 4) $= -41'$, sans faire violence au texte.

Remarques sur la bande obscure vue par M. Maraldi sur le disque de Saturne, en 1714 & 1715.

(355) J'ai cru que l'on verroit avec plaisir, la remarque suivante, relativement à la bande obscure, vue par M. Maraldi sur le disque de Saturne, après la disparition entiere de l'anneau. Suivant cet Astronome, cette bande commença à être vue en Octobre 1714, aussitôt après la disparition de l'anneau. Elle étoit d'abord fort mince; elle se dilata insensiblement en Octobre, en Novembre, & augmenta jusqu'à la fin de Décembre 1714. Ensuite elle diminua en Janvier 1715; elle étoit encore sensible le 1er. Février; elle diminua enfin & devint presqu'invisible le 23 Mars. Après le 23 Mars, jour auquel les anses disparurent, la bande noire recommença à paroître d'une maniere plus sensible. Elle se dilata jusqu'au 17 Mai. Ensuite elle diminua, quoiqu'on la vît encore pendant tout le mois de Juin. Mais au commencement de Juillet, lorsque les anses parurent de nouveau, elle étoit fort mince. M. Maraldi remarque que la cause de cette bande obscure, est une espece d'Eclipse du globe de Saturne, faite à notre égard, par la partie obscure de l'anneau qui se projete sur le globe de Saturne.

Il n'y a rien à ajouter à cette explication. Je ne puis cependant m'empêcher de remarquer combien les Phénomenes observés sont cohérens avec les différentes réflexions répandues dans cet Ouvrage. En effet, si de la Terre on mene une ligne droite au centre de Saturne, le plan sur lequel Saturne se projette relativement à nous, n'est autre chose que le plan perpendiculaire à cette droite. Nous avons donné l'expression de l'élévation de la Terre, au-dessus du plan central de l'anneau de Saturne, élévation qui est égale à l'angle que forme la droite menée de la Terre à Saturne, avec le plan de l'anneau. Or il est évident que cette élévation est le complément de l'angle formé par le plan de l'anneau & par le plan sur lequel Saturne se projette, relativement à nous. Si l'on imagine la projection de l'anneau sur ce plan (c'est celle qui forme l'Eclipse dont on vient de parler), cette projection sera évidemment une Ellipse dont le grand axe sera égal au diametre de l'anneau, & dont le petit axe sera égal au même diametre, multiplié par le cosinus de l'élévation de l'anneau au-dessus du plan de projection, c'est-à-dire, par le sinus de l'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau. Lorsque cette élévation est nulle, le petit axe de l'Ellipse est nulle; la bande obscure est parvenue à son *minimum*; elle est égale à l'épaisseur de l'anneau. A mesure que la Terre s'éleve au-dessus du plan de l'anneau, le petit axe augmente à proportion.

Il suit de là que le *maximum* du petit axe de cette Ellipse, dépend du *maximum* d'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau. Il dépend donc du *maximum* de la distance interceptée sur l'Ecliptique, entre le plan central de l'anneau & le plan parallele dans lequel

ſe trouve la Terre à un inſtant quelconque. Mais nous avons vu que, relativement au nœud boréal de l'anneau (c'eſt celui qui a eu lieu en 1715) le *maximum* de diſtance de ces deux plans, répond à l'inſtant où la Terre eſt éloignée de $18^d\ 19'$ & de $161^d\ 41'$, du point où l'anneau eſt tangent à l'orbite terreſtre, c'eſt-à-dire, de $2^f\ 17^d\ 5'$. Le *maximum* de grandeur du petit axe de l'Ellipſe répond donc à $3^f\ 5^d\ 24'$, & à $7^f\ 28^d\ 46'$ de longitude de la Terre ; ou ce qui revient au même, à $9^f\ 5^d\ 24'$, & à $1^f\ 28^d\ 46'$ de longitude du Soleil. Ces *maxima* ont donc lieu le 26 Décembre & le 19 Mai.

Je ne m'étendrai point ici pour faire voir l'accord des calculs avec les Obſervations. J'obſerverai ſeulement qu'il eût été à deſirer que M. Maraldi eût meſuré l'épaiſſeur de la bande obſcure, le jour des diſparitions & des réapparitions de l'anneau. Cette Obſervation, s'il eût été poſſible de la bien faire, auroit pu déterminer la véritable épaiſſeur de l'anneau de Saturne. On peut objecter contre cette derniere méthode, que l'inſtant du paſſage de la Terre par le plan de l'anneau eſt fort difficile à ſaiſir ; que la partie du diſque de Saturne éclipſée par l'anneau, eſt infiniment peu ſenſible dans ce cas, ainſi que M. Maraldi l'a conſtaté ; que d'ailleurs ſi l'anneau étoit encore en partie viſible à cet inſtant, par la lumiere que réfléchiroit ſon tranchant, le diametre de l'anneau que l'on concluroit, en ſeroit d'autant diminué. C'eſt aux Aſtronomes à prononcer & ſur la méthode & ſur les objections que l'on peut propoſer contr'elle.

Je terminerai ces remarques, en obſervant qu'il pourroit arriver par la ſuite des tems, que l'on ne perdît jamais de vue l'anneau de Saturne. En effet, quelque petite que l'on ſuppoſe ſon épaiſſeur, elle n'eſt pas nulle, & l'on peut regarder ſon tranchant, comme terminé par une ſuite de globules, dont les diametres ſont très-petits. Il pourroit donc en être de cet anneau, comme de pluſieurs des Satellites de Saturne, qui ne ſont viſibles qu'avec les plus forts inſtrumens ; & il eſt poſſible, lorſque les lunettes ſeront perfectionnées, que ſon épaiſſeur, quelque petite qu'on la ſuppoſe, réfléchiſſe aſſez de lumiere pour être toujours apperçue.

Remarques ſur le choix des Obſervations.

(356) Les calculs auxquels je viens de me livrer, m'ont appris qu'il n'eſt pas indifférent de comparer entr'elles, de certaines Obſervations préférablement à d'autres ; & que dans le nombre de ces Obſervations, il y en a quelques-unes qui demandent une plus grande préciſion, lorſqu'on les combine dans le calcul. En général, on doit éviter de comparer des Obſervations faites toutes deux avant ou toutes deux après le paſſage du plan de l'anneau par le Soleil ; ou plutôt, l'on ne doit

doit comparer de pareilles Obfervations, qu'autant qu'elles font exactes. La raifon eft tirée de la nature de l'élimination ; & pour peu que l'on réfléchiffe fur les calculs que nous avons mis fous les yeux du Lecteur, on verra que les coëficiens des erreurs des Obfervations font, toutes chofes égales, beaucoup plus grands dans ce cas, que fi l'on avoit comparé des Obfervations faites l'une avant & l'autre après le paffage du plan de l'anneau par le Soleil. Au refte je ne prétends point exclure toute comparaifon entre ces Obfervations ; mon but eft feulement d'avertir qu'elles ne doivent être comparées qu'autant qu'elles font exactes.

D'après la remarque du paragraphe précédent ; dans la durée des tems que nous avons embraffée, celles des Obfervations qui demanderont à être faites avec le plus d'exactitude, feront celles des 5 Mai & 24 Août 1789 ; des 23 Avril & 20 Juin 1833 ; des 27 Avril & 7 Septembre 1848 ; des 2 Décembre 1861 & 24 Janvier 1862.

ARTICLE III.

Application des formules aux Obfervations faites en 1671.

(357) Nous avons remarqué (§. 280), que les Obfervations faites en 1671, ne font pas auffi complettes que celles faites en 1715 & 1774. On peut voir dans ce paragraphe, les raifons qui ont fervi de fondement à cette affertion. Nous en avons conclu qu'il ne faudroit pas déranger des conféquences établies fur des Obfervations plus précifes, parce qu'elles ne fatisferoient pas avec la dernière rigueur aux Obfervations de 1671. Quoi qu'il en foit, on ne fera pas fâché de voir ici une difcuffion fommaire de ces Obfervations. Les voici telles qu'elles font rapportées foit par M. Maraldi, dans fon Mémoire fur l'anneau de Saturne publié en 1715, foit par M. Huyghens, dans le dixieme Volume des anciens Mémoires de l'Académie.

Détail des Obfervations faites par Dominique Caffini en 1671.

(358) Voici ce que M. Maraldi rapporte de ces Obfervations.

« M. Caffini commença de voir Saturne rond & fans anfes, l'an 1671
» vers la fin de Mai, auffitôt qu'il le put obferver après fa fortie des
» rayons du Soleil ; & il continua de le voir fans anfes, jufqu'au 13
» Août de la même année, pendant qu'il parcourut le dix-neuvieme
» degré des Poiffons.... Durant les mois de Juin, Juillet & Août,
» que les anfes furent invifibles, la furface de l'anneau étoit fi fort
» éclairée par le Soleil, qu'après que Saturne eût rétrogradé d'un de-
» gré, elles recommencerent à paroître ; ce qui arriva le 14 Août.
» Elles continuerent d'être vifibles pendant quatre mois, c'eft-à-dire,

» jufqu'au 13 Décembre, que l'anneau difparut encore ; & ne fut plus » enfuite apperçu pendant tout le tems que Saturne fut vifible avant » fon entrée dans les rayons du Soleil.... Vers le tems des difparitions & des réapparitions de l'anneau, M. Caffini a remarqué que » l'anfe orientale de l'anneau étoit plus apparente que l'occidentale, » quoique cette anfe ait toujours difparu la premiere.

Voici maintenant ce que M. Huyghens rapporte de ces mêmes Obfervations.

« L'an 1671 Saturne parut rond, fans bras ni anfes, comme je » l'avois prédit en 1657 ; quoique cela foit arrivé deux mois plutôt » que je ne m'y étois attendu, fçavoir dès la fin du mois de Mai. On » apperçut enfuite une interruption de la figure ronde, que je n'avois » pas prévue ; & il m'eût été bien difficile de le faire. Mais auffitôt » que j'appris que les bras étoient revenus, ce que M. Caffini obferva » s'être fait le 11 Août, je dis qu'affurément Saturne les reperdroit » dans peu ; ce qui s'eft trouvé véritable. Car dès le 4 Novembre les » bras de Saturne étoient fi obfcurs, que j'étois en doute s'ils paroiffoient encore, quoique M. Caffini affure les avoir apperçus pour la » derniere fois le 13 du mois de Décembre fuivant ; après quoi la » figure ronde a continué jufqu'à ce que Saturne fe foit caché dans les » rayons du Soleil.

(359) Ce que M. Huyghens rapporte des Obfervations de 1671, peut faire connoître quel étoit à cette époque, l'état des connoiffances aftronomiques, relativement à l'anneau de Saturne. M. Huyghens avoit développé la véritable théorie de fes difparitions & de fes réapparitions périodiques ; nous voyons cependant combien il étoit encore éloigné de connoître avec précifion, les véritables élémens, puifqu'il ne fe doutoit pas qu'il dût y avoir cette année là, une interruption de la phafe ronde. Quant aux Obfervations de M. Caffini, j'ai déja remarqué qu'elles n'étoient point completes. La derniere réapparition de l'anneau, celle du commencement de Février 1672, n'a point été obfervée, par l'impoffibilité fans doute, de faire cette Obfervation ; Saturne fe plongeoit alors dans les rayons du Soleil. J'ai fait voir que l'Obfervation de la fin de Mai 1671 manquoit d'une vérification qui pouvoit feule en affurer l'exactitude ; qu'à la vérité M. Caffini avoit vu Saturne fans anfes, la premiere fois qu'il avoit obfervé cette Planete depuis fa fortie des rayons du Soleil, mais que cette Obfervation ne conftatoit point à quelle époque précife les anfes avoient difparu, puifqu'il eft très-poffible que Saturne n'ait point été obfervé le jour même de la difparition de l'anneau. Quant à l'Obfervation du 11 Août, j'ai fait voir que l'incertitude des élémens a influé fur l'Obfervation.

Remarques ſur les Obſervations de l'anneau faites par Caſſini en 1671.

(360) La petite incertitude que l'on péut remarquer entre la maniere dont la diſparition de l'anneau de Saturne du commencement de Décembre 1671, eſt rapportée par M. Maraldi dans ſon Mémoire publié en 1715, diſparition qu'il fixe au 8, puis au 13 Décembre 1671, m'avoit fait deſirer de conſulter l'Obſervation originale de M. Caſſini. Voici ce que l'on trouve dans les Regiſtres de l'Obſervatoire.

Ces Regiſtres commencent au 14 Septembre 1671, jour auquel Dominique Caſſini prit poſſeſſion de l'Obſervatoire. Saturne fut obſervé avec ſes anſes tout le mois de Septembre, d'Octobre & de Novembre. Le tems fut couvert depuis le commencement de Décembre, juſqu'au 8 du même mois. Sous cette date on lit la note ſuivante.

» Le 8 Décembre à 6 heures 12′ 18″ du ſoir, Saturne a paru rond avec » un petit reſte de ſes anſes ».

On ne voit point d'Obſervations de Saturne ſous la date des 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15 Décembre. On lit ſous la date du 16.

« Le 16 Décembre à ſix heures du ſoir, Saturne a paru entiérement » rond. »

On voit enſuite que Saturne a été obſervé ſans anſes, juſqu'au 25 Janvier 1672, jour de la derniere Obſervation qui a été faite de cette Planete.

On trouve dans les mêmes Regiſtres, ſous la date du 6 Novembre 1671, la note ſuivante qui conſtate l'époque préciſe de la découverte du cinquieme Satellite de Saturne.

« Le 6 Novembre 1671, à 7 heures 40′, j'ai vu Saturne avec ſes » anſes fort étroites. Il n'eſt plus douteux que la petite Etoile que » j'avois apperçue le 25 Octobre précédent, dans une ligne droite avec » les anſes, ne ſoit un nouveau Satellite. Rendons graces à Dieu » de cette découverte ».

On voit par les mêmes Regiſtres, qu'il regnoit une grande intimité entre Huyghens & Caſſini, & qu'ils avoient ſouvent des conférences ſur l'anneau de Saturne. Il y a donc grande apparence que les Obſervations publiées par Huyghens, ſont exactes; qu'il les tenoit de Caſſini, & qu'on doit y avoir la plus grande confiance, quoiqu'elles ne ſoient pas toutes conſignées dans les Regiſtres de l'Obſervatoire. Cette remarque explique auſſi la petite différence qui a pu frapper dans le Mémoire de M. Maraldi, ſur les deux époques qu'il donne à la diſparition de l'anneau de Saturne du commencement de Décembre 1671. Lorſqu'il fixe cette diſparition au 8 Décembre, c'eſt ſur les

Regiſtres de l'Obſervatoire qu'il ſe fonde ; lorſqu'il lui donne la date du 13 Décembre, c'eſt d'après la notice de M. Huyghens. Au reſte il n'eſt point queſtion dans ces Regiſtres, des Obſervations de la fin de Mai & du commencement d'Août 1671. Elles ſont antérieures à l'établiſſement de Caſſini à l'Obſervatoire.

Elémens hypothétiques dont on ſera uſage, & calcul des Obſervations faites en 1671.

(361) Dans le calcul des Obſervations faites en 1671, je ſuppoſerai que les lieux du Soleil donnés par les Tables de M. de la Caille, ſont exacts. Je ſuppoſerai pareillement que les dimenſions de l'orbite de Saturne, telles qu'elles ſe trouvent dans la nouvelle édition de l'Aſtronomie de M. de la Lande, ſont exactes ; mais je ſuppoſerai en même tems qu'il réſulte de l'Obſervation de l'oppoſition de Saturne du 8 Septembre 1671, que les Tables de Saturne inſérées dans la nouvelle édition de l'Aſtronomie de M. de la Lande ſont cette planete trop avancée de 18′ 54″ ; & que, par conſéquent, ſi l'on veut avoir par ces Tables, le vrai lieu de Saturne, du moins pour l'époque dont il s'agit, il faut retrancher 18′ 54″ du lieu calculé. En un mot je partirai des élémens ſuivans.

Lieu du périhélie de Saturne dans ſon orbite	$2^s 27^d 56' 0''$.
Longitude du nœud aſcendant de l'orbite de Saturne	3 20 51 47
Longitude du nœud de l'anneau ſur l'écliptique	5 15 40 0
Longitude du périhélie de la Terre vue du Soleil	3 9 11 49
Inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'écliptique	31 20 0
Inclinaiſon du plan de l'orbite de Saturne ſur l'écliptique . . .	2 30 20

On n'oubliera point qu'en 1671, les Phénomenes ont eu lieu dans le nœud auſtral de l'anneau.

Je ſuppoſerai que l'anneau a diſparu une premiere fois le 31 Mai 1671, 0 heure, à raiſon du paſſage de la Terre par la ſurface antérieure de l'anneau ; qu'il a reparu une premiere fois le 11 Août 1671, 0 heure, à raiſon du paſſage de la Terre par la même ſurface ; & qu'enfin il a diſparu une ſeconde fois le 13 Décembre, 0 heure, à raiſon du paſſage de l'anneau par le centre du Soleil.

Calcul de l'Obſervation du 31 Mai 1671.

(362) Le 31 Mai 1671, à midi, la longitude de la Terre vue du Soleil, étoit de $8^s 9^d 52' 24''$. D'après les Tables inſérées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, le lieu de Saturne dans ſon orbite étoit alors de $11^s 13^d 7' 53''$ qu'il faut diminuer (§. 361) de 18′ 54″ ; ce qui donne $11^s 12^d 48' 59''$ pour le vrai lieu de Saturne dans ſon orbite ; & pour longitude héliocentrique de Saturne, $11^s 12^d 47' 22''$; d'où l'on conclura

(1) $e + de = -0{,}52547 + 0{,}33221$ cotang (inclin. du plan de l'anneau)

$+ 0{,}00283145\, d$ (longitude du nœud de l'anneau)

$- \frac{0{,}00009685}{\text{sin}^2\ (\text{inclinaison du plan de l'anneau})}\, d$ (inclinaison de l'anneau)

$- 0{,}00012049\, d$ (longitude Terre).

Ou, en supposant l'inclinaison du plan de l'anneau de $31^d\ 20'$,

(2) $e + de = - 0{,}02022 + 0{,}00283145\, d$ (longit. du nœud de l'anneau) $- 0{,}00035722\, d$ (inclinaison de l'anneau) $- 0{,}00012049\, d$ (longit. Terre).

On voit par ces calculs, que si l'on entend par la fin de Mai, le 31 Mai, 0 heure, l'Observation de Cassini, telle qu'elle est rapportée par Huyghens & Maraldi, ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité; & que même elle peut passer pour très-exacte. Mais on peut objecter contre cette Observation, 1°. la grande latitude des expressions qui ne fixent pas plutôt le 31 Mai, que le 30 ou le 29 du même mois; 2°. la circonstance que Saturne a été vu sans anses, la premiere fois qu'il a été observé depuis sa sortie des rayons du Soleil, circonstance qui ne fixe pas l'instant précis de la disparition de l'anneau.

Calcul de l'Observation du 11 Août 1671.

(363) Le 11 Août 1671, à midi, la longitude de la Terre vue du Soleil étoit de $10^s\ 18^d\ 55'\ 22''$. D'après les Tables insérées dans l'Astronomie de M. de la Lande, le lieu de Saturne dans son orbite étoit alors de $11^s\ 15^d\ 29'\ 27''$, qu'il faut diminuer (§. 361) de $18'\ 54''$; ce qui donne $11^s\ 15^d\ 10'\ 33''$ pour le vrai lieu de Saturne dans son orbite; & $11^s\ 15^d\ 9'\ 3''$ pour longitude héliocentrique de Saturne; d'où l'on conclura

(1) $e + de = - 0{,}36883 + 0{,}34187$ cotang (inclin. du plan de l'anneau)

$+ 0{,}00253568\, d$ (longitude du nœud de l'anneau)

$- \frac{0{,}00009944}{\text{sin}^2\ (\text{inclinaison du plan de l'anneau})}\, d$ (inclinaison de l'anneau)

$+ 0{,}00017228\, d$ (longitude Terre).

Ou, en supposant l'inclinaison du plan de l'anneau de $31^d\ 20'$,

(2) $e + de = 0{,}19272 + 0{,}00253568\, d$ (longitude du nœud de l'anneau) $- 0{,}00036761\, d$ (inclinaison de l'anneau) $+ 0{,}00017228\, d$ (longit. Terre).

Ces calculs font voir que le 11 Août 1671, il y avoit déja quelque tems que l'anneau avoit reparu. Comme Cassini ne s'attendoit point à cette réapparition, il n'est pas étonnant que l'instant précis du phénomene qu'il n'avoit pu prévoir, lui ait échappé.

Calcul de l'Observation du 13 Décembre 1671.

(364) Le 13 Décembre 1671, à midi, le lieu de Saturne dans son orbite étoit, d'après les Tables de M. de la Lande, de $11^s\ 19^d\ 34'\ 47''$

qu'il faut diminuer (§. 361) de 18′ 54″; ce qui par conſéquent donne pour le vrai lieu de Saturne dans ſon orbite, $11^s\ 19^d\ 15'\ 53''$; & pour longitude héliocentrique de cette Planete, $11^s\ 19^d\ 14'\ 28''$; d'où l'on conclura

$$(3)\ e + de = -0{,}59711 + 0{,}3571 \text{ cotang (inclin. du plan de l'anneau)} + 0{,}00278214\, d\text{(longitude du nœud de l'anneau)} - \frac{0{,}00010387}{\text{fin}^2\text{ (inclinaiſon du plan de l'anneau)}}\, d\text{(inclinaiſon du plan de l'anneau)} - 0{,}00009068\, d\text{(longitude Terre)}.$$

Ou, en ſuppoſant l'inclinaiſon du plan de l'anneau de $31^d\ 20'$,

$$(2)\ e + de = -0{,}01056 + 0{,}00278214\, d\text{(longitude du nœud de l'anneau)} - 0{,}00038398\, d\text{(inclinaiſ. de l'anneau)} - 0{,}00009068\, d\text{(longit. Terre)}.$$

Ces calculs font voir que l'Obſervation de Caſſini du 13 Décembre 1671, a été faite avec exactitude.

ARTICLE IV.

Remarque ſur les Calculs des Articles précédens.

(365) Je n'ai point fait uſage, dans les recherches précédentes, des remarques de l'Article troiſieme du cinquieme Chapitre, relativement au nouvel élément dont j'ai parlé dans cet Article, & qui dépend de l'élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau, aux inſtans de ſes diſparitions & de ſes réapparitions. J'ai penſé que l'incertitude des Obſervations ne comportoit pas ce degré d'exactitude dans les calculs. Si cependant l'on vouloit avoir égard à cet élément, l'on auroit les réſultats ſuivans.

Obſervations de 1714 & 1715.

$$(1)\ \text{Tangente (inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'écliptique)} = \frac{1{,}137}{17{,}374 - 0{,}0474\, d\text{(long. Terre 1)} + 0{,}0171\, d\text{(long. Terre 3)} + 0{,}0672\, d\text{(long. Terre 4)}}.$$

$$(2)\ d\text{(longit. du nœud de l'ann.)} = 6'{,}419 + 0{,}1326\, d\text{(inclin. de l'ann.)} + 0{,}0271\, d\text{(longitude Terre 3)} + 0{,}1174\, d\text{(longitude. Terre 4)}.$$

$$(3)\ d\text{(longit. Terre 1)} = 327'{,}132 + 0{,}02595\, d\text{(inclin. de l'anneau)} + 0{,}5717\, d\text{(longitude Terre 3)} + 1{,}4177\text{ (longitude Terre 4)}.$$

$$(4)\ e4 + de4 = -0{,}00843 + 0{,}00002189\, d\text{(inclinaiſon de l'ann.)} - 0{,}00007809\, d\text{(longit. Terre 3)} - 0{,}00008774\, d\text{(long. Terre 4)}.$$

$$(5)\ e1 + de = 1{,}4051\ (e4 + de4).$$

$$(6)\ e3 + de3 = 3{,}2818\ (e4 + de4)$$

Obſervations de 1774 & 1775.

(7) Tangente (inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'écliptique) =

$$\frac{3{,}780}{3{,}791 + 0{,}0432\,d(\text{long. Terre }1) - 0{,}0508\,d(\text{long. Terre }3) - 0{,}0778\,d(\text{long. Terre }4)}.$$

(8) d(longit. du nœud de l'ann.) $= -7',684 + 0{,}13086\,d$(inclin. de l'ann.) $+ 0{,}0508\,d$(longitude Terre 3) $+ 0{,}1229\,d$(longitude Terre 4).

(9) d(longitude Terre 1) $= 56',101 - 0{,}09234\,d$(inclinaiſon de l'anneau) $+ 1{,}1787\,d$(longitude Terre 3) $+ 1{,}8051\,d$(longitude Terre 4).

(10) $e4 + de4 = 0{,}01589 + 0{,}00003271\,d$(inclinaiſon de l'anneau) $- 0{,}00014373\,d$(longit. Terre 3) $- 0{,}00014544\,d$(longit. Terre 4).

(11) $e1 + de1 = 1{,}8111\,(e4 + de4)$;

(12) $e3 + de3 = 2{,}0817\,(e4 + de4)$.

De l'uſage des équations du paragraphe 365.

(366) Les équations du §. précédent préſentent un uſage intéreſſant; elles peuvent ſervir à déterminer quels jours les diſparitions & les réapparitions de l'anneau auroient dû avoir lieu afin de ſatisfaire à des élémens donnés. Il ne s'agit que de donner à d (inclinaiſon du plan de l'anneau), d (longitude du nœud de l'anneau), $e + de$ les valeurs convenables, & d'ordonner les équations, par rapport à d (longitude Terre 1), d (longitude Terre 3), d (longitude Terre 4)

Parmi les différens cas que l'on peut choiſir, ſi l'on examine celui où l'on feroit d (inclinaiſon de l'anneau) $= 0$; d (longitude du nœud de l'anneau $= 0$; $e4 + de4 = 0$, l'on aura pour l'époque de 1714 & 1715,

d (longitude Terre 1) $= 234'$;
d (longitude Terre 3) $= -62'$;
d (longitude Terre 4) $= -40'$;

L'on aura pareillement pour l'époque de 1773 & 1774,

d (longitude Terre 1) $= 205'$;
d (longitude Terre 3) $= 81'$;
d (longitude Terre 4) $= 29'$;

On peut remarquer la conformité de ces ſolutions avec celles des paragraphes 341 & 353.

Si dans les équations (1) & (7) du §. précédent, l'on ſuppoſe d (longitude Terre 1) $= 0$, d (longitude Terre 3) $= 0$, d (longit. Terre 4) $= 0$, l'on conclura de l'équation (1), inclinaiſon de l'anneau $= 3^d\,45'\,10''$; & de l'équation (7), inclinaiſon de l'anneau $= 44^d\,55'$. Ces réſultats ſont trop différens entr'eux, & de ce que l'on connoît ſur l'inclinaiſon du plan de l'anneau, pour ne pas conclure que les équations (1) & (7), du §. 365, & conſéquemment les Obſervations qu'elles repréſentent, ne ſont nullement propres à déterminer l'inclinaiſon de l'anneau.

CHAPITRE SEPTIEME.

Récapitulation des recherches précédentes, relativement à la détermination des élémens de l'anneau de Saturne; & de quelques questions relatives à cet anneau.

Je me propose, dans ce Chapitre, de donner une récapitulation des recherches précédentes, relativement à la détermination des élémens de l'anneau de Saturne; je proposerai ensuite quelques questions relatives à cet anneau.

ARTICLE PREMIER.

De l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'Ecliptique; de la longitude du nœud de l'anneau, & de son épaisseur.

(367) Nous avons dit que relativement à l'anneau de Saturne, on peut se proposer les questions suivantes.

Etant donnés pour une certaine époque, les élémens de l'anneau (c'est sous ce nom que j'ai désigné la longitude du nœud de l'anneau sur l'Écliptique, son inclinaison sur le plan de l'Ecliptique, son épaisseur soit réelle, soit hypothétique), & étant connus d'ailleurs les élémens des orbites de la Terre & de Saturne, on peut demander quels seront les Phénomenes de la disparition & de la réapparition de l'anneau à une certaine époque.

Etant donnés les Phénomenes observés à une certaine époque, on peut demander quels étoient alors les élémens de l'anneau.

On peut, en comparant les élémens de l'anneau à différentes époques, demander si le nœud répond toujours aux mêmes Etoiles, de sorte qu'il n'ait de mouvemens, que ceux de précession, de nutation & d'aberration; ou s'il a réellement des mouvemens qui lui soient propres.

On peut demander si son inclinaison sur l'Écliptique est constante, ou si elle souffre des altérations.

On peut demander enfin quelle est la loi de ces différens mouvemens.

Telles sont en général les questions que j'ai promis d'éclaircir autant qu'il seroit en moi.

Sur la premiere question qui consiste à déterminer les disparitions & les réapparitions de l'anneau, lorsqu'on connoît les élémens, il me semble que l'on ne peut rien ajouter à ce que j'ai dit à ce sujet. Quant aux autres questions, je n'ose pas me flatter que les Observations faites

jusqu'à

juſqu'à l'époque actuelle m'aient mis dans le cas de ſatisfaire auſſi complettement la curioſité du Lecteur. Voici au ſurplus ce qui m'a paru le plus plauſible relativement à ces queſtions.

Inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'Écliptique.

(368) Les phénomenes de la diſparition & de la réapparition de l'anneau me paroiſſent par leur nature, peu propres à fixer d'une maniere irréfragable, l'inclinaiſon du plan de l'anneau ſur l'Écliptique. Les erreurs des inſtans des Obſervations ont une trop grande influence ſur les réſultats pour ne pas laiſſer des doutes à ce ſujet. Je croirois donc qu'il ſeroit plus à propos d'employer à cette détermination, le rapport meſuré des axes de l'anneau, lorſque la figure elliptique ſous laquelle il ſe projette à nos yeux, a ſa plus grande largeur ; c'eſt-à-dire, lorſque la longitude de Saturne eſt de $2^s\,17^d$ ou de $8^s\,17^d$. En général cependant il m'a paru que l'inclinaiſon de $31^d\,20'$, telle qu'on la ſuppoſe ordinairement, ſatisfait aſſez exactement aux Obſervations.

Longitude du nœud de l'anneau ſur l'Écliptique.

(369) Il me paroît auſſi que les longitudes du nœud de l'anneau ſur l'Écliptique données par le calcul, s'accordent aſſez bien avec les longitudes hypothétiques pour les deux époques que nous avons conſidérées, & je ne vois quant à préſent aucune raiſon pour changer ces élémens. Je crois donc que l'on peut ſuppoſer que la longitude du nœud de l'anneau ſur l'Écliptique étoit de $5^s\,16^d\,16'\,0''$ en 1715, & de $5^s\,17^d\,5'\,0''$ en 1774.

Au reſte, lorſque l'on connoîtra la longitude du nœud de l'anneau ſur l'Écliptique, ſon inclinaiſon ſur le plan de l'Écliptique, & l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne pareillement ſur l'Écliptique, on déterminera facilement le lieu du nœud de l'anneau ſur l'orbite de Saturne, & l'inclinaiſon de ſon plan ſur cette orbite. En effet ces différens élémens font partie d'un même triangle ſphérique dont un des côtés eſt la portion de l'Écliptique compriſe entre le nœud de l'orbite & le nœud de l'anneau ; le ſecond côté eſt la portion de l'orbite de Saturne compriſe entre le nœud de l'orbite ſur l'Écliptique, & le nœud de l'anneau ſur l'orbite ; & le troiſieme côté enfin eſt la portion du grand cercle compriſe entre le nœud de l'anneau ſur l'Écliptique, & le nœud de l'anneau ſur l'orbite.

Epaiſſeur de l'anneau.

(370) Il faut diſtinguer l'épaiſſeur réelle de l'anneau, de l'épaiſſeur hypothétique, ou ſi l'on veut, de l'élévation de la Terre au-deſſus du plan central de l'anneau, à l'inſtant des phénomenes. L'on ne connoît point l'épaiſſeur réelle de l'anneau ; on ſait ſeulement qu'elle eſt extrê-

mement petite, puiſque le tranchant de l'anneau ne réfléchit pas aſſez de lumiere pour l'empêcher de diſparoître, même avec les plus fortes lunettes. Nous avons indiqué (§. 331) une méthode pour meſurer cette épaiſſeur. Quant à l'épaiſſeur hypothétique, on doit ſentir qu'elle dépend beaucoup des lunettes employées aux Obſervations. D'ailleurs dans l'hypotheſe de l'Article III. du Chapitre cinquieme, cette épaiſſeur eſt variable, & dépend en partie de l'élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau. Quoi qu'il en ſoit, je ſuis tenté de croire qu'en 1715 & 1774, l'anneau n'a diſparu pour les fortes lunettes, que lorſque la Terre avoit déja une petite dépreſſion d'une ou deux minutes de degré au-deſſous du plan central de l'anneau. C'eſt au moins ce qui réſulte des Obſervations de MM. Meſſier & Tofino, faites en 1773 & 1774, & des Obſervations faites par M. Maraldi en 1714 & 1715, lorſque l'on applique à ces dernieres Obſervations, la note de M. Caſſini ; c'eſt-à-dire, lorſque l'on ſuppoſe que la premiere diſparition de l'anneau n'a eu lieu que le 16 Octobre 1714.

ARTICLE II.

Des changemens dans les élémens de l'anneau de Saturne.

(371) S'il n'a pas été poſſible de déterminer inconteſtablement les élémens de l'anneau, pour les époques de 1715 & 1774, on doit ſentir qu'il eſt impoſſible de répondre d'une maniere ſatisfaiſante ſur toutes les queſtions relatives aux changemens qu'ils peuvent éprouver. C'eſt au tems ſeul à décider ces queſtions, lorſqu'une longue ſuite de Siecles aura mis à portée de diſtinguer dans les différentes Obſervations, ce qui eſt relatif aux différentes cauſes qui peuvent y influer. Il me ſuffit, quant à préſent, d'avoir fait voir que les élémens de l'anneau adoptés par les Aſtronomes, ſont un des ſyſtêmes plauſibles que l'on peut conclure des Obſervations. C'eſt à nos deſcendans qu'il eſt réſervé d'éclaircir toutes ces queſtions. Nous avons profité des lumieres de ceux qui nous ont précédé ; nos deſcendans profiteront de nos travaux, ils y ajouteront leurs recherches particulieres, & la vérité ſera la récompenſe de tous ces efforts.

Déterminations relatives aux différentes années qui préſentent des diſparitions de l'anneau de Saturne depuis 1789 juſqu'en 1900.

(372) Pour faciliter autant qu'il eſt en moi l'uſage des formules de cet Ouvrage, j'ai cru devoir donner les élémens qui auront lieu dans les différentes années qui préſentent des diſparitions de l'anneau de Saturne, depuis 1789 juſqu'en 1900. Ces élémens ont été calculés, d'après les Tables inſérées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande.

Années.	LONGITUDE												Lieu du périhélie de Saturne dans ſon orbite.			
	Du nœud aſcendant de l'orbite de Saturne.				Du périhélie de la Terre.				Du nœud de l'anneau ſur l'Ecliptique.							
1790..	3^s	21^d	$51'$	$17''$	3^s	9^d	$21'$	$44''$	5^s	17^d	$19'$		3^s	0^d	$54'$	$30''$
1803..	3	21	57	47	3	9	35	56	5	17	29		3	1	14	0
1817..	3	22	5	47	3	9	53	24	5	17	43		3	1	38	0
1833..	3	21	12	47	3	10	8	41	5	17	54		3	1	59	0
1848..	3	22	20	17	3	10	25	3	5	18	7		3	2	21	30
1862..	3	22	27	17	3	10	40	20	5	18	18		3	2	42	30
1878..	3	12	35	17	3	10	57	48	5	18	32		3	3	6	30
1891..	3	22	42	17	3	11	13	5	5	18	43		3	3	27	30

(373) Dans la Table précédente nous avons ſuppoſé que le nœud de l'anneau ſur l'Ecliptique, répond toujours aux mêmes étoiles, & qu'il n'a de mouvement que celui de préceſſion. Il faudra avoir ſoin à chaque époque, de vérifier les Tables de Saturne, en comparant un lieu bien obſervé un jour quelconque pris dans cette année, avec le lieu conclu des Tables pour le même inſtant. On peut choiſir de préférence, le jour de l'oppoſition de Saturne. L'erreur pour ce jour particulier déterminera aſſez exactement l'erreur des Tables pour toute l'année. On pourra auſſi rectifier ces élémens, au moyen des recherches de M. de la Place ſur Saturne. Nous remarquerons enfin que les années qui ne préſentent qu'une réapparition & une diſparition de l'anneau, telles que les années 1803, 1819, 1878, 1891, ſont infiniment moins propres à avancer la théorie de l'anneau de Saturne, que les années qui préſentent deux diſparitions & deux réapparitions de l'anneau.

ARTICLE III.

Examen d'une queſtion intéreſſante, relativement à l'aptitude plus ou moins grande des deux ſurfaces de l'anneau, pour réfléchir la lumiere.

(374) Les Obſervations faites en 1714 & 1715, en 1773 & 1774, donnent lieu à une queſtion intéreſſante, relativement à l'aptitude plus ou moins grande des deux ſurfaces de l'anneau, à réfléchir la lumiere. En effet on peut demander par quelle raiſon les Obſervations des commencemens d'Octobre 1714 & 1773, laiſſent une incertitude de quatre ou cinq jours ſur les inſtans précis des diſparitions de l'anneau, tandis qu'on ne trouve aucun veſtige d'une incertitude auſſi marquée, dans les autres diſparitions & réapparitions de l'anneau. Il eſt d'abord difficile de révoquer le fait en doute; il ſuffit de jetter les yeux ſur les Obſervations, pour en être convaincu. Pour expliquer l'incertitude des Obſervations des 6 & 11 Octobre 1773, on a eu recours au peu d'élé-

vation de Saturne sur l'horizon, & aux vapeurs dont l'atmosphere étoit chargé, lorsque l'on a observé cette Planete, aux époques dont il s'agit. Ne pourroit-on pas objecter contre cette explication, que lorsque Saturne a été observé au commencement d'Octobre 1773, vers cinq heures & demi du matin, il étoit aussi élevé sur l'horizon, que lorsque M. Messier l'a observé en Juillet 1774, vers dix heures du soir. Dans ces deux cas, il étoit éloigné d'environ cinq heures, du Méridien. L'argument est encore plus fort pour l'Observation du 12 Juillet 1715, comparée à celle du 12 Octobre 1714. Ne pourroit-on pas ajouter qu'en Octobre 1714 & 1773, on étoit vers le terme du plus court Crépuscule, & qu'en Juillet 1715 & 1774, l'on étoit au contraire dans les plus longs Crépuscules ; qu'il n'est nullement certain que l'atmosphere soit plus pur en Eté qu'en Automne ; que d'ailleurs, quoique la Lune fût sur l'horizon lors des Observations du commencement d'Octobre 1773, cet Astre etoit en décours, & éloigné d'environ 80^{d} de Saturne.

(375) On a aussi attribué le Phénomene à une élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, plus grande en Juillet 1715 & 1774, qu'en Octobre 1714 & 1773. Cette explication paroît d'abord spécieuse. En effet l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau en Octobre 1714, étoit à l'élévation du Soleil au-dessus du même plan en Juillet 1715, comme 0,61334 est à 0,86179 ; en 1773 & 1774, les élévations correspondantes étoient dans le rapport de 0,51551 à 0,93366. D'abord il paroît certain que cette différence d'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, n'a jamais pu produire une différence de près de quatre jours entre les Observations. Si cette différence eût été de quelques heures, même d'une demi-journée, l'explication pourroit être plausible ; mais une incertitude de quatre jours ne s'expliquera jamais par-là. Je dis plus, d'autres faits astronomiques démentent cette explication. Au mois de Mars 1715, l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, étoit à l'élévation correspondante du mois d'Octobre 1714, comme 0,26264 est à 0,61334 ; en Avril 1774, & Octobre 1773, ces élévations étoient respectivement comme 0,44818 est à 0,51551. L'incertitude des Observations des 23 Mars 1715 & 3 Avril 1774, devroit donc être beaucoup plus grande, que celle des Observations des 12 Octobre 1714 & 6 Octobre 1773 ; ce qui est contraire à ce qui a été observé. Ajoutons à ces raisonnemens qu'en Octobre 1714 & 1773 la Terre & l'anneau alloient dans un sens différent, & que par conséquent leur mouvement respectif étoit égal à la somme de leurs mouvemens propres ; qu'en Mars 1715 & Avril 1774 au contraire, la Terre & l'anneau alloient dans le même sens, & que par conséquent leur mouvement respectif étoit égal à la différence de leurs mouvemens propres. Toutes ces raisons m'ont fait soupçonner une autre cause au Phénomene dont il s'agit.

(376) La disparition de l'anneau du commencement d'Octobre 1714, ainsi que celle du commencement d'Octobre 1773, ont eu lieu à raison du passage de la Terre par la surface antérieure de l'anneau ; les autres Phénomenes ont été occasionnés par le passage soit de la Terre, soit du Soleil par la surface postérieure de l'anneau. Seroit-il impossible que ces deux surfaces ne fussent pas également propres à réfléchir la lumiere? C'est une réflexion que j'ai cru devoir soumettre aux Astronomes, & dont la légitimité pourra se vérifier, par la comparaison des Observations faites dans le nœud austral & dans le nœud boréal de l'anneau ; puisqu'en effet la surface antérieure de l'anneau dans le premier cas, devient surface postérieure dans le second cas, & réciproquement. Au reste, ce n'est ici qu'une simple hypothese qui demande à être vérifiée.

ARTICLE IV.

De la raison pour laquelle vers les instans des disparitions de l'anneau, les bras se racourcissent & se séparent de la Planete.

(377) On a observé constamment que vers les instans des disparitions de l'anneau, les bras de l'anneau commencent par se racourcir & se séparer de la Planete, avant de disparoître entiérement. Je vais examiner sur quelles raisons physiques ce Phénomene peut être fondé.

On se rappellera que l'on a fait voir que si de la Terre on mene une ligne droite au centre de Saturne, le plan sur lequel Saturne & son anneau se projettent relativement à nous, est évidemment le plan perpendiculaire à cette droite. Nous avons donné (§. 287) l'expression de l'élévation de la Terre au-dessus du plan central de l'anneau ; élévation qui n'est autre chose que l'angle formé par la droite menée de la Terre à Saturne, avec le plan de l'anneau. Or il est évident que cette élévation est le complément de l'angle formé par le plan de l'anneau, & par le plan sur lequel Saturne & son anneau se projettent relativement à nous. Si donc l'on imagine la projection ortographique de Saturne & de l'anneau sur ce même plan, la projection du globe de Saturne sera évidemment un cercle ; & celles des deux limbes intérieurs & extérieurs de l'anneau, seront chacune une ellipse, dont les grands axes seront respectivement égaux aux diametres intérieurs & extérieurs de l'anneau, & dont les petits axes seront égaux aux grands axes, multipliés par le cosinus de l'élévation de la Terre au-dessus du plan de projection, c'est-à-dire, par le sinus de l'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau.

(378) On sait que le rayon du cercle intérieur de l'anneau de Saturne, est à celui du globe de la Planete, comme cinq est à trois ; & que le rayon du cercle extérieur de l'anneau est à celui du globe de cette Planete, comme sept est à trois.

Soit donc

r le rayon du globe de Saturne ;
r' le rayon du limbe intérieur de l'anneau ;
r'' le rayon du limbe extérieur de l'anneau ;
I' l'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau ;
x l'abscisse de la figure circulaire sous laquelle se projette le globe de Saturne ;
y l'ordonnée correspondante ;
x' l'abscisse de la figure elliptique sous laquelle se projette le bord intérieur de l'anneau ;
y' l'ordonnée correspondante ;
x'' l'abscisse de la figure elliptique sous laquelle se projette le bord extérieur de l'anneau ;
y'' l'ordonnée correspondante ;
1 le sinus total.

Fig. 11. Ces abscisses & ces ordonnées sont comptées, en partant du centre de Saturne ; & elles sont prises, l'une sur le grand axe SABC, & l'autre sur le petit axe SK des ellipses de projection de l'anneau. On aura

$$(1)\ x^2 + y^2 - r^2 = 0\,;$$
$$(2)\ x'^2 \sin^2 \mathrm{I}' + y'^2 - r'^2 \sin^2 \mathrm{I}' = 0\,;$$
$$(3)\ x''^2 \sin^2 \mathrm{I}' + y''^2 - r''^2 \sin^2 \mathrm{I}' = 0.$$

La premiere de ces équations est l'équation à la projection du globe de Saturne ; la seconde est l'équation à la projection du limbe intérieur de l'anneau ; la troisieme est l'équation à la projection du limbe extérieur. Ces équations vont servir à résoudre les questions proposées.

Des points par lesquels les bords de l'anneau de Saturne paroissent se joindre au globe de la Planete.

(379) Si l'on veut déterminer le point par lequel le bord intérieur de l'anneau paroît se joindre au globe de Saturne ; dans l'équation (2) du §. 378, on fera $x' = x$, $y' = y$; l'on aura,

$$(1)\ x = \pm \frac{\sqrt{(r^2 - r'^2 \sin^2 \mathrm{I}')}}{\operatorname{cosin} \mathrm{I}'}.$$

On aura de même, pour déterminer le point par lequel le bord extérieur de l'anneau paroît se joindre au globe de Saturne,

$$(2)\ x = \pm \frac{\sqrt{(r^2 - r''^2 \sin^2 \mathrm{I}')}}{\operatorname{cosin} \mathrm{I}'}.$$

(380) Comme ces dernieres valeurs deviennent respectivement imaginaires, lorsque $r^2 - r'^2 \sin^2 \mathrm{I}'$ & $r^2 - r''^2 \sin^2 \mathrm{I}'$ sont des quantités négatives, on voit que les bords de l'anneau ne peuvent paroître se joindre au globe de Saturne, qu'autant que l'on a, pour le bord intérieur de l'anneau,

$$(1)\ \sin \mathrm{I}' = \frac{r}{r'}\,;$$

& pour le bord extérieur,

$$(2)\ \sin \mathrm{I}' = \frac{r}{r''}.$$

(381) Relativement à Saturne, l'on a vu que $\frac{r}{r'} = \frac{3}{5}$, & que $\frac{r}{r''} = \frac{3}{7}$. Fig. 11.
Le bord intérieur de l'anneau coupe donc le globe de Saturne, tant que le ſinus d'élévation de la Terre au deſſus du plan de l'anneau, eſt plus petit que $\frac{3}{5}$ ou, ſi l'on veut, tant que cette élévation eſt plus petite que $36^d\ 52'\ 10''$. Et comme de fait cette élévation ne peut pas ſurpaſſer $31^d\ 20'$, on voit que dans toutes les poſitions de la Planete, le bord intérieur de l'anneau ſe confond toujours en partie avec le globe de Saturne. Quant au bord extérieur de l'anneau, comme il ceſſe de couper le globe, lorſque le ſinus de l'élévation de la Terre ſurpaſſe $\frac{3}{7}$ & que par conſéquent l'élévation ſurpaſſe $25^d\ 22'\ 40''$, on voit qu'il y a des poſitions de la Planete, où le limbe extérieur de l'anneau ceſſe de ſe confondre avec la Planete, & déborde le globe de Saturne.

(382) Dans le cas des diſparitions de l'anneau, l'on a vu que l'élévation de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau, eſt extrêmement petite. Nous ſuppoſerons dans les recherches ſuivantes, que l'inclinaiſon I' ne ſurpaſſe pas $30'$ de degré. On voit par-là (§. 379), que dans les ſuppoſitions dont il va être queſtion, les points du globe de Saturne par leſquels les bords ſoit intérieurs ſoit extérieurs de l'anneau, paroiſſent ſe joindre à la Planete, ſont ſitués ſur le grand axe de la figure elliptique de l'anneau, preſqu'à l'extrémité du rayon de la Planete; ce qui eſt conforme à ce que l'Obſervation nous a appris.

(383) Pour rendre plus intelligible ce que nous avons à dire ſur les queſtions dont il s'agit, il convient de jetter les yeux ſur la figure 11. Nous diſtinguerons trois parties dans cette figure; celle qui s'étend entre le centre S de Saturne, & la droite AD menée par l'extrêmité A du rayon SA de la Planete; celle qui s'étend entre la droite AD & la droite BE menée par le bord intérieur B de l'anneau; celle qui s'étend entre la droite BE & la droite CF menée par le bord extérieur C de l'anneau.

Dans la premiere partie, l'expreſſion de l'azur céleſte compris entre le globe & l'anneau, a évidemment pour expreſſion $y' - y$; & l'expreſſion de la partie lumineuſe de l'anneau, s'exprime par $y'' - y'$.

Dans la ſeconde partie, l'azur céleſte compris entre les deux parties lumineuſes de l'anneau, a pour expreſſion $2y'$. Quant aux parties lumineuſes de l'anneau, elles ſont diſtinctes & ſéparées; & chacune a pour expreſſion $y'' - y'$.

Dans la troiſieme partie, les parties lumineuſes de l'anneau ſont réunies, & ont pour expreſſion $2y''$. On ne doit point perdre de vue que dans la premiere partie, les quantités x, x', x'', ne doivent pas être ſuppoſées plus grandes que r; que dans la ſeconde partie, les quantités x', x''

doivent être comprises entre r & r'; & qu'enfin dans la troisieme partie,
Fig. 11. la quantité x'' doit être comprise entre r' & r''.

(384) Pour déterminer maintenant à quelles valeurs de x'' & de x' répond le *maximum* de la quantité $y''-y'$; au moyen des équations (2) & (3) du §. 378, dans lesquelles je suppose $x''=x'$, je cherche la valeur de $y''-y'$, & j'ai en général

$$(1)\ y''-y'=\sin I'\left(\sqrt{(r''^2-x'^2)}-\sqrt{(r'^2-x'^2)}\right).$$

Je différencie cette expression, & j'ai pour condition du Probléme;

$$(2)-x'\left(\sqrt{(r'^2-x'^2)}-\sqrt{(r''^2-x'^2)}\right)=0;$$

d'où l'on tire $x'=0$. Le *minimum* de la quantité $y''-y'$ a donc lieu à l'origine des x, & elle croît jusqu'au point B, où elle devient imaginaire; ce même point B répond au *maximum* de la quantité $2y''$.

(385) Cette analyse donne l'explication complette du Phénomene dont il s'agit. Les parties lumineuses de l'anneau situées vers le point B, doivent disparoître les dernieres; 1°. parce que vers le point B, la partie lumineuse $y''-y'$ de l'anneau est un *maximum*; 2°. parce que les deux parties lumineuses n'étant point séparées par l'azur du Ciel, cette partie d'ailleurs un *maximum*, est double de ce qu'elle seroit dans une autre position. Le point B de l'anneau doit donc disparoître le dernier; & comme ce point est situé à peu près à égale distance du globe de Saturne & du bord extérieur de l'anneau, les anses doivent diminuer de longueur, & se séparer de la Planete avant que de disparoître entiérement. Ajoutons à cela que toutes choses d'ailleurs égales, la vivacité de la lumiere de Saturne doit d'abord éteindre les parties de l'anneau, les plus voisines du globe de la Planete, ainsi qu'on l'observe dans les Satellites de Jupiter, que l'on perd de vue lorsqu'ils s'approchent de Jupiter.

(386) Quant à la raison du Phénomene également observé, de la disparition constante de l'une des anses, quelque tems avant l'autre, cela vient probablement de ce que les parties qui réfléchissent la lumiere dans ce cas, ne sont pas précisément dans un même plan. C'est l'explication que Dominique Cassini a donnée de ce Phénomene.

Article V.

Du tems où l'anneau de Saturne a été découvert; & des différentes opinions auxquelles cette découverte a donné lieu.

(387) Saturne a été connu dès les tems les plus reculés. Il n'en est pas de même de son anneau. Comme on ne peut l'appercevoir qu'à l'aide des lunettes, ce n'est que depuis l'application des lunettes à l'Astronomie, que son existence a été constatée. Galilée le découvrit au commencement du dernier siecle, ainsi que les Satellites de Jupiter.

Les

Les Phénomenes relatifs aux différens aspects que présente cet anneau, furent long-tems un Problême pour les Astronomes. Galilée crut d'abord que c'étoit deux Satellites adhérens au corps même de Saturne ; il dût être fort étonné lorsqu'il vit ces deux anses augmenter de grandeur & se séparer du corps de la Planete.

Riccioli prétendoit que Saturne étoit environné d'une armille mince, plane, elliptique, adhérente à la Planete en deux points.

Hévélius disoit formellement en 1647, qu'il ne comprenoit rien à ces deux bras de Saturne ; & dans sa Dissertation *de facie Saturni*, publiée en 1656, il distinguoit six phases différentes de cette Planete ; c'est-à-dire qu'il se contentoit d'énoncer les faits, sans chercher à les expliquer. D'autres Astronomes pensoient que ces phases venoient de la figure particuliere de Saturne vue plus ou moins obliquement. Hodierna en particulier, prenoit pour une tache, l'azur du Ciel que l'on voit entre le corps de la Planète & son anneau ; il assuroit en conséquence, que Saturne avoit la forme d'un sphéroïde, avec deux taches obscures, & que cette Planète, en tournant sur son axe, présentoit les différens aspects que l'on observe. Roberval soupçonnoit que les Phénomenes dont il s'agit, étoient causés par des vapeurs qui, s'élévant de l'Equateur de Saturne, nous réfléchissent la lumiere du Soleil.

(388) Telles étoient les opinions des Savans sur les apparences que nous offre Saturne dans sa révolution, lorsqu'en 1655 M. Huyghens donna enfin la véritable explication de ces Phénomenes. Il fit voir que toutes ces apparences sont occasionnées par un anneau fort mince & presque plan, dont Saturne est environné. Cette brillante découverte eut le sort de toutes les nouveautés ; elle éprouva des contradicteurs même parmi les Astronomes. Eustache *de Divinis*, ou plutôt le Pere Fabri sous ce nom, contesta l'explication de M. Huyghens. Il reconnut depuis qu'il s'étoit trompé, & l'explication de M. Huyghens a reçu du tems, le sçeau de la démonstration.

(389) Après avoir constaté l'existence de l'anneau de Saturne, on a voulu expliquer sa formation. M. de Maupertuis, dans son discours sur la figure des Astres, conjecture que l'anneau a été formé par la queue d'une Comete que Saturne a forcée de circuler autour de lui. La Comete est devenue Satellite, & la queue a formé l'anneau. M. de Mairan croyoit que Saturne a été originairement un globe beaucoup plus considérable qu'il ne l'est aujourd'hui, & que l'anneau est l'Equateur de l'ancienne Planete réduite à un plus petit volume. C'est, si l'on peut s'exprimer ainsi, le témoin de l'état primitif. M. de Buffon pense aussi que l'anneau a fait autrefois partie de la Planete dont il s'est détaché par l'excès de sa force centrifuge. Toutes ces brillantes spéculations éprouveroient peut-être beaucoup de difficultés, si on les soumettoit au

calcul. Ce qui me paroît de plus plausible à cet égard, c'est que le même méchanisme qui a formé l'anneau, préside à sa conservation ; que la loi doit être telle que l'anneau subsisteroit encore, s'il devenoit fluide ; que l'équilibre doit être ferme, stable, semblable en un mot, à celui que l'on démontre avoir lieu dans la figure de la Terre.

(390) Ces considérations semblent exclure l'idée que l'anneau soit soutenu par la seule pesanteur de ses parties ; ainsi qu'un vaste pont qui environneroit la Terre, se soutiendroit, dit-on, sans pilliers. Je croirois au contraire que toutes ses parties doivent être animées d'une force centrifuge, propre à contrebalancer l'effort de la pesanteur qui les précipite vers le centre de Saturne. Sans cela, il seroit à craindre que la force toujours agissante de la gravité, & la main active du Tems ne détruisît bientôt un ouvrage aussi singulier de la Nature. Au reste le systême de la rotation de l'anneau de Saturne, n'est point un systême nouveau. M. Maraldi s'en servoit dès 1715, pour expliquer la raison pour laquelle l'anse orientale de l'anneau avoit disparu la premiere, quoiqu'elle fût plus apparente que l'anse occidentale. C'étoit l'opinion de M. Cassini, de Gregori, de M. de Maupertuis, dans la figure des Astres ; c'est encore aujourd'hui l'opinion de beaucoup d'Astronomes.

Systêmes que l'on a proposés sur la rotation de l'anneau de Saturne.

(391) Relativement à l'anneau de Saturne, on peut imaginer que toutes ses parties emportées par un mouvement commun autour du centre de Saturne, font leur révolution dans le même tems autour de ce centre. On peut penser au contraire, que cet anneau ne forme pas une seule masse liée & continue. On peut dire, pour soutenir cette derniere opinion, que comme les parties de l'anneau seroient soumises à une pesanteur, qui relativement à leurs distances du centre de Saturne, varieroit dans un rapport différent de celui de la force centrifuge, si l'on supposoit ces parties emportées par un mouvement commun autour du centre de la Planete, les parties les plus éloignées de la Planete, doivent très-probablement, achever leurs révolutions autour de ce centre, dans un tems différent que celles qui sont plus voisines ; que sans cela ces parties ne seroient pas dans l'état d'équilibre ferme & stable dont nous avons parlé ci-dessus ; & que l'anneau porteroit en lui-même un principe de destruction totale, ou du moins un principe d'altération dans sa figure.

(392) M. de Maupertuis a adopté la premiere de ces hypotheses ; & dans son Discours sur la figure des Astres, il a résolu le Problême de la rotation de l'anneau de Saturne, en supposant que toutes les parties de l'anneau sont emportées d'un mouvement commun autour du centre de la Planete. Je ne donnerai point ici son Analyse ; comme cependant sa solution peut paroître fondée sur des principes précaires,

que d'ailleurs l'hypothese que toutes les parties de l'anneau sont emportées d'un mouvement commun autour du centre de Saturne, est sujette à quelques difficultés physiques, j'ai cru qu'il me seroit permis de résoudre la question dans la seconde supposition du §. 391.

Solution du Problême de la rotation de l'anneau de Saturne, en ne supposant point que toutes les parties de l'anneau sont emportées d'un mouvement commun autour du centre de la Planete.

(393) Au lieu de supposer que toutes les parties de l'anneau tournent d'un mouvement commun autour de Saturne, on peut imaginer, ainsi que je l'ai déja dit, que l'anneau est composé d'une infinité de zônes concentriques telles que les plus éloignées du centre de Saturne, n'achevent pas leurs révolutions dans le même tems que les plus voisines de ce centre. La multitude de bandes concentriques que les fortes lunettes ont fait appercevoir sur l'anneau de Saturne, rend cette opinion probable. Ce ne sont peut-être que des zônes soumises à une rotation différente, & dont on apperçoit la solution de continuité. D'ailleurs il n'y a pas loin de ce sentiment à celui de M. Cassini, sur la nature de l'anneau. Cet Astronome croyoit que l'anneau de Saturne n'est qu'un assemblage de Satellites si multipliés & si proches les uns des autres, qu'on ne peut appercevoir d'intervalle entr'eux. Une suite des zônes concentriques soumises à une rotation différente, ressemble assez à un assemblage de Satellites sans intervalles sensibles. Quoi qu'il en soit de cette hypothese ; dans le cas où l'on supposeroit l'anneau de Saturne assez mince pour que les formules appliquables à une surface de cercle, puissent s'adapter à ce Problême particulier, voici le calcul par lequel on détermineroit la rotation des différentes zônes.

(394) En général si un corps est placé dans le plan d'un cercle, & que l'on cherche l'attraction que ce corps éprouve dans la direction du centre, de la part de toutes les parties de la surface du cercle, on démontre que si l'on nomme Fig. 12.

r'' le rayon CN du cercle ;

a la distance AC du corps attiré, au centre C du cercle, mesurée sur le rayon CN passant par le corps ;

N le point où le rayon CA passant par le corps, rencontre la circonférence du cercle ;

z un arc quelconque pris sur la circonférence du cercle, & compté depuis le point N ;

m la masse de chaque molécule dont la surface du cercle est composée ;

1 le sinus total.

L'attraction qu'éprouve le corps vers le centre, a pour expression

$$\int \frac{2 m r''^2 \sin^2 z\, dz}{(a - r'' \cos z) \times (a^2 - 2 a r'' \cos z + r''^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette quantité doit être intégrée dans la supposition qu'elle soit nulle lorsque $z = 0$; & l'on doit prendre l'intégrale qui répond à $z = 180^d$.

(395) Si l'on suppose l'anneau infiniment mince; comme d'ailleurs il n'est lui-même qu'une grande surface de cercle dont le milieu, c'est-à-dire, la partie interceptée entre le centre de Saturne & le limbe intérieur, est vuide; si l'on nomme

r'' le rayon du cercle extérieur qui termine l'anneau;
r' le rayon du cercle intérieur de l'anneau;

& que l'on prenne l'intégrale de la quantité dont il a été question ci-dessus, dans laquelle on changera r'' en r'; on aura l'attraction que le corps auroit éprouvé de la part de la surface intérieure, si l'espace n'eût point été vuide. Si donc l'on soustrait cette intégrale, de celle du paragraphe précédent, on aura l'attraction qu'éprouve de la part de l'anneau, chaque point de cet anneau, vers le centre de Saturne. On aura donc l'attraction avec laquelle tous les points situés dans la même zône, ou si l'on veut, tous les points situés à une égale distance du centre de Saturne, seront attirés vers le centre, en vertu de l'attraction de l'anneau. Si l'on ajoute à cette attraction, celle que ces mêmes points éprouvent de la part de Saturne, & qui est proportionnelle à la masse de Saturne, divisée par le quarré de la distance de chacun de ces points, au centre de Saturne, c'est-à-dire, divisée par le quarré du rayon a de la zône; on aura l'attraction totale avec laquelle tous les points tendent au centre de Saturne. Il ne sera plus question que de supposer un mouvement de rotation d'où il résulte une force centrifuge dans le cercle, égale à la force précédente; ou ce qui revient au même, il ne sera plus question que de supposer les quantités précédentes proportionnelles à $\frac{a}{\tau^2}$, en entendant par

τ le tems de la révolution de chacune des zônes.

Je ne m'étendrai pas sur la maniere d'intégrer les quantités dont il a été question précédemment. On sent assez que cela seroit toujours facile par approximation, dans le cas où l'on croiroit devoir exécuter les calculs.

(396) Voici comment on démontre que pour une surface circulaire, l'attraction qu'éprouve un corps vers le centre du cercle, de la part de toutes les parties qui composent cette surface, a pour expression

$$\int \frac{2 m r''^2 \sin^2 z\, dz}{(a - r'' \cos z) \times \sqrt{(a^2 - 2 a r'' \cos z + r''^2)}};$$

je conserve toutes les dénominations du §. 394.

Soit Fig. 12.

a' la distance perpendiculaire AB du corps A, au petit trapese $Bb\,Ee$;
dx chaque particule infiniment petite du petit trapese $Bb\,Ee$;
m la masse de chacune de ces particules.

Je suppose que l'origine des x est au point B, où la perpendiculaire AB, rencontre la droite Bb. Il est évident, d'après cette construction, que l'attraction qu'éprouve le corps A, de la part de chaque élément du petit trapese $Bb\,Ee$, a pour expression $\frac{m\,dx}{(a'^2+x^2)}$; la partie qui s'exerce dans le sens de la droite AB, s'exprime par $\frac{m\,a'\,dx}{(a'^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale est $\frac{mx}{a'(a'^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Comme cette intégrale est nulle à l'origine des x, il n'y a point de constante à ajouter.

(397) Pour conclure de cette construction, l'attraction qu'éprouve le corps A, de la part de la surface circulaire dans laquelle il est placé; par le corps A je mene un rayon CAN au centre C du cercle, & je suppose la surface du cercle partagée dans un nombre infini de petits trapeses, tous paralleles à celui que j'ai considéré. Je remarque ensuite que si, conformément au §. 394, l'on nomme r'' le rayon CN du cercle, a la distance AC du corps A, au centre C du cercle, & z l'arc de cercle compris depuis le sommet N, jusqu'au point b où le cercle est rencontré par la droite Bb; l'on aura $Bb = x = r''\sin z$; $AB = a' = a - r''\cos z$.

L'expression $\frac{mx}{a'(a'^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ deviendra donc

$$\frac{m\,r''\sin z}{(a-r''\cos z)\times(a^2-2ar''\cos z+r''^2)^{\frac{1}{2}}};$$

qu'il faut doubler si l'on veut avoir l'expression de l'attraction que le corps A éprouve de la part du trapese $bFfe$. Si l'on multiplie cette quantité par $da' = -r''\,d\cos z$, & que l'on integre, on aura l'attraction qu'exerce sur le corps A, la surface du cercle. Mais $-d\cos z = \sin z\,dz$; donc l'attraction de la surface circulaire sur le corps A, s'exprime par

$$\int\frac{2mr''^2\sin^2 z\,dz}{(a-r''\cos z)\times(a^2-2ar''\cos z+r''^2)^{\frac{1}{2}}};$$

ainsi que nous l'avons dit dans le §. (394).

De plusieurs questions que l'on peut se proposer sur l'anneau de Saturne.

(398) Parmi les questions que l'on s'est proposées sur l'anneau de Saturne, on n'a pas oublié de demander s'il est habité. On sent assez

qu'une pareille queſtion ne ſera jamais éclaircie. On peut ſe propoſer encore d'autres queſtions auſſi peu ſuſceptibles d'éclairciſſemens ; comme de ſavoir vers quel point la peſanteur ſe dirige, à la ſurface de l'anneau. Il eſt évident que l'attraction de Saturne doit entrer pour beaucoup dans la ſolution du Problême ; mais il eſt également évident que la ſolution eſt ſubordonnée à un autre élément, qui doit y influer d'une maniere auſſi ſenſible ; je veux dire la rotation de l'anneau. Il eſt clair en effet, que ſi la force centrale qui attire les corps vers Saturne, eſt en équilibre avec la force centrifuge réſultante du mouvement de rotation des différentes parties de l'anneau, cette attraction ne doit plus entrer en ligne de compte ; il reſte alors la ſeule attraction de l'anneau. Toutes ces queſtions mériteroient ſans doute des diſcuſſions particulieres, mais elles m'écarteroient trop des objets que je me ſuis propoſé de traiter dans cet Ouvrage. D'ailleurs comment vérifier après tous les calculs, ſi l'hypotheſe dont on eſt parti, eſt celle de la Nature ?

Points lumineux obſervés à la ſurface de l'anneau de Saturne, lors de la réapparition du commencement de Juillet 1774.

(399) Je terminerai ce qui regarde l'anneau de Saturne, en rapportant une obſervation faite par M. Meſſier, lors de la réapparition de l'anneau, du 1 Juillet 1774. Voici l'obſervation telle qu'elle m'a été communiquée par cet Aſtronome.

« Après la réapparition des anſes de Saturne, le 1 Juillet 1774, » je continuai d'obſerver la Planete pendant pluſieurs jours, avec les » mêmes inſtrumens dont j'avois fait uſage pour mes Obſervations de » l'anneau. J'apperçus très-diſtinctement & pendant un très-grand » nombre de jours, des points lumineux parſemés ſur les anſes de » l'anneau. Ces points de lumiere étoient vifs, blanchâtres, ſcintillans, » ſemblables aux Etoiles de la ſeptieme grandeur vues avec de bonnes » lunettes. Ils n'étoient pas tous également brillans ; & pluſieurs paroiſſoient ſéparés les uns des autres. Ces points lumineux ont paru » trop conſtamment, trop fréquemment, en trop grande quantité, & » dans un trop grand Crépuſcule, pour n'être pas adhérens à l'anneau » de Saturne ».

Cette Obſervation conſtate que l'anneau de Saturne n'eſt pas parfaitement plan, & qu'il a à ſa ſurface des points plus élevés les uns que les autres. C'eſt le même phénomene que l'on obſerve dans la Lune, & qui eſt ſur-tout ſenſible lorſqu'elle ſe rapproche du Soleil. Comme ces points ſont en général plus éclairés que le reſte de l'anneau ſur lequel ils font ombre, l'Obſervateur commence à les appercevoir les premiers, lorſque par ſon mouvement relatif, il s'éleve au-deſſus du plan de l'anneau.

ARTICLE VI.

Notice abregée de ce que l'on sait sur Saturne.

(400) Je terminerai cet Ouvrage, par la Notice abregée de ce que l'on sait sur Saturne. Cet Astre est, après la Planete d'Herschell, le plus éloigné de tous les corps célestes à qui nous avons donné le nom de Planete. Sa distance moyenne, relativement au Soleil, est de 331604504 de nos lieues, en supposant la parallaxe du Soleil de huit secondes & demie. Son diametre est à celui de la Terre, dans le rapport de 10,100 à 1; il est par conséquent de 28936 lieues. Sa grosseur est à celle de la Terre, dans le rapport de 1030,3 à 1; sa densité dans le rapport de 0,10450 à 1; sa masse, dans le rapport de 106,90 à 1. Il fait sa révolution autour du Soleil, dans 10761 de nos jours, $14^h\ 37'$. Cette révolution est celle que l'on nomme sidérale. La révolution tropique est de 10749 jours $7^h\ 22'$. Son orbite est inclinée sur l'Ecliptique, de $2^d\ 30'\ 20''$. L'excentricité de cette orbite est la 0,05573 partie de la moyenne distance de la Planete au Soleil. A l'époque du 1 Janvier 1776, son Aphélie étoit, suivant M. de la Lande, dans $9^f\ 0^d\ 33'\ 30''$; la longitude du nœud ascendant, de $3^f\ 21^d\ 44'\ 17''$. La rotation de Saturne sur son axe, n'est pas connue. Cet Astre, comme toutes les Planetes supérieures, est rétrograde dans le tems de son opposition. L'arc de rétrogradation est de $6^d\ 46'$.

Dimensions de l'anneau.

(401) Le diametre du cercle extérieur de l'anneau est de 67517 lieues; le diametre du cercle intérieur, de 48226 lieues; la circonférence du cercle extérieur qui borde l'anneau, est de 212110 lieues; la circonférence du cercle intérieur, de 151510 lieues; chacune des deux surfaces de l'anneau, de 1753600000 lieues quarrées; l'espace vuide compris entre l'anneau & le globe de la Planete, de 1169069000 lieues quarrées. Le volume & la masse de l'anneau sont inconnus, ainsi que son épaisseur, qui ne peut être que très-petite, puisque le tranchant de l'anneau réfléchit assez peu de lumiere pour n'être pas apperçu, mais avec les plus fortes lunettes.

Bandes de Saturne.

(402) On a cru remarquer sur le globe de Saturne, des bandes semblables à celles de Jupiter, mais beaucoup plus foibles. Cassini en observa deux en 1675, 1683, 1696, 1708 & 1719; mais il n'apperçut pas la courbure que ces bandes auroient dû avoir, si elles étoient adhérentes au globe de Saturne. C'étoit peut-être, suivant Cassini, des especes de nuages qui s'étoient élevés de la Planete, & qui faisoient ombre. M. Messier a observé depuis les mêmes Phénomenes.

Satellites de Saturne.

(403) Indépendamment de son anneau, Saturne a encore cinq Satellites, dont les distances au centre de Saturne, & les tems des révolutions sont représentés dans la Table suivante.

	Tems des révolutions périodiques.	Tems des révolutions sinodiques.	Distances au centre de Saturne.
1^{er} Satellite . .	1 21^h 18′ 26″	1^j 21^h 18′ 55″	4,893
2	2 17 44 52	2 17 45 52	6,268
3	4 12 25 11	4 12 27 53	8,754
4	15 22 41 23	15 23 4 13	20,295
5	79 7 49 11	79 21 51 36	59,154

Ces distances sont évaluées en demi-diametres de Saturne.

Les quatre premiers Satellites se meuvent dans le plan de l'anneau; leurs orbites sont inclinées d'environ 30^d sur l'orbite de Saturne, & de 31^d 20′ sur l'Ecliptique. L'orbite du cinquieme n'est inclinée que de 15^d à 16^d sur l'Ecliptique. Le premier & le second Satellite se voient avec peine avec des lunettes de quarante pieds ; le troisieme est un peu plus gros ; le quatrieme est le plus gros de tous ; on peut le voir avec une lunette de dix pieds ; le cinquieme est fort petit.

Le quatrieme Satellite fut d'abord découvert par Huyghens, le 25 Mai 1655. Les quatre autres Satellites ont été découverts successivement par Dominique Cassini ; le cinquieme sur la fin d'Octobre 1671, le troisieme le 23 Décembre 1672, le premier & le second en 1684. Les Anglois contesterent long-tems l'existence de ces Satellites. Ce ne fut qu'en 1718, que M. Pound ayant élevé au-dessus du clocher de sa Paroisse, l'excellent objectif de cent vingt-troit pieds de foyer, donné par Huyghens à la Société Royale, on fut assuré pour la premiere fois en Angleterre, que Saturne avoit réellement cinq Satellites. Lors de leur découverte, Cassini les avoit nommés *Astra Lodoicea*, par allusion à Louis XIV; à l'exemple des Satellites de Jupiter, que Galilée avoit nommés *Astra Medicea*. L'on fit frapper en France une Médaille pour consacrer cette découverte ; la Médaille représentoit Saturne accompagné de ses cinq Satellites, avec l'exergue suivante *Saturni Satellites primùm cogniti*. Depuis ils n'ont été connus parmi les Astronomes, que sous le nom de Satellites de Saturne.

De quelques irrégularités obſervées dans les mouvemens de Saturne.

(404) Les élémens du §. (400) ſont tirés de l'Aſtronomie de M. de la Lande, mais une connoiſſance plus approfondie des mouvemens de Saturne les a fait changer de la maniere ſuivante. La moyenne diſtance de Saturne au Soleil égale à très-peu près 9,56, celle du Soleil à la Terre étant 1 ; ſon moyen mouvement ſidéral dans l'intervalle de 365 jours, eſt de $12^d\ 12'\ 46'',6$; ſon excentricité au commencement de 1750, étoit 0,056336 partie de ſa moyenne diſtance au Soleil ; ſon aphélie étoit à la même époque, dans $8^f\ 28^d\ 13'\ 9''$; ſon nœud aſcendant étoit dans $3^f\ 21^d\ 31'\ 17''$, & l'inclinaiſon de ſon orbite étoit de $2^d\ 30'\ 20''$.

Ces élémens ſont variables ; & la théorie de la peſanteur a fait voir que l'équation du centre de Saturne diminue de $1'',1$ par année ; que ſon aphélie a un mouvement direct en longitude, de $66''$, dans le même intervalle ; que l'inclinaiſon de ſon orbite, diminue de $16''$ par ſiecle, & que le mouvement annuel de ſon nœud en longitude eſt de $31'',5$. Quant à ſa moyenne diſtance, M. de la Place a reconnu en général par la théorie de la peſanteur, que les moyennes diſtances des Planetes au Soleil ſont immuables, & leurs moyens mouvemens uniformes, ce qui paroît contraire aux réſultats des Aſtronomes qui admettent une équation ſéculaire proportionnelle au quarré des tems, & ſouſtractive du moyen mouvement de Saturne. En effet, ſi l'on compare les Obſervations de Tycho avec celles de ce ſiecle, on trouve conſtamment pour Saturne, un moyen mouvement plus petit, qu'en comparant les Obſervations modernes avec celles des Caldéens & de Ptolomée ; mais ce ralentiſſement paroît s'être changé dans une accélération, depuis Hévelius ; & M. Lambert, en ſuivant la marche des oppoſitions de cette Planete, a trouvé que ſon mouvement s'étoit ſenſiblement accéléré depuis 1660.

Ces irrégularités ne ſont pas les ſeules que nous offre le mouvement de Saturne. M. de la Lande a remarqué que ſon moyen mouvement conclu des oppoſitions obſervées vers l'Equinoxe du Printems, eſt depuis un ſiecle, moins rapide que celui qui réſulte des oppoſitions obſervées vers l'Equinoxe d'Automne, en employant même des Obſervations dans leſquelles les circonſtances des mouvemens de Jupiter & de Saturne étoient à peu près ſemblables.

(405) Juſqu'ici la théorie de la peſanteur univerſelle n'a pu rendre raiſon de ces Phénomenes. On ne voit même rien dans les réſultats auxquels les Géometres ſont parvenus ſur cet objet, qui puiſſe conduire à les expliquer ; & par cette raiſon on étoit porté à les attribuer à l'action des Cometes, dont l'effet, toutes choſes d'ailleurs égales, doit être plus ſenſible ſur les Planetes les plus éloignées du Soleil.

Mais M. de la Place, en approfondissant la théorie de l'action mutuelle de Jupiter & de Saturne, a reconnu qu'elle étoit seule la cause des irrégularités observées dans le mouvement de ces deux Planetes. Leurs moyens mouvemens sont tels que cinq fois celui de Saturne est à fort peu près égal à deux fois celui de Jupiter ; & ce rapport produit dans les élémens des orbites, des inégalités considérables dont les périodes embrassent plus de neuf siecles, & qui sont la source des grands dérangemens observés par les Astronomes. La plus considérable de ces inégalités dépend de cinq fois le moyen mouvement sidéral de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter ; sa période est d'environ 919 ans, & sa valeur qui diminue par des degrés insensibles, étoit, au milieu de ce siecle, de 48′ 44″.

Le mouvement de Jupiter est soumis à une inégalité correspondante dont la période est exactement la même, mais dont la valeur affectée d'un signe contraire, est plus petite dans la raison de 3 à 7. On doit rapporter à ces deux grandes inégalités jusqu'à présent inconnues, le rallentissement apparent de Saturne, & l'accélération apparente de Jupiter. Ces Phénomenes ont atteint leur *maximum* vers 1560. Depuis cette époque, les moyens mouvemens apparens des deux Planetes se sont rapprochés sans cesse, de leurs moyens mouvemens vrais. Voilà pourquoi lorsque l'on a comparé les Observations modernes aux anciennes, le moyen mouvement de Saturne a paru plus lent, & celui de Jupiter plus rapide, que par la comparaison des Observations modernes entr'elles ; tandis que ces dernieres ont indiqué une accélération dans le mouvement de Saturne, & un rallentissement dans celui de Jupiter.

(406) La théorie de Saturne renferme encore une inégalité remarquable, dont la valeur est à peu près de 11′, & qui coincideroit avec les inégalités du mouvement elliptique, si le double du moyen mouvement de Jupiter étoit parfaitement égal à cinq fois celui de Saturne; & c'est d'elle que vient en grande partie le dérangement observé par M. de la Lande dans le mouvement de cette Planete.

Enfin Saturne est assujetti à d'autres inégalités moins considérables dont la réunion avec les précédentes forme la théorie complette de ses mouvemens. L'accord de cette théorie avec les Observations anciennes & modernes, prouve la justesse & la nécessité des grandes équations dont je viens de parler, & que les siecles suivans rendront de plus en plus sensibles ; il fournit en même tems une des preuves les plus frappantes du principe admirable de la pesanteur universelle, dont les résultats doivent obtenir la même confiance que les Observations les plus précises.

TROISIEME LIVRE,

DANS lequel on traite particuliérement des trajectoires des Corps Céleſtes ; de la maniere de déterminer ces trajectoires, d'après les Obſervations ; & de différentes queſtions relatives à ces trajectoires.

EXPOSITION DU SUJET.

(407) Je me propoſe, dans ce troiſieme Livre, de traiter particuliérement les queſtions relatives aux trajectoires des Corps Céleſtes, & la maniere de déterminer ces trajectoires, d'après les Obſervations. Le Problême de la détermination des trajectoires des Corps Céleſtes a été réſolu par pluſieurs ſavans Géometres. Newton le regardoit comme un Problême très-difficile. Voici comment il s'en explique dans ſes Principes Mathématiques. *Difficillimum hocce Problema multimodè aggreſſus, in hanc tandem deveni ſolutionem.* Ces difficultés m'avoient déterminé d'abord à ſupprimer cette portion de mes recherches, qui ſe trouvent d'ailleurs, ſoit dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1779, ſoit dans mes Eſſais ſur les Cometes ; comme cependant cette partie de mon Ouvrage préſente des réſultats qui ont paru intéreſſer les Savans, lors de la publication de mes Eſſais ſur les Cometes, j'ai cru qu'il me ſeroit permis de reprendre de nouveau cette matiere.

Dans mon Mémoire ſur la détermination des orbites des Cometes, je m'étois contenté de ſuppoſer qu'en vertu de la gravitation univerſelle, en raiſon directe des maſſes, & en raiſon inverſe du quarré des diſtances, les Corps Céleſtes décrivent une ſection conique autour du Soleil, ou plutôt, autour du centre de gravité de notre ſyſtême ; & que l'eſpece particuliere de cette ſection conique, dépend du rapport entre la force attractive & la viteſſe tangentielle, aux différens points de la trajectoire. J'ai penſé devoir m'étendre davantage ſur cette derniere aſſertion, & donner un nouveau développement à cette théorie, que je n'avois fait qu'ébaucher dans mes Eſſais ſur les Cometes.

CHAPITRE PREMIER.

Détermination des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances ; & des principales propriétés de ces trajectoires.

Je me propose, dans ce Chapitre, de déterminer la nature des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances, & de développer les principales propriétés de ces trajectoires.

ARTICLE PREMIER.

Equations fondamentales.

(408) Dans les recherches suivantes, nous nous rappellerons que si l'on nomme

- a le demi-grand axe d'une section conique ;
- E la distance du foyer au centre de la section ;
- P le parametre du grand axe ;
- R le rayon vecteur ;
- Z l'angle du rayon vecteur avec le grand axe ;
- 1 le sinus total ;
- D la distance du foyer à l'apside inférieure ;

l'on a pour équation générale aux sections coniques (§. 165),

$$(1)\quad 2R\left(\frac{E}{a}\cos Z+1\right)-P=0.$$

Dans le cas de l'Ellipse, a surpasse E ; dans le cas de la Parabole, $a=E$; dans le cas de l'hyperbole, a est moindre que E.

L'on a de plus (§. 162 & 163),

$$(2)\quad D(E+a)-\frac{aP}{2}=0;$$

$$(3)\quad D^2\pm 2aD\mp\frac{aP}{2}=0;$$

$$(4)\quad D^2\mp 2DE\pm\frac{aP}{2}=0.$$

Dans les équations (3) & (4) les signes supérieurs appartiennent à l'hyperbole, & les signes inférieurs à l'Ellipse.

Dans l'équation (1) l'origine de l'angle Z, que l'on nomme ordinairement l'angle traversé, répond à l'apside inférieure. Si l'on transporte l'origine de cet angle en un autre point quelconque de la courbe, & que l'on nomme

- β l'angle du rayon vecteur particulier correspondant à la nouvelle origine des angles traversés, avec le grand axe de la section conique ;
- Z′ l'angle traversé depuis la nouvelle origine ;

Comme l'on a généralement $Z = Z' + \beta$, l'équation (1) deviendra

$$(5)\quad 2R\left(\frac{E}{a}\cos(Z'+\beta) + 1\right) - P = 0.$$

Nous remarquerons enfin que ſi dans les équations (3) & (4) l'on élimine D au moyen de l'équation (2), l'on aura, pour l'ellipſe

$$(6)\quad 2(E^2 - a^2) + aP = 0;$$

& pour l'hyperbole

$$(7)\quad 2(E^2 - a^2) - aP = 0.$$

ARTICLE II.

Détermination de la nature des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raiſon inverſe du quarré des diſtances.

Je me propoſe dans cet Article, de déterminer la nature des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Fig. 13.

(409) Soit

S le centre du Soleil ;
P celui de la Planete ;
SA, SB deux droites perpendiculaires l'une à l'autre dans le plan du mouvement relatif de la Planete autour du Soleil ;
y la perpendiculaire PM abaiſſée de la Planete P ſur la droite SA ;
x la diſtance SM du Soleil au point M ſur la droite SA ;
R le rayon vecteur SP de la Planete ;
M la maſſe du Soleil ;
m la maſſe de la Planete ;
t le tems.

La force avec laquelle le Soleil & la Planete tendent à ſe réunir, eſt égale à la force attractive du Soleil ſur la Planete, plus à celle de la Planete ſur le Soleil ; en ſorte que ſi l'on nomme M la maſſe du Soleil, & m la maſſe de la Planete, on aura $\frac{M+m}{R^2}$, pour la force qui sollicite la Planete vers le Soleil ſuppoſé immobile, & qui, par conſéquent la fait circuler autour de cet Aſtre. Cette force décompoſée ſuivant SA, ſera $\frac{(M+m)x}{R^3}$; & ſuivant SB ou PM, elle ſera $\frac{(M+m)y}{R^3}$. Maintenant ſi l'on nomme dt l'élément du tems ; la viteſſe de la Planete parallélement aux x, ſera $\frac{dx}{dt}$. Sans la force qui ſollicite continuellement la Planete, cette viteſſe ſeroit conſtante ; mais la force $\frac{(M+m)x}{R^3}$, y produit une variation d'autant plus grande, qu'elle agit plus long-tems ; ainſi pour avoir cette variation pendant l'inſtant dt, il faut multiplier

$\frac{(M+m)x}{R^3}$ par dt ; mais comme la force agit en ſens contraire des x, & tend à les diminuer, il faut lui donner le ſigne $-$; on aura alors $-\frac{(M+m)x\,dt}{R^3}$ pour la variation de la viteſſe $\frac{dx}{dt}$; donc $d\frac{dx}{dt} = -\frac{(M+m)x\,dt}{R^3}$; & par conſéquent, ſi l'on regarde l'élément du tems comme conſtant, on aura

$$(1)\quad \frac{ddx}{dt^2} + \frac{(M+m)x}{R^3} = 0.$$

On aura, en ſuivant le même procédé

$$(2)\quad \frac{ddy}{dt^2} + \frac{(M+m)y}{R^3} = 0.$$

Ces deux équations renferment toute la théorie du mouvement des Planetes ; elles ont lieu pour toutes les courbes qu'elles peuvent décrire ; & c'eſt de leurs intégrations ſucceſſives que naiſſent les élémens qui déterminent les orbites des Planetes.

Si l'on multiplie d'abord l'équation (1) par $y\,dt^2$, & qu'on la retranche enſuite de l'équation (2) multipliée par $x\,dt^2$, on aura

$$(3)\quad x\,ddy - y\,ddx = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$(4)\quad x\,dy - y\,dx - h\,dt = 0,$$

h étant une conſtante arbitraire ;

C'eſt ce dont il eſt facile de s'aſſurer par la différenciation.

(410) Soit

Z' l'angle PSM ;

on aura

$$(1)\quad x = R \cos Z' ;$$

$$(2)\quad y = R \sin Z' ;$$

$$(3)\quad dx = \cos Z'\,dR - R \sin Z'\,dZ' ;$$

$$(4)\quad dy = \sin Z'\,dR + R \cos Z'\,dZ' ;$$

De ces équations combinées avec l'équation (4) du §. 409, l'on conclura

$$(5)\quad x\,dy - y\,dx = R^2\,dZ' = h\,dt.$$

Or $R^2 dZ'$ eſt le double de la petite ſurface que trace le rayon vecteur R durant l'élément de tems dt ; cette ſurface eſt donc proportionnelle au tems, ce qui eſt la premiere loi de Képler.

De l'équation (5) l'on conclut pareillement $dZ' = \frac{h\,dt}{R^2}$; d'où l'on voit que dans des intervalles de tems égaux & très-petits, les accroiſſemens du mouvement angulaire de la Planete autour du Soleil, ſont réciproquement comme les quarrés des rayons vecteurs.

(411) Reprenons maintenant les équations (1) & (2) du §. 409. Si l'on multiplie la premiere par dx, & qu'on l'ajoute à la ſeconde multipliée par dy, l'on aura

$$(1)\ \frac{dxddx+dyddy}{dt^2}+\frac{(M+m)}{R^3}(xdx+ydy)=0.$$

Mais à cauſe de $x^2+y^2-R^2=0$; l'on a $xdx+ydy=RdR$; l'équation précédente devient donc

$$(2)\ \frac{dxddx+dyddy}{dt^2}+(M+m)\frac{dR}{R^2}=0;$$

équation qui a pour intégrale

$$(3)\ \frac{dx^2+dy^2}{2dt^2}-\frac{(M+m)}{R}-f=0;$$

f étant une conſtante arbitraire.

Les équations différentielles du ſecond ordre (1) & (2) du §. 409, ſe trouvent ainſi ramenées aux équations différentielles (5) du §. 410 & (3) du §. 411 du premier ordre, ce qui a introduit deux conſtantes arbitraires f & h qui ſont fonctions des élémens de l'orbite de la Planete. Voyons maintenant comment on peut ramener les équations (5) du §. 410 & (3) du §. 411, à des équations finies.

(412) Pour y parvenir, nous reprendrons l'équation (5) du §. 410, $R^2dZ'-hdt=0$. Nous obſerverons auſſi qu'à cauſe des équations (3) & (4) du même paragraphe $dx^2+dy^2=dR^2+R^2dZ'^2$; & qu'ainſi $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=\frac{h^2dR^2}{R^4dZ'^2}+\frac{h^2}{R^2}$; l'équation (3) du §. 410 deviendra donc

$$(1)\ dZ'=\frac{hdR}{R^2\sqrt{\left(2f+\frac{2(M+m)}{R}-\frac{h^2}{R^2}\right)}}.$$

Conſidérons maintenant l'équation (5) du §. 408,

$$(2)\ 2R\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+\beta)+1\right)-P=0.$$

Si l'on différencie cette équation, l'on aura

$$(3)\ dR\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+\beta)+1\right)-\frac{E}{a}R\operatorname{fin}(Z'+\beta)dZ'=0.$$

De l'équation (2) l'on conclut $\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+\beta)+1=\frac{P}{2R}$; $\operatorname{fin}(Z'+\beta)=\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{E^2}\left(\frac{P^2}{4R^2}-\frac{P}{R}+1\right)\right)}$; & l'équation (3) deviendra

$$(4)\ dZ'=\frac{\frac{1}{2}\frac{a}{E}PdR}{R^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{E^2}+\frac{\frac{a^2}{E^2}P}{R}-\frac{\frac{1}{4}\frac{a^2}{E^2}P^2}{R^2}\right)}}.$$

Si l'on compare cette derniere équation avec l'équation (1), on conclura de la similitude de ces équations, que l'équation (1) est à une section conique par rapport au foyer, dont l'angle traversé compté du périhelie $= Z' + \beta$, & dont les dimensions dépendent des circonstances des mouvemens ; nous allons nous occuper de ces recherches ; nous remarquerons seulement que, d'après la comparaison des équations (1) & (4) terme à terme, l'on conclut les relations suivantes,

$$(5)\ \frac{a}{E}P - 2h = 0;$$

$$(6)\ \frac{a^2}{E^2}P - 2(M+m) = 0;$$

$$(7)\ 1 - \frac{a^2}{E^2} - 2f = 0.$$

Article III.

Détermination de l'espece & des dimensions de la trajectoire particuliere décrite par un projectile, d'après les circonstances connues de son mouvement, à un point particulier de cette trajectoire.

(413) Nous venons de voir qu'en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances, les projectiles décrivent une section conique par rapport au foyer. Il s'agit de déterminer maintenant l'espece & les dimensions de la trajectoire d'un projectile, d'après les circonstances connues de son mouvement à un point particulier de sa trajectoire. Pour simplifier cette analyse, nous supposerons que les angles traversés sont comptés du périhelie.

Nous avons vu (§, 408) que l'on a généralement pour équation aux sections coniques par rapport au foyer, en supposant que les angles traversés sont comptés du périhelie,

$$(1)\ 2R\left(\frac{E}{a}\operatorname{cos} Z + 1\right) - P = 0.$$

Si l'on différencie cette équation, on parviendra au résultat suivant,

$$(2)\ dR\left(\frac{E}{a}\operatorname{cos} Z + 1\right) - \frac{E}{a}R \operatorname{sin} Z\, dZ = 0.$$

Cette équation combinée avec l'équation (1) donne

$$(3)\ P\,dR - \frac{2E}{a}R^2 \operatorname{sin} Z\, dZ = 0.$$

On sait que dans toute courbe décrite par rapport à un Pole, si l'on nomme

θ l'angle de la tangente de la courbe avec le rayon vecteur ;

& que

& que l'on conserve les définitions précédentes, l'on a

$$(4)\ \text{tang}\ \theta = \frac{R\,dZ}{dR}.$$

De cette derniere équation l'on conclut

$$(5)\ \text{sin.}\ \theta = \frac{R\,dZ}{\sqrt{(dR^2 + R^2 dZ^2)}};$$

$$(6)\ \text{cos}\ \theta = \frac{dR}{\sqrt{(dR^2 + R^2 dZ^2)}}.$$

Si dans ces dernieres équations l'on élimine dZ au moyen de l'équation (3) elles deviendront

$$(7)\ \text{tang}\ \theta = \frac{P}{\frac{2E}{a} R \sin Z};$$

$$(8)\ \sin \theta = \frac{P}{\sqrt{\left(P^2 + \frac{4E^2}{a^2} R^2 \sin^2 Z\right)}};$$

$$(9)\ \cos \theta = \frac{\frac{2E}{a} R \sin Z}{\sqrt{\left(P^2 + \frac{4E^2}{a^2} R^2 \sin^2 Z\right)}};$$

(414) Puisque (§. 413) éq. (1) & (8),

$$2R\left(\frac{E}{a} \cos Z + 1\right) - P = 0;$$

$$\sin \theta \sqrt{\left(P^2 + \frac{4E^2}{a^2} R^2 \sin^2 Z\right)} - P = 0;$$

que d'ailleurs $\sin^2 Z = 1 - \cos^2 Z$; on aura, en combinant ces équations,

$$(1)\ E : a :: \sqrt{\left(R\,(R - P) + \frac{P^2}{4 \sin^2 \theta}\right)} : R.$$

On voit par là que si l'on connoît, pour un certain point déterminé, le rayon vecteur, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, & le parametre du grand axe de la section conique, on connoîtra au moyen de l'équation précédente, l'espece de la trajectoire décrite. Il ne s'agit que de constater si E égale, surpasse ou est moindre que a.

(415) Dans l'hypothese que nous examinons, non-seulement l'espece de la trajectoire décrite est connue ; on a de plus les dimensions de la trajectoire individuelle, car puisqu'en général (§. 414)

$$E^2 R^2 - a^2 \left(R\,(R - P) + \frac{P^2}{4 \sin^2 \theta}\right) = 0;$$

que d'ailleurs par la propriété des sections coniques, l'on a (§. 408),

dans le cas de l'ellipse, $a^2 - E^2 - \frac{aP}{2}$; & dans le cas de l'hyperbole $E^2 - a^2 - \frac{aP}{2} = 0$; on parviendra aux résultats suivans.

Pour l'Ellipse,

$$a = \frac{2R^2 \sin^2 \theta}{4R \sin^2 \theta - P};$$

$$E = \frac{R \sin \theta}{4R \sin^2 \theta - P} \sqrt{(4R \sin^2 \theta (R - P) + P^2)}.$$

Pour l'hyperbole,

$$a = \frac{2R^2 \sin^2 \theta}{P - 4R \sin^2 \theta};$$

$$E = \frac{R \sin \theta}{P - 4R \sin^2 \theta} \sqrt{(4R \sin^2 \theta (R - P) + P^2)}$$

Lors donc que l'on aura déterminé, au moyen des équations du §. 414, l'espece de la trajectoire décrite, on déterminera au moyen des équations précédentes, le demi-grand axe & l'excentricité de cette trajectoire. Il ne s'agit plus maintenant que de déduire le parametre de la section conique, des circonstances du mouvement.

Détermination du parametre de la trajectoire décrite, d'après les circonstances connues du mouvement.

(416) Pour déterminer le parametre de la trajectoire, d'après les circonstances connues du mouvement, nous reprendrons les équations (5) & (6) du §. 412, & (5) du §. 410,

$$(1)\ \frac{a}{E}P - 2h = 0; \quad (2)\ \frac{a^2}{E^2}P - 2(M+m) = 0; \quad (3)\ R^2 dZ - h\,dt = 0.$$

De la combinaison des équations (1) & (2), l'on tire $h = \sqrt{\left(\frac{P(M+m)}{2}\right)}$; mais $h = \frac{R^2 dZ}{dt}$; donc $\sqrt{\left(\frac{P(M+m)}{2}\right)} - \frac{R^2 dZ}{dt} = 0$; donc $P = \frac{2R^4 dZ^2}{(M+m)dt^2}$. Maintenant, puisque $R\,dZ$ exprime l'espace parcouru par le projectile, dans le sens de la perpendiculaire au rayon vecteur; $\frac{R\,dZ}{dt}$ exprimera la vitesse du projectile dans le sens de la perpendiculaire au rayon vecteur. Soit donc

V la vitesse du projectile dans le sens de la tangente à la trajectoire; cette vitesse se mesure par l'espace qu'il décriroit d'un mouvement uniforme dans un tems donné, par exemple, dans une minute;

Comme la vitesse dans le sens de la perpendiculaire au rayon vecteur égale la vitesse du projectile dans le sens de la tangente à la trajectoire,

multipliée par le ſinus de l'angle de la tangente à la trajectoire avec le rayon vecteur, l'on aura $V \sin \theta = \frac{R\,dZ}{dt}$; ſubſtituant cette valeur de $\frac{R\,dZ}{dt}$ dans l'expreſſion de P, elle deviendra

$$(4)\ P = \frac{2R^2}{M+m} \cdot V^2 \sin^2 \theta.$$

Nous venons de voir que de la combinaiſon des équations (5) & (6) du §. 412, l'on tire

$$(5)\ 2h^2 - P(M+m) = 0.$$

De la combinaiſon des équations (5) & (7) du même paragraphe, l'on tirera pareillement

$$(6)\ a^2P^2f - 2h^2(E^2 - a^2) = 0;$$

&, en effet, ſi dans le dernier terme de l'équation $E^2 - a^2 - 2E^2f = 0$, l'on élimine E^2, au moyen de ſa valeur $E^2 = \frac{a^2P^2}{4h^2}$ tirée de l'équation (5) du §. 412, l'on aura l'équation (6).

Si dans l'équation (6) l'on élimine $2h^2$, au moyen de l'équation (5), & que l'on ſubſtitue à P ſa valeur $P = \frac{2(a^2 - E^2)}{a}$, l'on aura

$$(7)\ 2af + (M+m) = 0.$$

Ces équations pourront ſervir à déterminer les conſtantes arbitraires f, h que nous avons introduites dans le calcul.

(417) L'équation (4) du §. 416 peut bien ſervir à déterminer le rapport des paramètres, pour les différentes trajectoires; mais on ne peut pas en conclure les valeurs abſolues de ces quantités. Pour réſoudre ce dernier Problême, il faudra avoir recours à des cas particuliers dans leſquels on connoît le parametre de la trajectoire, afin d'avoir la forme générale des équations propres à déterminer les valeurs abſolues des parametres.

Suppoſons, par exemple, qu'un corps d'une maſſe égale à celle de la Terre circule dans un cercle dont le rayon égale la moyenne diſtance de la Terre au Soleil, & nommons

1 le rayon de ce cercle, c'eſt-à-dire, la moyenne diſtance de la Terre au Soleil;

v l'eſpace parcouru par le corps, ſuivant la direction de la tangente à ſa trajectoire, pendant le tems qu'une Planete quelconque décrit l'eſpace V pareille-

ment dans le sens de la tangente à sa trajectoire ; cet espace v est égal au moyen mouvement de la Terre pour le tems que l'on considere ;

m' la masse de la Terre ;

p le parametre du cercle dont il s'agit ;

& conservons toutes les définitions précédentes.

Il est évident que l'on aura $p = \frac{2v^2}{m+m'}$;

mais d'ailleurs à cause de la propriété du cercle, $p = 2$; donc

$P:2::\frac{2R^2}{M+m}V^2 \sin^2\theta:\frac{2v^2}{M+m'}$; donc enfin

$$(1)\quad P = \frac{2(M+m')V^2}{(M+m)v^2}R^2\sin^2\theta.$$

On voit par là que si l'on connoît la masse $M+m$, la vitesse V d'un projectile lorsqu'il est à l'extrémité R d'un rayon vecteur pareillement donné, & l'angle θ du rayon vecteur avec la tangente, la trajectoire sera entiérement déterminée. En effet, le parametre du grand axe se déterminera au moyen de l'équation (1) du présent paragraphe; la valeur de $\frac{E}{a}$ sera connue au moyen de l'équation (1) du §. 414; la valeur absolue du demi-grand axe & de la distance du foyer au centre de la section conique se déterminera par les équations du §. 415. On connoîtra enfin l'angle du rayon vecteur R, avec le grand axe, au moyen de l'équation (1) du §. 413.

Si réciproquement la trajectoire étoit donnée, on trouveroit facilement la vitesse du projectile aux différens points de son orbite. En effet, puisque par la supposition, la trajectoire est donnée, on connoît son parametre, son demi-grand axe & la distance du foyer au centre de la section. Si donc l'on prend un certain rayon vecteur à volonté, on déterminera l'angle de ce rayon vecteur avec le grand axe, au moyen de l'équation (1) du §. 413; l'angle du rayon vecteur avec la tangente sera connue au moyen de l'équation (7) du §. 413; on déterminera enfin la vitesse du projectile, au moyen de l'équation (1) du présent paragraphe.

ARTICLE IV.

De quelques questions relatives aux vitesses dans les trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances.

Je vais m'occuper, dans cet Article, de quelques questions relatives aux vitesses, dans les trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances.

Du rapport des vitesses tangentielles dans les différentes sections coniques.

(418) Pour déterminer le rapport des vitesses tangentielles dans les différentes sections coniques, je reprends les équations (3) du §. 411 & (7) du §. 416.

$$(1)\ \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2(M+m)}{R}-2f=0;$$

$$(2)\ \frac{(M+m)}{a}+2f=0.$$

Je remarque que dans l'équation (1), $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ est l'expression du quarré de la vitesse tangentielle ; on peut donc mettre cette équation sous la forme suivante, en nommant V la vitesse tangentielle,

$$(3)\ V^2-\frac{(2M+m)}{R}-2f=0.$$

De la combinaison de cette équation & de l'équation (2) l'on tire

$$(4)\ V^2=\frac{2(M+m)}{R}-\frac{(M+m)}{a}.$$

Dans l'équation précédente, la quantité $\frac{2(M+m)}{R}$ est une quantité égale, d'une grandeur déterminée quelle que soit la section décrite, si l'on suppose d'ailleurs que le rayon vecteur R soit donné. De plus, relativement à l'ellipse, a est une quantité positive ; elle est infinie dans la parabole, & elle est négative dans l'hyperbole ; d'où il suit qu'à la même distance du Soleil, les vitesses sont moindres dans l'ellipse, & plus grandes dans l'hyperbole, que dans la parabole.

Dans la parabole, à cause de $a=$ infini, l'équation (4) devient

$$(5)\ V=\sqrt{\left(\frac{M+m}{R}\right)}\sqrt{2}.$$

Dans le cercle, attendu que $a=R$, l'on a

$$(6)\ V=\sqrt{\left(\frac{M+m}{R}\right)}.$$

Ainsi 1°. dans les différens points de la parabole, les vitesses sont réciproques aux racines quarrées des rayons vecteurs ; 2°. la vitesse d'un corps qui se meut dans une parabole, est à celle qu'il auroit s'il décrivoit un cercle dont le rayon seroit égal à son rayon vecteur R, comme $\sqrt{2}$ est à 1.

Aux sommets du grand axe de l'ellipse, $R=a\pm E$; d'où l'on conclura

$$(7)\ V = \begin{cases} \text{Perihélie.} \\ \sqrt{\left(\frac{a+E}{a-E}\right)}\ \frac{\sqrt{(M+m)}}{\sqrt{a}}. \\ \text{Aphélie.} \\ \sqrt{\left(\frac{a-E}{a+E}\right)}\ \frac{\sqrt{(M+m)}}{\sqrt{a}}. \end{cases}$$

(419) Soit

V la vîteſſe d'un corps qui tombe ſuivant une ligne droite;

t le tems;

F la force centrale;

R la hauteur d'où il commence à tomber; on ſuppoſe, qu'au point R, ſa viteſſe eſt nulle;

x l'eſpace qu'il parcourt en tombant.

On ſait, d'après les principes de méchanique, que relativement à ce corps, l'on a les deux équations ſuivantes,

$$(1)\ dV - F\,dt = 0;$$

$$(2)\ dx - V\,dt = 0.$$

De ces deux équations l'on tire

$$(3)\ F\,dx - V\,dV = 0.$$

Si donc l'on ſuppoſe la force centrale en raiſon inverſe du quarré des diſtances; attendu que dans ce cas, $F = \frac{M+m}{(R-x)^2}$, on aura, en intégrant, $V^2 = \frac{2(M+m)}{R-x} + A$; A étant une conſtante ajoutée en intégrant. Mais lorſque $x = 0$, $V = 0$; donc $A = -\frac{2(M+m)}{R}$; donc $V^2 = \frac{2(M+m)x}{R(R-x)}$; donc

$$(4)\ V = \sqrt{(M+m)}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{x}{R(R-x)}\right)}.$$

Si l'on ſuppoſe $x = \frac{1}{2}R$, l'on aura $V = \sqrt{\left(\frac{M+m}{R}\right)}\sqrt{2}$; donc (§. 418 équation (5)) la viteſſe à un point quelconque de la parabole, eſt égale à celle que le projectile acquerroit, ſi en partant de ce point, il tomboit vers le Soleil de la hauteur $\frac{1}{2}R$.

Si l'on ſuppoſe $x = \frac{1}{3}R$, l'on aura $V = \sqrt{\left(\frac{M+m}{R}\right)}$; d'où l'on voit (§. 418, équation (5)), que la viteſſe d'une Planete dans le cercle, eſt égale à celle qu'elle acquerroit, ſi en partant de l'extrêmité de ſon rayon, elle tomboit vers le Soleil d'une hauteur égale au tiers du rayon.

ARTICLE V.

Du tems employé par les différens projectiles à parcourir les trajectoires ; & de quelques queſtions relatives aux durées des révolutions.

Je me propoſe, dans cet Article, de déterminer le tems employé par les différens projectiles à parcourir leurs trajectoires ; je réſoudrai en même tems quelques queſtions relatives à ces tems, ou qui ont quelqu'analogie avec les durées des révolutions.

Du tems employé par les différens projectiles à parcourir leurs trajectoires.

(420) Pour déterminer le tems employé par les différens projectiles à parcourir leurs trajectoires, nous reprendrons les équations (5) du §. 410, (5) & (6) du §. 412.

$$(1)\ R^2 dZ - h\,dt = 0\,; \quad (2)\ \frac{E}{a}P - 2h = 0\,; \quad (3)\ \frac{a^2}{E^2}P - 2(M+m) = 0.$$

De cette derniere équation l'on tire $\frac{a}{E} = \frac{\sqrt{(M+m)}\sqrt{2}}{\sqrt{P}}$; cette valeur de $\frac{a}{E}$ ſubſtituée dans l'équation (2) donne $\sqrt{(M+m)}\sqrt{P} - h\sqrt{2} = 0$; d'où l'on conclut enfin au moyen de l'équation (1),

$$(4)\ t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{P}} \int R^2\,dZ\,;$$

Ou, ſi l'on veut, attendu que $2R\left(\frac{E}{a}\cos Z + 1\right) - P = 0$;

$$(5)\ t = \frac{P^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\sqrt{(M+m)}} \int \frac{dZ}{\left(1 + \frac{E}{a}\cos Z\right)^2}.$$

Dans cette derniere équation, Z eſt l'anomalie vraie, & *t* eſt le tems auquel l'anomalie moyenne eſt proportionnelle. Si dans cette équation, que je ſuppoſe intégrée, l'on entend par *t* un arc décrit d'un mouvement uniforme, on a, ce que l'on appelle en Aſtronomie, la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne. Nous allons parcourir les différentes formes que l'on peut donner à cette équation. Nous ſuppoſerons dans ces recherches que le projectile décrit ou une ellipſe, ou une parabole ; le cas de l'hyperbole n'ayant lieu que pour des cometes dont on confond alors la trajectoire avec la Parabole.

De la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne, lorſque la trajectoire eſt une ellipſe.

(421) Soit

φ un arc tel que $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - E^2)}} R \sin Z$;

Il eſt aiſé de démontrer que l'équation (4) du §. précédent peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(1)\ t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{P}} \sqrt{(a^2 - E^2)}\,(\varphi - \frac{E}{a}\sin\varphi).$$

Soit, en effet, AMB la trajectoire elliptique ; AmB, le cercle circonſcrit à cette ellipſe ; C le centre du cercle & de l'ellipſe ; F le foyer de l'ellipſe ; FM le rayon vecteur ; c'eſt la quantité que nous avons nommée R ; AFM l'angle du rayon vecteur avec le grand axe de l'ellipſe ; cet angle eſt compté du périhélie, & nous l'avons nommé Z ; NM la perpendiculaire abaiſſée du point M de l'ellipſe ſur le grand axe ; m le point où cette perpendiculaire rencontre le cercle circonſcrit à l'ellipſe ; CM le rayon mené du point M de l'ellipſe au centre C de l'ellipſe ; Cm le rayon mené du point m du cercle, au même centre C.

On ſait généralement que $\int R^2 dZ$ eſt le double de l'aire elliptique AMF ; de plus, en vertu des conſtructions précédentes, la ligne MN eſt évidemment égale à R ſin Z.

Maintenant, à cauſe des propriétés de l'Ellipſe, & du cercle circonſcrit, l'on a $\sqrt{(a^2 - E^2)}$ = demi-petit axe de l'Ellipſe ; l'on a de plus $Nm = NM \times \frac{a}{\sqrt{(a^2 - E^2)}} = \frac{a\,R\sin Z}{\sqrt{(a^2 - E^2)}}$. Si donc l'on nomme φ un angle tel que $\sin\varphi = \frac{a\,R\sin Z}{\sqrt{(a^2 - E^2)}}$; l'on aura φ = arc Am, & conſéquemment $\frac{1}{2} a\varphi$ = ſurface AmC du cercle ; mais à cauſe des propriétés de l'Ellipſe & du cercle circonſcrit, ſurface AMC de l'ellipſe $= \frac{\sqrt{(a^2 - E^2)}}{a}$ ſurface AmC du cercle ; donc ſurface AMC de l'ellipſe $= \frac{1}{2}\varphi\sqrt{(a^2 - E^2)}$. Mais ſurface FMC de l'ellipſe $= \frac{1}{2}E \times MN = \frac{1}{2}ER\sin Z$; donc ſurface AMF de l'Ellipſe $= \frac{1}{2}(\varphi\sqrt{(a^2 - E^2)} - ER\sin Z)$; mais $R\sin Z = \frac{\sqrt{(a^2 - E^2)}}{a}\sin\varphi$; donc ſurface AMF de l'ellipſe $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - E^2)}\,(\varphi - \frac{E}{a}\sin\varphi)$; donc $\int R^2 dZ = \sqrt{(a^2 - E^2)}\,(\varphi - \frac{E}{a}\sin\varphi)$; l'équation (1) eſt donc démontrée.

Du rapport des tems des révolutions dans les différentes ellipſes.

(422) Si l'on ſuppoſe que le projectile, après avoir parcouru 360 dégrés d'anomalie vraie depuis ſon départ d'un point M quelconque de l'ellipſe, revienne au même point M, l'on aura, lors de cette ſeconde circonſtance, $\varphi' = \varphi + 360^d$; $\sin\varphi' = \varphi$; $t' - t$ = tems d'une révolution ; mais $t' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{P}} \times \sqrt{(a^2 - E^2)}\,(\varphi + 360^d - \frac{E}{a}\sin\varphi)$;

&

& $t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{P}} \sqrt{(a^2 - E^2)} \left(\varphi - \frac{E}{a} \text{ſin } \varphi\right)$; donc $t' - t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{P}} \sqrt{(a^2 - E^2)}$ arc 360^d ; ce dernier arc étant pris dans le cercle dont le rayon $= a$. Mais dans l'ellipſe $\sqrt{(a^2 - E^2)} = \sqrt{\frac{aP}{2}}$; donc $t' - t = \frac{a^{\frac{1}{2}} \text{ arc } 360^d}{\sqrt{(M+m)}}$; de plus l'arc de 360^d dans le cercle dont le rayon $= a$, a pour expreſſion $\frac{2\mu}{\nu} a$, $\frac{2\mu}{\nu}$ étant le rapport de la circonférence du cercle au rayon ; donc enfin

$$(1) \quad t' - t = \frac{\frac{2\mu}{\nu} a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(M+m)}}.$$

Donc ſi l'on ſuppoſe pluſieurs Planetes dont les maſſes ſoient m, m', m'', &c. mues dans des ellipſes dont les demi-grands axes ſoient a, a', a'', &c. ; & que l'on nomme T, T', T'', &c. les tems de leurs révolutions, l'on aura, en négligeant leur action réciproque les unes ſur les autres,

$$T : T' : T'' : \&c. :: \frac{\frac{2\mu}{\nu} a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(M+m)}} : \frac{\frac{2\mu}{\nu} a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(M+m')}} : \frac{\frac{2\mu}{\nu} a''^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(M+m'')}} : \&c.$$

Partant, ſi l'on ſuppoſe les maſſes m, m', m'', &c. infiniment petites, ou nulles, relativement à la maſſe M du Soleil, on aura

$$T : T' : T'' : \& :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}} : a''^{\frac{3}{2}} : \&c.$$

c'eſt-à-dire, que les quarrés des tems des révolutions ſeront comme les cubes des demi-grands axes, ou des moyennes diſtances des Planetes au Soleil ; ce qui eſt la troiſieme loi de Képler. Cette loi eſt fort approchée dans notre ſyſtême planétaire ; mais l'action des Planetes les unes ſur les autres, & ſur le Soleil, empêche qu'elle ne ſoit rigoureuſe.

De la relation entre le nombre de pieds que parcourt un corps grave pendant la premiere ſeconde de ſa chute à la ſurface d'une Planete, & le tems de la révolution de ſes ſatellites.

(423) L'équation (1) du §. précédent fournit un moyen facile pour déterminer le nombre de pieds que parcourt un corps grave pendant la premiere ſeconde de ſa chûte, à la ſurface d'une Planete, lorſque l'on connoît le tems de la révolution de ſes Satellites ; ſoit en effet

T le tems de la révolution d'un Satellite, exprimé en ſecondes horaires ;
ρ le demi-diametre de la Planete exprimé en pieds ;

a le demi-grand axe de la trajectoire du Satellite pareillement exprimé en pieds ;
m la maſſe de la Planete ;
δ le nombre de pieds que parcourt un corps grave pendant la premiere ſeconde de ſa chute, à la ſurface de la Planete ;
$\frac{2\mu}{\nu}$ le rapport de la circonférence du cercle au rayon ;

Puiſque δ eſt le nombre de pieds que parcourt un corps grave, d'un mouvement que l'on peut regarder comme uniformément accéléré, pendant la premiere ſeconde de ſa chute, à la ſurface de la Planete ; que par conſéquent 2δ exprime la viteſſe acquiſe pendant le même tems ; & que la force accélératrice que l'on peut regarder comme conſtante pendant cet intervalle $= \frac{m}{\rho^2}$; l'on a

$$(1) \quad 2\delta = \frac{m}{\rho^2};$$

Et par conſéquent $\sqrt{m} = \rho\sqrt{2\delta}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation $T = \frac{\frac{2\mu}{\nu} a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}$, l'on aura $T = \frac{\frac{2\mu}{\nu} a^{\frac{3}{2}}}{\rho\sqrt{2\delta}}$; & conſéquemment

$$(2) \quad \delta = \frac{\frac{2\mu^2}{\nu^2} a^3}{\rho^2 T^2}.$$

(424) Si l'on conſidere pluſieurs Planetes dont les maſſes ſoient reſpectivement m, m', m'', &c. les rayons ρ, ρ', ρ'', &c. ; le nombre de pieds parcourus à la ſurface de ces Planetes, δ, δ', δ'', &c. ; l'on aura

$$(1) \quad m : m' : m'' : \&c. :: \rho^2\delta : \rho'^2\delta' : \rho''^2\delta'' : \&c.$$

Quant aux denſités reſpectives, elles ſont entr'elles comme les maſſes m, m', m'', &c. diviſées par le cube des rayons ρ, ρ', ρ'', &c.

Uſage des équations précédentes, pour déterminer les maſſes des Planetes qui ont des Satellites.

(425) Les recherches précédentes peuvent conduire à déterminer les maſſes des Planetes qui ont des ſatellites ; ou, ſi l'on veut, à comparer ces maſſes à celle du Soleil.

Soit, en effet,

m la maſſe d'une Planete ;
ρ le demi-diametre de la Planete ;
a le demi-grand axe de la trajectoire du Satellite ;
T le tems de la révolution du Satellite ;
M la maſſe du Soleil ;
ρ' le demi-diametre du Soleil ;
a' le demi-grand axe de la trajectoire de la Planete ;
T' le tems de la révolution de la Planete autour du Soleil ;

δ le nombre de pieds que parcourt un corps grave, pendant la premiere seconde de sa chute, à la surface de la Planete;

δ' le nombre de pieds que parcourt un corps grave, pendant le même tems, à la surface du Soleil.

En vertu de l'équation (1) du §. 423, l'on a $\frac{m}{M'} = \frac{\rho^2 \delta}{\rho'^2 \delta'}$; mais en vertu de l'équation (2) du même §., $\delta = \frac{\frac{2\mu^2}{\nu^2} a^3}{\rho^2 T^2}$; $\delta' = \frac{\frac{2\mu^2}{\nu^2} a'^3}{\rho'^2 T'^2}$; donc

$$(1)\ \frac{m}{M} = \frac{a^3}{a'^3} \cdot \frac{T'^2}{T^2}.$$

Cette équation sert à comparer les masses des Planetes qui ont des Satellites, à celle du Soleil.

Détermination des masses des Planetes qui n'ont point de Satellites, au moyen de la longueur du pendule qui bat les secondes à leur surface.

(426) Un Observateur placé sur une Planete qui n'auroit point de Satellite, pourroit encore déterminer le rapport de la masse de cette Planete à celle du Soleil, au moyen de la longueur du pendule qui bat les secondes. En effet, on démontre en méchanique, que si l'on nomme

l la longueur du pendule qui fait une oscillation dans un tems quelconque à la surface de la Planete, par exemple, pendant une seconde;

δ l'espace que parcourt un corps grave pendant le même tems, en vertu de la force centrale;

$\frac{2\mu}{\nu}$ le rapport de la circonférence du cercle au rayon;

l'on a l'équation suivante

$$(1)\ \frac{\mu^2}{\nu^2} l - 2\delta = 0.$$

Nous avons vu précédemment, que l'on a $\frac{m}{M} = \frac{\rho^2 \delta}{\rho'^2 \delta'}$; & que $\rho'^2 \delta' = \frac{\frac{2\mu^2}{\nu^2} a'^3}{T'^2}$; donc, puisque (éq. (1)) $\delta = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\nu^2} l$,

$$(2)\ \frac{m}{M'} = \frac{\rho^2 l T'^2}{4a'^3};$$

équation dans laquelle tout est connu. Nous remarquerons que le rapport de l à ρ étant le rapport de la longueur du pendule à secondes au demi-diametre de la Planete, il est donné indépendamment de la parallaxe, par l'observation immédiate de la longueur du pendule & de la grandeur des dégrés du méridien. Nous remarquerons aussi que, comme le pendule l est celui qui fait une oscillation pendant une seconde,

le tems T′ de la révolution de la Planete autour du Soleil, doit être évalué en secondes horaires.

J'ai cru devoir m'occuper ici de cette propriété du pendule, avec d'autant plus de raison qu'elle complete les recherches précédéntes sur les masses des Planetes, & que d'ailleurs la théorie des pendules peut être regardée comme un cas particulier des trajectoires, dans lequel le mouvement des corps est gêné par un obstacle.

De l'usage du pendule pour déterminer la figure de la Terre.

(427) On a encore employé la longueur du pendule qui bat les secondes, à un autre usage; on l'a fait servir à déterminer la figure de la Terre; voici l'esprit de cette méthode. Si l'on conserve les définitions de m, l, δ, $\frac{2\mu}{\nu}$ des §. précédens, il est aisé de s'assurer que l'on a les équations suivantes $\frac{\mu^2}{\nu^2}l - 2\delta = 0$; $2\delta - \frac{m}{R^2} = 0$; dans cette derniere équation

R est la distance du corps qui oscille, au centre de la Terre; cette distance est égale aux différens rayons de la Terre supposée elliptique;

De ces équations l'on tire

$$(1)\quad R = \frac{\nu}{\mu}\sqrt{\frac{m}{l}};$$

& si l'on suppose

l' la longueur du pendule sous une certaine latitude;

R′ le demi-diametre du sphéroïde sous cette même latitude;

$$(2)\quad R = R'\sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Cette équation fera connoître les différens diametres du sphéroïde terrestre correspondans aux différentes latitudes, lorsque l'on connoîtra la longueur du pendule simple qui bat les secondes sous ces différentes latitudes. Au surplus, voici comment on peut déterminer dans chaque lieu, la longueur du pendule qui bat les secondes.

On sait qu'en général les nombres des vibrations faites dans un même tems par deux pendules animés d'une même pesanteur, sont réciproquement proportionnels aux racines quarrées des longueurs des pendules. Ayant donc suspendu à un fil de métal très-délié, un corps qui sous un petit volume renferme beaucoup de matiere, comme une bale de plomb, de cuivre, &c.; on donnera à ce fil, depuis le point de suspension jusqu'au centre de la bale, une longueur de trois pieds au moins, que l'on mesurera très-exactement. On fera osciller ce pendule, en l'écartant peu de la verticale, & l'on comptera le nombre d'oscillations qu'il fera dans un tems déterminé; je suppose que ce soit

une heure ; après quoi on fera cette proportion. Comme 3600, nombre d'oſcillations que doit faire le pendule cherché pendant une heure, eſt au nombre d'oſcillations obſervées, ainſi la racine quarrée de la longueur du pendule d'obſervation, eſt à un quatrieme terme qui ſera la racine quarrée de la longueur du pendule qui bat les ſecondes. C'eſt ainſi qu'on a déterminé que le pendule ſimple qui fait ſes oſcillations dans une ſeconde, doit, ſous la latitude de Paris, avoir 3 pieds 0 pouces 8,57 lignes. Pour ne point trop m'écarter de mon objet, je réſerve pour un Article ſéparé, la notice des longueurs du pendule qui bat les ſecondes, ſous les différentes latitudes ; & les concluſions que l'on peut en tirer relativement à la figure de notre globe.

Uſages de l'équation (1) du §. 421 dans les Problêmes Aſtronomiques.

(428) Nous avons vu que ſi l'on entend par

φ un angle tel que (1) $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{(a^2-E^2)}} R \sin Z$;

attendu que dans l'ellipſe $\sqrt{(a^2-E^2)} = \sqrt{\frac{aP}{2}}$, l'on a pour l'Ellipſe,

$$(2)\quad t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(M+m)}}\left(\varphi - \frac{E}{a}\sin\varphi\right);$$

la relation entre R & Z étant d'ailleurs déterminée par l'équation ſuivante

$$(3)\quad 2R\left(1+\frac{E}{a}\cos Z\right) - P = 0.$$

Ces équations vont ſervir à réſoudre, pour l'Ellipſe, tous les Problêmes qui dépendent de la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne.

Détermination de l'anomalie moyenne, lorſque l'on connoît l'anomalie vraie.

(429) Soit

- 1 le demi-grand axe de la trajectoire de la Planete que l'on conſidere ;
- E la diſtance du foyer au centre de l'orbite ;
- T la durée de la révolution de la Planete rapportée aux Etoiles ; cette durée peut être évaluée en heures, minutes ou ſecondes ;
- t le tems écoulé entre le paſſage par le périhelie, & l'inſtant où la Planete a une certaine anomalie vraie ; ce tems doit être évalué d'une maniere analogue à T.

Il eſt évident que puiſque dans l'équation (2) du §. 428, $a = 1$; cette équation deviendra

$$(1)\quad t = \frac{1}{\sqrt{(M+m)}}(\varphi - E\sin\varphi)$$

Maintenant ſi l'on ſuppoſe que la Planete ait parcouru une révolution entiere à compter du périhélie, comme dans ce cas $\varphi = 360^d$ & $\sin\varphi = 0$;

l'on aura $T = \frac{1}{\sqrt{(M+m)}}$ arc 360^d; donc $t : T :: (\varphi - E \sin\varphi) :$ arc 360^d; donc

$$(2)\ t = \frac{T}{\text{arc } 360^d}(\varphi - E \sin\varphi).$$

Quant à la maniere de déterminer fin φ, on fe rappellera que dans le cas dont il s'agit, puifque $a = 1$, l'on a $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 - E^2)}} R \sin Z$; de plus l'on a $2R(1 + E \cos Z) - P = 0$; ou plutôt, attendu que $P = 2(1 - E^2)$; $R = \frac{1 - E^2}{1 + E \cos Z}$; donc

$$(3)\ \sin\varphi = \frac{\sin Z \sqrt{(1 - E^2)}}{1 + E \cos Z}.$$

On voit par là, que lorfque l'anomalie vraie eft donnée, rien n'eft plus fimple que de déterminer l'anomalie moyenne; en effet, puifque Z eft l'anomalie vraie, on déterminera l'angle φ au moyen de l'équation (3), & l'anomalie moyenne au moyen de l'équation (2).

(430) L'ufage de ces équations fuppofe que l'on connoît les quantités T & E pour chaque Planete; voici ces valeurs pour les différentes Planetes, en fuppofant que le demi-grand axe de la trajectoire de ces différentes Planetes $= 1$.

Valeurs de T *& de* E *relativement aux différentes Planetes.*

	Valeurs de E.	Valeurs de T.
Mercure. . . .	0,20589.	$87^j\ 23^h\ 15'\ 37''$
Vénus.	0,00698	224 16 49 12,7
Terre	0,01680,2	365 6 9 11,2
Mars.	0,09299,8	686 23 30 43,3
Jupiter.	0,04821,9	4332 8 51 25,6
Saturne	0,05700,3.	10761 14 36 42,5
Herfchel. . . .	0,04758,7. . . .	30445 18 0 0

Détermination de l'anomalie vraie en général, lorfque l'on connoît l'anomalie moyenne, & particuliérement lorfque les trajectoires font peu excentriques.

(431) Il n'eft pas difficile de déterminer l'anomalie moyenne, lorfque l'on connoît l'anomalie vraie; l'on n'a alors qne des équations du premier dégré à réfoudre. Il n'en eft pas de même, lorfque connoiffant l'anomalie moyenne, on veut repaffer à l'anomalie vraie. Dans ce cas, l'équation renferme à la fois, l'angle φ & fon finus. Elle eft donc tranfcendante. Il n'eft pas impoffible cependant de tomber dans une folu-

tion ſimple, lorſque, comme dans le cas des Planetes, les trajectoires ſont peu excentriques.

Pour parvenir à cette ſolution, je ſuppoſe que l'on a l'équation ſuivante:

$$(1)\ \varphi = X + E \sin \varphi;$$

X étant un angle égal à $\frac{t}{T} \times$ arc 360^d; & la ſuppoſition eſt permiſe, puiſque cette valeur de φ ſubſtituée dans l'équation (2) du §. 429, la réduit à zéro.

De cette équation l'on conclut

$$(2)\ \sin \varphi = \sin (X + E \sin \varphi);$$

Mais puiſque par la ſuppoſition, l'excentricité E eſt très-petite, le théorême de Taylor (§. 146) donnera tout de ſuite

$$(3)\ \sin\varphi = \sin X + E \sin\varphi \cos X - \tfrac{1}{2}E^2 \sin^2\varphi \sin X - \tfrac{1}{6}E^3 \sin^3\varphi \cos X + \&c.$$

Si donc l'on s'arrête, par exemple, aux troiſiemes puiſſances de E; l'on aura par la méthode du retour des Séries,

$$(4)\ \sin\varphi = \sin X + E \sin\varphi \cos X - \tfrac{1}{2}E^2 \sin\varphi \sin^2 X - \tfrac{2}{3}E^3 \sin\varphi \sin^2 X \cos X.$$

Mais (§. 429) $\sin \varphi = \frac{\sin Z \sqrt{(1 - E^2)}}{1 + E \cos Z}$; donc enfin

$$(5)\ (1 + E \cos Z) \sin X + (E \cos X - \tfrac{1}{2} E^2 \sin^2 X - \tfrac{2}{3} E^3 \sin^2 X \cos X - 1)\ \sin Z \sqrt{(1 - E^2)} = 0.$$

Equation dont on tirera facilement la valeur de Z.

Soit

B un angle tel que $\tang B = \frac{E \sin X}{(1 - E \cos X + \frac{1}{2} E^2 \sin^2 X + \frac{2}{3} E^3 \sin^2 X \cos X) \sqrt{(1 - E^2)}}$

L'équation précédente pourra être miſe ſous la forme ſuivante

$$(6)\ \sin B + E\ (\sin B \cos Z - \cos B \sin Z) = 0;$$

d'où l'on voit que

$$(7)\ Z - B = \text{arc} \sin \frac{\sin B}{E}.$$

De la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne, lorſque la trajectoire eſt une Parabole.

(431) Lorſque la trajectoire eſt une Ellipſe, nous venons de voir que la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne eſt tranſcendante; & il en eſt de même dans le cas de l'hyperbole; mais lorſque la trajectoire eſt une parabole, alors la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne eſt algébrique.

Pour le démontrer, ſoit

D la diſtance périhélie.

& reprenons l'équation (4) du §. 420, dans laquelle nous ſuppoſerons

$P = 4D$, ainsi que l'équation (1) du §. 413, dans laquelle nous supposerons $\frac{E}{a} = 1$.

Nous aurons donc

$$(1)\ t = \frac{1}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{2D}} \int R^2 dZ,$$

$$(2)\ R(1 + \cos Z) - 2D = 0.$$

De l'équation (2) l'on conclut, en différenciant,

$$(3)\ 2D dR - R^2 \sin Z dZ = 0.$$

De l'équation (2) l'on conclut pareillement $R \sin Z = 2D^{\frac{1}{2}} \sqrt{(R-D)}$, donc

$$(4)\ D^{\frac{1}{2}} dR - R\sqrt{(R-D)}\, dZ = 0;$$

Donc $R^2 dZ = \frac{D^{\frac{1}{2}} R dR}{\sqrt{(R-D)}}$; & par conséquent $t = \frac{1}{\sqrt{(M+m)}\sqrt{2}} \int \frac{R dR}{\sqrt{(R-D)}}$;

Si l'on integre convenablement cette derniere quantité, pour qu'elle soit nulle, lors du passage par le périhélie, c'est-à-dire, quand $R = D$; l'on aura

$$(5)\ t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{(M+m)}} (R + 2D) \sqrt{(R-D)}.$$

On peut mettre l'équation (5) sous une autre forme. En effet, puisque $R + 2D = R - D + 3D$; cette équation peut avoir la forme suivante

$$(6)\ t = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{(M+m)}} \left(\tfrac{1}{4}(R-D)^{\frac{3}{2}} + \frac{3D}{4}(R-D)^{\frac{1}{2}}\right);$$ mais à cause de l'équation (2), $R - D = D\left(\frac{1-\cos Z}{1+\cos Z}\right) = D\frac{\sin^2 \frac{1}{2} Z}{\cos^2 \frac{1}{2} Z} = D \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} Z$; donc enfin

$$(7)\ t = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{(M+m)}} D^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} Z + \tfrac{3}{4} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Z\right).$$

Remarque sur la Table connue en Astronomie, sous le nom de Table générale du mouvement des Cometes.

(433) Il suit de là que pour les différentes paraboles, les tems employés à parvenir à une même anomalie vraie, sont comme les racines quarrées du cube des distances périhélies. On a conclu de cette propriété des trajectoires paraboliques, qu'il étoit possible d'abréger le calcul des lieux des Comètes dans les différentes paraboles, en déterminant, pour une certaine parabole particuliere, les tems correspondans aux différentes anomalies vraies; l'on a choisi celle de ces paraboles dont la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre que l'on suppose $= 1$. On a appellé la Table qui contient ces calculs, *Table générale, des mouvemens des Cometes.* Lors donc que l'on veut calculer pour une

Comete

Comete quelconque, le tems qu'elle emploie à parvenir à une certaine anomalie, on cherche dans la Table des mouvemens des Cometes, le tems correfpondant à cette anomalie ; on multiplie ce tems par $D^{\frac{3}{2}}$, & l'on a le tems employé par la Comete particuliere dont il s'agit.

Réciproquement fi l'on veut connoître l'anomalie vraie correfpondante à un certain tems écoulé depuis le paffage de la Comete par le périhélie, on multiplie le tems donné par $\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}}$ & l'on a le tems employé par la Comete de 109 jours, à parvenir à l'anomalie vraie cherchée ; anomalie qui fe trouve par là toute calculée dans la Table.

Lorfque l'on connoît l'anomalie vraie correfpondante à un inftant donné, on calcule le rayon vecteur de la Comete au moyen de l'équation (2) du §. précédent.

(434) On a nommé Comete de 109 jours, la Comete dont la diftance périhélie eft égale à la moyenne diftance du Soleil à la Terre ; & en effet cette Comete emploie 109,6153 jours à parcourir 90^d d'anomalie vraie depuis le périhélie. Voici comment on a déterminé ce tems.

On fait que dans la parabole le rayon vecteur correfpondant à 90^d d'anomalie vraie $= 2D$; fi donc dans l'équation (5) du §. 432 l'on fuppofe $D = 1$, & $R = 2$, & que l'on néglige la maffe de la Comete & de la Terre par rapport à celle du Soleil, l'on aura $t = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{M}}$; c'eft l'expreffion du tems que la Comete dont il s'agit emploie à parcourir 90^d d'anomalie vraie. Suppofons maintenant qu'un corps circule dans un cercle dont le rayon égale 1, & nommons t' le tems employé à parcourir 90^d dans ce cercle ; attendu que dans l'équation (1) du §. 429 l'on a alors $E = 0$; $\varphi = \text{arc } 90^d$, l'on conclura $t' = \frac{1}{\sqrt{M}}$ arc 90^d ; mais $t' = \frac{1}{4}$ tems de la révolution de la Terre par rapport aux fixes ;

$$\text{donc } \sqrt{M} = \frac{\text{arc } 360^d}{\text{tems de la révolution de la Terre par rapport aux fixes}} ;$$

$$\text{donc } t = \frac{4\sqrt{2} \text{ tems de la révol. de la Terre par rapport aux fixes}}{3 \times \text{arc } 360^d} = 109^{\text{jours}},6153.$$

Il fuit de ces recherches que pour une Comete quelconque l'on a généralement

$$(1)\ t = 109,6153\ D^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{4} \text{tang}^3 \tfrac{1}{2} Z + \tfrac{3}{4} \text{tang} \tfrac{1}{2} Z\right) ;$$

& dans cette derniere équation t exprime des jours. Si l'on vouloit que t exprimât des minutes d'heures, l'on auroit

$$(2)\ t = 109,6153 \times 1440\ D^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{4} \text{tang}^3 \tfrac{1}{2} Z + \tfrac{3}{4} \text{tang} \tfrac{1}{2} Z\right).$$

Si dans l'équation (1) l'on élimine tang $\frac{1}{2}$ Z, au moyen de fa

valeur $R - D = D\ \text{tang}^2 \frac{1}{2} Z$, elle deviendra

$$(3)\ t = 109{,}6153 \left(\tfrac{1}{4} (R - D)^{\frac{3}{2}} + \frac{3D}{4} (R - D)^{\frac{1}{2}} \right).$$

L'on trouvera à la fin de ce Chapitre, la Table générale du mouvement des Cometes dans une orbite parabolique ; cette Table a été calculée par M. Pingré.

De la maniere d'employer les équations du §. 429, lorsque les trajectoires sont très-excentriques.

(435) Dans le cas de presque toutes les Cometes, les équations du §. précédent déterminent assez exactement la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne, au moins pour la portion des orbites que l'on observe ; si cependant l'on soupçonnoit que ces orbites pussent être susceptibles d'être calculées dans l'ellipse, voici quelques réflexions que l'on pourroit faire sur la maniere d'employer les équations du §. 429. Dans ces équations, si l'on nomme

- a le demi-grand axe de la trajectoire de la Planete que l'on considere ;
- E la distance du foyer au centre de l'Ellipse ;
- T la durée de la révolution de la Planete rapportée aux Etoiles fixes,
- Z l'anomalie vraie de la Planete ;
- t le tems écoulé entre le passage par le périhélie, & l'instant où la Planete a une certaine anomalie vraie ; ce tems doit être évalué d'une maniere analogue à T ;
- ϕ un angle tel que $(1)\ \sin\phi = \dfrac{\sin Z \sqrt{(a^2 - E^2)}}{1 + \frac{E}{a} \cos Z}$

Il résulte du §. 429, que l'on a

$$(2)\ t = \frac{T}{\text{arc } 360^d} \left(\phi - \frac{E}{a} \sin\phi\right).$$

Maintenant, puisque dans le cas dont il s'agit, les trajectoires sont très-excentriques, l'on peut supposer $E = (1 - \beta)\, a$;

β étant une très-petite quantité vis-à-vis de 1.

Les équations précédentes peuvent donc être mises sous la forme suivante

$$(3)\ \sin\phi = \frac{a \sin Z \sqrt{2\beta}}{1 + (1 - \beta) \cos Z},$$

$$(4)\ t = \frac{T}{\text{arc } 360^d} \left(\phi - (1 - \beta) \sin\phi\right).$$

Lors donc que les observations feront soupçonner que la trajectoire de la Comete peut être regardée comme elliptique, on pourra essayer si les équations précédentes ne représentent pas mieux les observations que les équations analogues dans l'hypothese parabolique ; & comme, généralement, si l'on suppose plusieurs Planetes mues dans des Ellipses dont les demi-grands axes sont a, a', a'', &c., & que l'on nomme T, T', T'' &c. les tems de leurs révolutions, l'on a (§. 422).

$$T : T' : T'' : \&c. :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}} : a''^{\frac{3}{2}} : \&c.$$

L'on aura, en nommant

1 le demi-grand-axe de l'orbite terrestre;
T' la durée de la révolution de la Terre par rapport aux fixes;

$$(5)\ T : T' :: a^{\frac{3}{2}} : 1.$$

Donc $a^3\, T'^2 = T^2$; $a^3 = \frac{T^2}{T'^2}$; $a = \frac{T^{\frac{2}{3}}}{T'^{\frac{2}{3}}}$; l'équation (3) aura donc la forme qui suit.

$$(6)\ \text{sin}\,\varphi = \frac{T^{\frac{2}{3}}}{T'^{\frac{2}{3}}} \times \frac{\text{sin}\,Z\,\sqrt{2\beta}}{1+(1-\beta)\,\text{cos}\,Z}.$$

On aura aussi la relation suivante entre le rayon vecteur & l'anomalie vraie.

$$(7)\ R\,(1+(1-\beta)\,\text{cos}\,Z) - 2\beta\frac{T^{\frac{2}{3}}}{T'^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Si l'on vouloit comparer deux observations, l'on auroit les équations relatives à la seconde observation, en changeant dans les équations précédentes, t, R, Z, φ, en t', R', Z', φ'; d'où l'on concluroit

$$(8)\ t' - t = \frac{T}{\text{arc}\ 360^d}(\varphi' - \varphi - (1-\beta)(\text{sin}\,\varphi' - \text{sin}\,\varphi));$$

$$(9)\ R'(1+(1-\beta)\,\text{cos}\,Z') - R\,(1+(1-\beta\,\text{cos}\,Z) = 0.$$

Au moyen de ces équations, on pourra chercher à représenter les tems écoulés entre les observations dans l'hypothese elliptique; en essayant successivement différentes durées des révolutions, & en prenant différentes valeurs de β. Nous remarquerons seulement que, pour les Cometes, β est toujours une quantité très-petite, & qu'elle doit être telle que la valeur de sin φ tirée de l'équation (6) soit plus petite que 1. Nous remarquerons enfin que quoique cette méthode ne présente qu'une espece de tatonnement, comme cependant les valeurs de R, R', Z, Z', qui satisfont au Problême, sont connues d'une maniere approchée par les calculs dans l'hypothese parabolique, la méthode ne peut manquer d'approcher assez promptement du véritable résultat.

Article VI.

Digression sur les longueurs du Pendule qui bat les secondes, sous les différentes latitudes; & conclusions que l'on en peut tirer relativement à la figure de notre globe.

(436) J'ai cru que l'on verroit avec plaisir la notice des longueurs observées du pendule qui bat les secondes sous les différentes latitudes; ainsi que les conclusions que l'on en peut tirer, relativement à la figure de notre globe. J'ai pensé que cette digression me seroit permise, d'autant plus que cette recherche est un corollaire de différentes questions qui tiennent en quelque sorte au problême des trajectoires.

Notice des longueurs observées du pendule qui bat les secondes sous les différentes latitudes.

LATITUDES.	LONGUEURS OBSERVÉES DU PENDULE.		NOMS DES OBSERVATEURS.
	Pouces.	Lignes.	
0d 0′ 0	36	7,07. . . .	Par M. Bouguer.
9 34 . . .	36	7,16. . . .	A Portobélo, } par le même.
18 27 . . .	36	7,3½. . . .	Au petit Goave, } par le même.
33 55 . . .	36	8,07. . . .	Au Cap de Bonne-Espérance, par M. l'Abbé de La Caille.
46 12 . . .	36	8,17. . . .	A Genêve, par M. Mallet.
48 50 . . .	36	8,57. . . .	A Paris, par les Astronomes François.
52 9 . . .	36	8,71. . . .	A Leyde, par M. Lulofs.
59 56 . . .	36	8,97. . . .	A Pétersbourg, par M. Mallet.
66 48 . . .	36	9,17. . . .	A Pello, par les Astronomes François.
67 4 . . .	36	9,17. . . .	A Ponoi, par M. Mallet.

Telles sont les longueurs observées du pendule qui bat les secondes sous les différentes latitudes ; voyons quelles conclusions l'on en peut tirer, relativement à la figure de notre globe. Soient

R, R′, R″, R‴, &c. les différens rayons du sphéroïde terrestre ;
l, l', l'', l''', &c. les longueurs du pendule qui bat les secondes, relativement à ces différens rayons ;

Il suit des équations du §. 427, que l'on a

$$\frac{R'}{R} = \sqrt{\frac{l}{l'}}; \quad \frac{R''}{R} = \sqrt{\frac{l}{l''}}; \quad \frac{R'''}{R} = \sqrt{\frac{l}{l'''}}, \text{ \&c.}$$

Si donc l'on nomme 1 le demi-grand axe de la Terre, l'on aura les résultats suivans.

Valeurs des différens rayons de la Terre conclues des longueurs observées du Pendule.

LATITUDES.	VALEURS DES RAYONS DE LA TERRE.
0d 0′ . . .	1,000000.
9 34 . . .	0,999897.
18 27 . . .	0,999704.
33 55 . . .	0,998863.
46 12 . . .	0,998759.
48 50 . . .	0,998296.
52 9 . . .	0,998138.
59 56 . . .	0,997843.
66 48 . . .	0,997716.
67 4 . . .	0,997716.

Tels ſont les réſultats déduits des longueurs obſervées du pendule; voyons quelles ſont les valeurs de ces mêmes rayons, ſuivant les différentes hypotheſes ſur l'ellipticité de la Terre.

(437) Il eſt facile de déterminer les valeurs des rayons terreſtres, relativement aux différentes hypotheſes ſur l'ellipticité de la Terre; ſoit en employant les valeurs de ces rayons, que l'on trouvera toutes calculées dans les Tables du §. (6) de mon premier Volume, en ayant ſoin cependant de les ramener à la ſuppoſition du grand axe de la Terre = 1; ſoit en faiſant uſage des équations du même paragraphe.

Valeurs des différens rayons terreſtres dans les différentes hypotheſes d'ellipticité de la Terre; on ſuppoſe le demi-grand axe de la Terre = 1.

LATITUDES.	Valeurs des différens rayons terreſtres; en ſuppoſant les axes de la Terre dans le rapport de		
	177 à 178,	229 à 230,	320 à 321.
0d 0′	1,000000	1,000000	1,000000.
9 34	0,999820	0,999870	0,999913.
18 27	0,999443	0,999562	0,999685.
33 55	0,998260	0,998626	0,999022.
46 12	0,997068	0,997720	0,998368.
48 50	0,996818	0,997510	0,998224.
52 9	0,996520	0,997281	0,998045.
59 56	0,995795	0,996736	0,997649.
66 48	0,995258	0,996317	0,997347.
67 4	0,995237	0,996298	0,997326.

Concluſions que l'on peut tirer des longueurs obſervées du pendule qui bat les ſecondes ſous les différentes latitudes, relativement à la figure de notre globe.

(438) Arrêtons-nous un moment ſur les réſultats. Si l'on compare les valeurs des différens rayons terreſtres, conclues dans la ſuppoſition que les axes de la Terre ſont dans le rapport, ſoit de 177 à 178, ſoit de 229 à 230, avec les valeurs de ces mêmes rayons conclues immédiatement des longueurs obſervées du pendule ſous les différentes latitudes; on ſe convaincra facilement que les valeurs déduites des rapports de 177 à 178, & de 229 à 230, ſont toutes trop petites; mais que ces valeurs ſe rapprochent des réſultats de la Table du §. 436, à meſure que le rapport des axes de la Terre ſe rapproche de l'égalité.

On doit donc conclure d'abord qu'aucun des deux rapports de 177 à 178, ou de 229 à 230, ne s'accorde avec les résultats tirés des longueurs obſervées du pendule ; mais en même tems l'on doit être tenté de diminuer le rapport des axes de la Terre. Si l'on ſuppoſe maintenant que les axes ſont entr'eux comme 320 à 321, on trouve alors un accord bien plus ſatisfaiſant entre les réſultats de la Table du §. 437, & ceux de la Table du §. 436. Quelques réſultats ſont en plus, d'autres ſont en moins ; & quoique la ſomme des différences en plus & en moins ne ſe compenſe pas parfaitement, & que cette circonſtance ſemble encore indiquer une diminution dans le rapport des axes ; on peut cependant s'arrêter à ce dernier rapport qui, ainſi que nous l'avons dit dans le §. 120, réunit d'ailleurs tant de probabilités en ſa faveur. Nous remarquerons enfin que les meſures du pendule faites au Nord par les Aſtronomes François, ſont celles qui donnent le plus petit applatiſſement de la Terre ; tandis que les meſures géodéſiques faites par les mêmes Aſtronomes ſemblent indiquer le plus grand applatiſſement. Je laiſſe aux Aſtronomes à éclaircir cette difficulté.

ARTICLE VII.

De quelques propriétés relatives aux cordes des trajectoires.

(439) Je vais m'occuper, dans cet Article, de quelques propriétés relatives aux cordes des trajectoires. Soit

R un rayon vecteur mené du foyer à un point quelconque de la trajectoire;
R' un autre rayon vecteur mené pareillement du foyer à un autre point de la trajectoire ;
Z l'angle du rayon vecteur R avec le grand axe, compté du périhélie ;
Z' l'angle du rayon vecteur R' avec le grand axe, compté pareillement du périhélie ;
C la corde qui joint les deux points de la trajectoire dont il s'agit.

Il eſt évident que l'on aura un triangle rectiligne dont les côtés ſeront reſpectivement R, R', C ; & dont l'angle oppoſé au côté C, aura pour expreſſion Z' — Z. On aura donc (trigonometrie rectiligne)

$$(1)\ R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(Z' - Z) - C^2 = 0;$$

mais $\cos(Z' - Z) = \cos Z' \cos Z + \sin Z' \sin Z$; donc enfin

$$(2)\ R^2 + R'^2 - 2RR' (\cos Z' \cos Z + \sin Z' \sin Z) - C^2 = 0.$$

(440) Dans le cas de la Parabole, ſi l'on nomme

D la diſtance périhélie ;

Il ſuit de l'équation (2) du §. 432, que l'on a $R \cos Z = 2D - R$; $R' \cos Z' = 2D - R'$; $R \sin Z = 2D^{\frac{1}{2}} \sqrt{(R-D)}$; $R' \sin Z' = 2D^{\frac{1}{2}} \sqrt{(R'-D)}$; donc

$$(1)\ (R-R')^2 - 4D(2D - R - R \pm 2\sqrt{(R-D)}\sqrt{(R'-D)}) - C^2 = 0.$$

L'équation précédente présente une double suite de signes ; la premiere suite a lieu lorsque la corde ne coupe point le grand axe de la parabole ; la seconde suite doit être employée, lorsque la corde coupe le grand axe.

(441) Dans le cas de l'ellipse, & généralement dans le cas d'une section conique quelconque, l'on a, $R \cos Z = \frac{a}{E}\left(\frac{P}{2} - R\right)$; $R' \cos Z' = \frac{a}{E}\left(\frac{P}{2} - R'\right)$; $R \sin Z = \sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{E^2}\left(\frac{P}{2} - R\right)^2\right)}$; $R' \sin Z' = \sqrt{\left(R'^2 - \frac{a^2}{E^2}\left(\frac{P}{2} - R'\right)^2\right)}$; & par conséquent l'on a

$$(1)\quad R^2 + R'^2 - \frac{2a^2}{E^2}\left(\frac{P}{2} - R\right)\left(\frac{P}{2} - R'\right)$$
$$\mp\sqrt{\left(R^2 - \frac{a^2}{E^2}\left(\frac{P}{2} - R\right)^2\right)}\sqrt{\left(R'^2 - \frac{a^2}{E^2}\left(\frac{P}{2} - R'\right)^2\right)} - C^2 = 0.$$

L'on n'oubliera point que d'ailleurs, dans le cas de l'Ellipse,

$$(2)\quad 2a^2 - 2E^2 - aP = 0;$$

& dans le cas de l'hyperbole,

$$(3)\quad 2E^2 - 2a^2 - aP = 0.$$

Je me suis occupé, dans cet Article, de quelques propriétés relatives aux cordes des trajectoires ; & j'ai donné en particulier l'expression de la corde comprise entre deux rayons vecteurs de la Parabole, parce que, ainsi qu'on le verra dans la suite, on fait un grand usage de ces propriétés, pour déterminer les trajectoires des Cometes.

ARTICLE VIII.

De quelques principes tirés des considérations sur les forces centrales, dont on peut faire usage dans la détermination des orbites des Cometes.

Je me propose, dans cet Article, de développer quelques principes tirés des considérations sur les forces centrales, dont on peut faire usage dans la détermination des orbites des Cometes.

Principe de Méchanique, employé par M. de la Grange dans son Mémoire sur les Cometes.

(442) Soient

x, x', x'' } les trois abscisses successives de la trajectoire d'une Comete, prises sur le plan de son orbite, comptées du centre du Soleil, & correspondantes à trois observations séparées par de petits intervalles de tems ;

y, y', y'' } les ordonnées correspondantes, prises pareillement sur le plan de l'orbite de la Comete, & comptées du centre du Soleil ; l'on suppose les lignes des coordonnées perpendiculaires entre elles ;

T le tems écoulé depuis une certaine époque quelconque jusqu'à l'instant de la seconde observation ;

t le tems écoulé entre la premiere observation & la seconde ;

t' le tems écoulé entre la seconde observation & la troisieme ;

t'' le tems écoulé entre la premiere observation & la troisieme.

Il est sensible qu'en général les abscisses x, x', x'', ainsi que les ordonnées y, y', y'', peuvent être regardées comme des fonctions de la force centrale, & du tems écoulé depuis l'époque dont on est parti. Donc les quantités x', y' doivent donner x & y, x'' & y'', en y changeant T, en $T - t$ & $T + t'$; donc en vertu du théorême de Taylor déja cité (§. 146).

$$x = x' - \frac{dx'}{dT} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x'}{dT^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 x'}{dT^3} t^3 + \&c.$$

$$y = y' - \frac{dy'}{dT} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 y'}{dT^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 y'}{dT^3} t^3 + \&c.$$

$$x'' = x' + \frac{dx'}{dT} t' + \frac{1}{2} \frac{d^2 x'}{dT^2} t'^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 x'}{dT^3} t'^3 + \&c.$$

$$y'' = y' + \frac{dy'}{dT} t' + \frac{1}{2} \frac{d^2 y'}{dT^2} t'^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 y'}{dT^3} t'^3 + \&c.$$

(443) Soit

1 la moyenne distance de la Terre au Soleil ;

F la force centrale du Soleil à la distance 1. Cette force a pour mesure l'espace qui seroit parcouru d'un mouvement uniforme, en vertu de la vitesse acquise pendant le tems donné ; ou, ce qui revient au même, le double de l'espace parcouru en vertu de la force centrale, dans un tems donné. Ainsi, par exemple, si l'on considere le mouvement de la Terre correspondant à une minute de tems, F sera alors le double du sinus verse de l'arc de l'orbite terrestre parcouru pendant une minute ; & comme la révolution sidérale de la Terre est de 365 jours 6h 9′ 11″ ; que de plus le sinus verse de l'arc décrit par la Terre pendant une minute, est égal au quarré de cet arc divisé par le diametre ; qu'enfin log (arc de l'orbite terrestre décrit pendant une minute) = 5,0772197 ; l'on a log F = 0,1544394.

R′ le rayon vecteur de la Comete, lors de la seconde observation.

Il est évident que la force centrale qui agit sur la Comete à la distance R′, a pour expression $\frac{F}{R'^2}$. Cette force agit toute entiere dans le sens du rayon vecteur ; & si on la décompose suivant les coordonnées x', y' de la trajectoire, il est clair que la force centrale qui agit suivant l'abscisse x', aura pour expression $\frac{Fx'}{R'^3}$, & que la force qui agit suivant l'ordonnée y', aura pour expression $\frac{Fy'}{R'^3}$. Maintenant si l'on n'a point égard à

la

masse de la Comete, & que l'on nomme 1 la masse du Soleil, il suit des équations (1) & (2) du paragraphe 409, que l'on a $\frac{d^2x'}{dT^2} + \frac{Fx'}{R'^3} = 0$; $\frac{d^2y'}{dT^2} + \frac{Fy'}{R'^3} = 0$; on pourra donc, dans les expressions de x, y, x'', y'' du §. 442, substituer $-\frac{Fx'}{R'^3}$ à $\frac{d^2x'}{dT^2}$, & $-\frac{Fy'}{R'^3}$ à $-\frac{d^2y'}{dT^2}$; & elles deviendront

$$x = x' - \frac{dx'}{dT}t - \frac{1}{2}\frac{Fx'}{R'^3}t^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3x'}{dT^3}t^3 + \&c.$$

$$y = y' - \frac{dy'}{dT}t - \frac{1}{2}\frac{Fy'}{R'^3}t^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3y'}{dT^3}t^3 + \&c.$$

$$x'' = x' + \frac{dx'}{dT}t' - \frac{1}{2}\frac{Fx'}{R'^3}t'^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x'}{dT^3}t'^3 + \&c.$$

$$y'' = y' + \frac{dy'}{dT}t - \frac{1}{2}\frac{Fy'}{R'^3}t'^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y'}{Td^3}t'^3 + \&c.$$

On peut conclure de ces valeurs, que si la durée du tems écoulé entre les observations que l'on compare étoit assez petite pour que les forces accélératrices $\frac{Fx'}{R'^3}$, $\frac{Fy'}{R'^3}$ pussent être regardées comme constantes pendant la durée des Phénomenes, les expressions de x, y, x'', y'', s'arrêteroient au troisieme terme. Et en effet, les termes suivans n'étant que les différentielles successives de ce troisieme terme, ils seroient tous nuls, puisque ce troisieme terme seroit constant.

Principe employé par Newton dans sa Philosophie Naturelle:

(444) Je dois encore parler d'un principe moins général que le précédent, puisqu'il ne s'applique qu'à la Parabole, mais dont on peut aussi faire usage. Fig. 15.

Soit

A M A' M' une Parabole dont F est le foyer, & dont la ligne D H est la directrice;

Soit de plus

C la corde M M' de la Parabole;

R, R'', les rayons vecteurs correspondans aux extrêmités M, M' de la corde;

R' le rayon vecteur correspondant au sommet A' du diametre qui coupe la corde MM' en deux parties égales;

t'' le nombre de minutes de tems que la Comete emploie à parcourir l'arc M M' compris entre les deux rayons vecteurs R, R''.

f la partie A'a du diametre passant par le point A', interceptée entre le sommet A' & la corde MM',

Fig. 15. Il est aisé de démontrer que l'on a l'équation suivante,

$$(1)\quad 16\,f R' - C^2 = 0.$$

En effet, on sait que dans la Parabole, pour un point quelconque de la courbe, le rayon vecteur FA′ est égal à la perpendiculaire A′H, abaissée du même point A′ sur la directrice DH. Cette propriété est une suite de la propriété commune aux sections coniques, dans lesquelles on a généralement FA′ : A′H :: AF : AD. Et comme dans la Parabole, AF = AD, l'on a FA′ = A′H. L'on sait pareillement que si l'on veut déterminer l'équation à la parabole, par rapport à un diametre quelconque A′a, & aux coordonnées aM, aM′, cette équation a la même forme que l'équation par rapport à l'axe de la Parabole; c'est-à-dire, que si l'on nomme f l'abscisse A′a de la Parabole, $\frac{1}{2}$ C chacune des ordonnées, aM, aM′, P le parametre de la section relativement au diametre A′a; l'on a $\frac{1}{4}C^2 - fP = 0$. De plus, dans la parabole, $P = 4A'H = 4R'$; donc l'équation (1) est démontrée.

(445) Nous avons vu dans le §. 443 que si l'on conserve l'expression de F de ce paragraphe, la force centrale qui agit sur la Comete à la distance R′, a pour expression $\frac{F}{R'^2}$; cette force agit toute entiere dans le sens du rayon vecteur. D'ailleurs dans les mouvemens uniformément accélérés, les espaces parcourus en vertu des forces accélératrices constantes, sont comme les forces accélératrices multipliées par le quarré des tems. Si donc t'' exprime le nombre de minutes de tems employées par la Comete à parcourir l'arc MM′ de sa trajectoire parabolique, $\frac{t''}{2}$ sera sensiblement le tems employé par la Comete à parcourir la moitié de l'arc MM′; & l'on aura, attendu que $\frac{1}{2}$ F exprime l'espace dont la Terre s'approche du Soleil pendant une minute de tems à la distance 1,

Espace dont la Comete s'approche du Soleil, en vertu de la force accélératrice, dans le sens du rayon vecteur $= \frac{\frac{1}{2}F t''^2}{4R'^2}$.

Si par le point A′ l'on mene le rayon vecteur Fa′A′ qui coupe la corde MM′ en un point a′; comme par la propriété de la Parabole, A′a′ = l'abscisse A′a de la Parabole, abscisse que nous avons nommée f; que de plus $A'a' = \frac{\frac{1}{2}F t''^2}{4R'^2}$, l'on aura $f = \frac{F t''^2}{8R'^2}$; substituant cette valeur dans l'équation (1) du §. précédent l'on conclura

$$(1)\quad 2F t''^2 - R'C^2 = 0.$$

Soit maintenant

D la distance périhélie;
R′ le rayon vecteur correspondant au point A′ de la parabole;
Z l'angle du rayon vecteur FA′ avec l'axe FA;
R, R″ les rayons vecteurs correspondans aux points M, M′;
α la moitié de l'angle MFM′ intercepté entre les deux rayons vecteurs FM, FM′.

Par la nature de la Parabole, l'on a les équations suivantes, Fig. 15.

$$(2)\quad R(1+\cos(Z-\alpha))-2D=0;$$

$$(3)\quad R'(1+\cos Z)-2D=0;$$

$$(4)\quad R''(1+\cos(Z+\alpha))-2D=0.$$

Et les équations (2) & (4) peuvent être mises sous la forme suivante

$$(5)\quad R(1+\cos Z\cos\alpha+\sin Z\sin\alpha)-2D=0;$$

$$(6)\quad R''(1+\cos Z\cos\alpha-\sin Z\sin\alpha)-2D=0.$$

D'où l'on tire, en ajoutant ces équations, attendu que $4D = 2R'(1+\cos Z)$,

$$(7)\quad 2R'(1+\cos Z)=(R+R'')(1+\cos Z\cos\alpha)+(R-R'')\sin Z\sin\alpha.$$

Si l'on suppose que l'angle α est assez petit pour que $\cos\alpha$ puisse, sans erreur notable, être supposé $=1$, l'équation (7) deviendra

$$(8)\quad R'=\frac{R+R''}{2}+\frac{(R-R'')\sin Z\sin\alpha}{1+\cos Z};$$

Mais à cause des équations (2) & (4), $R\sin Z\sin\alpha - R''\sin Z\sin\alpha =$
$$2D\sin Z\sin\alpha\left(\frac{1}{1+\cos(Z-\alpha)}-\frac{1}{1+\cos(Z+\alpha)}\right)=$$
$$\frac{2D\sin Z\sin\alpha(\cos(Z+\alpha)-\cos(Z-\alpha))}{(1+\cos(Z-\alpha))(1+\cos(Z+\alpha))}=-\frac{4D\sin^2 Z\sin^2\alpha}{(1+\cos Z)^2},$$ en confondant dans la dénominateur de la fraction, $\cos(Z\pm\alpha)$ avec $\cos Z$. Donc

$$(9)\quad R'=\frac{R+R''}{2}-\frac{4D\sin^2 Z\sin^2\alpha}{(1+\cos Z)^3};$$

Et si l'on néglige le dernier terme, l'on aura,

$$(10)\quad R'=\frac{R+R''}{2}.$$

Substituant maintenant cette valeur de R', dans l'équation (1), elle deviendra

$$(11)\quad 4Ft''^2-(R+R'')C^2=0.$$

Telle est l'équation que l'on déduit du principe employé par Newton dans la Philosophie Naturelle; il est superflu d'avertir que cette équation n'est qu'approchée.

Considérations sur l'exactitude de l'équation (11) du paragraphe précédent.

(446) Je terminerai cet Article par des considérations sur l'exactitude de l'équation (11) du §. précédent. Cette équation se déduit des équations (1) du §. 444, (1) & (10) du §. 445. L'équation (1) du §. 444 est rigoureuse, ainsi il n'y a aucunes considérations à faire sur son exactitude; il n'en est pas de même des équations (1) & (10) du §. 445; ces équations ne sont qu'approchées.

J'obſerve d'abord que l'équation (10) du §. 445 n'eſt autre choſe que l'équation (9) du même paragraphe dans laquelle nous avons négligé le terme $-\frac{4D\,\text{ſin}^2 Z\,\text{ſin}^2 \alpha}{(1+\text{coſ}\,Z)^3}$. Mais, à cauſe des équations (3) & (10) du §. 445, $4D = 2R'(1+\text{coſ}\,Z) = (R+R'')(1+\text{coſ}\,Z)$; donc l'équation (9) peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$R' = (R+R'')\left(\frac{1}{2} - \frac{\text{ſin}^2 Z\,\text{ſin}^2 \alpha}{(1+\text{coſ}\,Z)^2}\right);$$

On voit par là que ſi, lorſque l'on obſerve une Comete, les circonſtances de ſon mouvement ſont telles que la quantité $\frac{1}{2} - \frac{\text{ſin}^2 Z\,\text{ſin}^2 \alpha}{(1+\text{coſ}\,Z)^2}$ puiſſe ſenſiblement ſe réduire à $\frac{1}{2}$, l'équation (10) du §. 445 ſera ſuffiſament exacte; & c'eſt ce qui a lieu pour toutes les Cometes, lorſqu'elles ſont viſibles, ainſi que nous allons le démontrer.

Une ſeconde condition néceſſaire pour l'exactitude de l'équation (11), eſt que l'équation (1) du §. 445 ſoit elle-même ſuffiſament exacte. Cette condition ſera remplie toutes les fois que dans l'intervalle que l'on conſidere, la diſtance de la Comete à la Terre variera d'une maniere aſſez peu ſenſible pour que la force accélératrice puiſſe être conſidérée comme conſtante. Or cette condition a également lieu pour toutes les Cometes, dans les circonſtances où l'on peut les obſerver.

Pour démontrer ces aſſertions, nous remarquerons que l'on ne peut obſerver une Comete que lorſque ſa diſtance au Soleil meſurée ſur un grand cercle de la ſphere, ſurpaſſe 30^d. Dans toute autre poſition; ou la Comete eſt trop près de l'horiſon pour pouvoir être obſervée, ou ſa lumiere eſt éteinte par les crépuſcules. Mais lorſque la Comete eſt éloignée de 30^d du Soleil, ſa diſtance au Soleil eſt au moins égale à $\frac{1}{2}$; puiſque la diſtance de la Terre au Soleil étant 1, ſi l'on joint les centres du Soleil, de la Terre & de la Comete par des lignes droites, dans le triangle rectiligne dont il s'agit, le côté oppoſé à l'angle à la Terre, que nous ſuppoſons de 30^d, ne peut être plus petit que $\frac{1}{2}$. Voyons donc, d'après les équations à la Parabole, ce qui a lieu lorſque le rayon vecteur de la Comete eſt au moins égal à $\frac{1}{2}$.

Pour déterminer ce qui a lieu lorſque le rayon vecteur de la Comete eſt au moins égal à $\frac{1}{2}$, je reprends l'équation (3) du §. 434,

$$t = 109{,}6153\left(\tfrac{1}{4}(R-D)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}D(R-D)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Dans cette équation, t exprime des jours. Je différencie cette équation, & j'ai

$$dt\sqrt{(R-D)} - 41{,}106\,R\,dR = 0.$$

De plus d force accélératrice $= -2 \times$ force accélératrice $\times \frac{dR}{R}$
$= -\frac{\text{force accélératrice}\; dt\sqrt{(R-D)}}{20{,}553\;R^2}$;

D'où l'on voit que le tems qui répond à une petite variation de la force accélératrice, est assez considérable lorsque $R = \frac{1}{2}$; on peut donc être assuré de la légitimité de l'équation (1) du §. 445.

Pour déterminer ce qui est relatif à la légitimité de l'équation (10) du §. 445, je reprends l'équation générale à la parabole

$$R(1 + \cos Z) - 2D = 0.$$

Je différencie cette équation, & j'ai $2D\,dR - R^2 \sin Z\,dZ = 0$; je substitue à dR sa valeur tirée des équations précédentes, & j'ai enfin

$$D\sqrt{(R-D)}\,dt - 20{,}553\; R^3 \sin Z\,dZ = 0.$$

D'où l'on voit que le tems qui répond à une petite variation de Z est assez considérable lorsque $R = \frac{1}{2}$; on peut donc encore être assuré de la légitimité de l'équation (10) du §. 445.

Il suit de là que l'équation (11) du §. 445, n'est pas, si l'on veut, rigoureuse en général, mais elle est suffisament exacte pour toutes les circonstances où les Cometes peuvent être observées, lorsque les intervalles entre les observations extrêmes ne sont pas considérables.

Eclaircissemens sur une équation du §. 427.

(447) Les équations (1) & (2) du §. 427 sont fondées sur la proposition suivante. Soit

- δ l'espace que parcourt un corps grave à la surface d'un sphéroïde, sous une certaine latitude, pendant un tems donné, par exemple, pendant une seconde;
- δ' l'espace que parcourt un corps grave à la surface du même sphéroïde, sous une autre latitude, pendant le même tems;
- L la latitude correspondante à l'espace δ;
- L' la latitude correspondante à l'espace δ';
- R le rayon du sphéroïde, sous la latitude L;
- R' le rayon du sphéroïde sous la latitude L'.

J'ai supposé que l'on avoit

$$(1)\quad \frac{\delta}{\delta'} = \frac{R'^2}{R^2}.$$

Examinons si cette proposition peut être employée pour la Terre.

Si l'on nomme

- 1 le demi-petit axe de la Terre;
- $1 + \epsilon$ le demi-grand axe;

L'on a rigoureusement

$$R^2 = \frac{(1+\epsilon)^4 \cos^2 L + \sin^2 L}{(1+\epsilon)^2 \cos^2 L + \sin^2 L},$$

$$R'^2 = \frac{(1+\epsilon)^4 \cos^2 L' + \sin^2 L'}{(1+\epsilon)^2 \cos^2 L' + \sin^2 L'}.$$

Si l'on réduit ces quantités en série, & que l'on néglige les puissances de ϵ supérieures à la premiere puissance, l'on aura

$$R^2 = 1 + 2\epsilon \cos^2 L;$$

$$R'^2 = 1 + 2\epsilon \cos^2 L';$$

D'où l'on conclura

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{1 + 2\epsilon \cos^2 L'}{1 + 2\epsilon \cos^2 L} = 1 - 2\epsilon (\cos^2 L - \cos^2 L').$$

Voyons maintenant ce que la méchanique nous apprend.

Clairaut, dans sa théorie de la figure de la Terre, a démontré qu'en conservant nos définitions de δ, δ', l'on a

$$\delta : \delta' :: 1 - \epsilon' \cos^2 L : 1 - \epsilon' \cos^2 L';$$

ϵ' étant un coéficient qu'il faut déterminer par observation.

De cette proportion l'on tire

$$(3)\ \frac{\delta}{\delta'} = 1 - \epsilon' (\cos^2 L - \cos^2 L'),$$

D'où l'on voit que si ϵ' égaloit 2ϵ, l'on auroit rigoureusement

$$(4)\ \frac{\delta}{\delta'} = \frac{R'^2}{R^2}.$$

Les quantités ϵ' & 2ϵ ne sont pas rigoureusement égales entr'elles ; de sorte que les résultats auxquels nous sommes parvenus ne sont pas aussi précis que ceux auxquels on parviendroit par une méthode absolument rigoureuse ; mais il est facile de s'assurer que l'approximation est assez grande.

Au reste, si l'on vouloit avoir des résultats plus rigoureux ; au lieu d'une équation de la forme de celle de l'équation (2) du §. 427, l'on auroit une équation de la forme suivante,

$$(5)\ \frac{l}{l'} - \frac{R'^2}{R^2} - (2\epsilon - \epsilon')(\cos^2 L - \cos^2 L') = 0.$$

Dans cette derniere équation, 2ϵ est le rapport de deux fois la différence des demi-axes du sphéroïde, au demi-petit axe que l'on prendra pour l'unité ; ϵ' est le rapport de la différence des espaces parcourus par des corps graves au pole & à l'équateur pendant la premiere seconde de leurs chutes, à l'espace total qui seroit parcouru par un corps grave sous le pole pendant le même tems, ce dernier espace étant pris pour l'unité.

Cette derniere équation ne differe de celle que nous avons employée dans le §. 427 que par le terme $(2\epsilon - \epsilon')(\cos^2 L - \cos^2 L')$, terme très-petit vis-à-vis de $\frac{R'^2}{R^2}$, dans les suppositions qui ont lieu pour la Terre; ainsi qu'il est facile de s'en assurer, en calculant la valeur de $2\epsilon - \epsilon'$ pour toutes les suppositions plausibles sur l'ellipticité de notre globe. Dans le cas de la Terre, les observations ont appris, par un résultat moyen, que $\epsilon' = 0{,}00591$. Quant à la petitesse du terme $2\epsilon - \epsilon'$, elle tient principalement à la différente densité & à la disposition particuliére des parties de notre Globe. Dans le cas d'un sphéroïde homogéne, l'on auroit $\epsilon = \epsilon'$.

Table générale des Mouvemens des Cometes dans une orbite parabolique.

Jours.	Anomalie vraie.			Différences.		Jours.	Anomalie vraie.			Différences.		Jours.	Anomalie vraie.			Différences.	
	D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M	S.
0,00	0	0	0			14,00	19	9	1			28 00	36	23	44		
0,25	0	20	54	20	54	14,25	19	28	46	19	45	28,25	36	40	44	17	0
0,50	0	41	48	20	54	14,50	19	48	29	19	43	28,50	36	57	41	16	57
0,75	1	2	43	20	54	14,75	20	8	9	19	40	28,75	37	14	35	16	54
1,00	1	23	37	20	54	15,00	20	27	47	19	38	29,00	37	31	25	16	50
1,25	1	44	31	20	54	15,25	20	47	22	19	35	29,25	37	48	11	16	46
1,50	2	5	25	20	54	15,50	21	6	55	19	33	29,50	38	4	54	16	43
1,75	2	26	19	20	54	15,75	21	26	25	19	30	29,75	38	21	34	16	40
2,00	2	47	12	20	53	16,00	21	45	53	19	28	30,00	38	38	11	16	37
2,25	3	8	5	20	53	16,25	22	5	18	19	25	30,25	38	54	45	16	34
2,50	3	28	57	20	52	16,50	22	24	41	19	23	30,50	39	11	15	16	30
2,75	3	49	49	20	52	16,75	22	44	1	19	20	30,75	39	27	42	16	27
3,00	4	10	40	20	51	17,00	23	3	19	19	18	31,00	39	44	5	16	23
3,25	4	31	31	20	51	17,25	23	22	34	19	15	31,25	40	0	24	16	19
3,50	4	52	21	20	50	17,50	23	41	46	19	12	31,50	40	16	40	16	16
3,75	5	13	11	20	50	17,75	24	0	56	19	10	31,75	40	32	53	16	13
4,00	5	34	0	20	49	18,00	24	20	3	19	7	32,00	40	49	3	16	10
4,25	5	54	48	20	48	18,25	24	39	7	19	4	32,25	41	5	9	16	6
4,50	6	15	35	20	47	18,50	24	58	8	19	1	32,50	41	21	12	16	3
4,75	6	36	22	20	47	18,75	25	17	[illegible]	18	59	32,75	41	37	12	16	0
5,00	6	57	8	20	46	19,00	25	36	3	18	56	33,00	41	53	8	15	56
5,25	7	17	53	20	45	19,25	25	54	56	18	53	33,25	42	9	0	15	52
5,50	7	38	37	20	44	19,50	26	13	46	18	50	33,50	42	24	49	15	49
5,75	7	59	19	20	42	19,75	26	32	33	18	47	33,75	42	40	35	15	46
6,00	8	20	1	20	42	20,00	26	51	17	18	44	34,00	42	56	18	15	43
6,25	8	40	42	20	41	10,25	27	9	59	18	42	34,25	43	11	57	15	39
6,50	9	1	22	20	40	20,50	27	28	37	18	38	34,50	43	27	33	15	36
6,75	9	22	0	20	38	20,75	27	47	13	18	36	34,75	43	43	6	15	33
7,00	9	42	37	20	37	21,00	28	5	4[illegible]	19	32	35,00	43	58	35	15	29
7,25	10	3	12	20	36	21,25	28	24	15	18	27	35,25	44	14	1	15	26
7,50	10	23	48	20	35	21,50	28	42	41	18	26	35,50	44	29	23	15	22
7,75	10	44	21	20	33	21,75	29	1	5	18	24	35,75	44	44	42	15	19
8,00	11	4	53	20	32	22,00	29	19	2[illegible]	18	20	36,00	44	59	58	15	16
8,25	11	25	23	20	30	22,25	29	37	4[illegible]	18	17	36,25	45	15	10	15	12
8,50	11	45	52	20	29	22,50	29	55	57	18	15	36,50	45	30	19	15	9
8,75	12	6	20	20	28	22,75	30	14	8	18	11	36,75	45	45	25	15	6
9,00	12	26	46	20	26	23,00	30	32	16	18	8	37,00	46	0	27	15	2
9,25	12	47	10	20	24	23,25	30	50	21	18	5	37,25	46	15	26	14	59
9,50	13	7	33	20	23	23,50	31	8	23	18	2	37,50	46	30	21	14	55
9,75	13	27	54	20	21	23,75	31	26	21	17	58	37,75	46	45	13	14	52
10,00	13	48	13	20	19	24,00	31	44	17	17	56	38,00	47	0	2	14	49
10,25	14	8	31	20	18	24,25	32	2	9	17	52	38,25	47	14	48	14	46
10,50	14	28	47	20	16	24,50	32	19	58	17	49	38,50	47	29	30	14	42
10,75	14	49	1	20	14	24,75	32	37	44	17	46	38,75	47	44	9	14	37
11,00	15	9	13	20	12	25,00	32	55	27	17	43	39,00	47	58	45	14	36
11,25	15	29	23	20	10	25,25	33	13	6	17	39	39,25	48	13	17	14	32
11,50	15	49	32	20	9	25,50	33	30	42	17	36	39,50	48	27	46	14	29
11,75	16	9	38	20	6	25,75	33	48	15	17	33	39,75	48	42	12	14	26
12,00	16	29	42	20	4	26,00	34	5	45	17	30	40,00	48	56	34	14	22
12,25	16	49	45	20	3	26,25	34	23	12	17	27	40,25	49	10	53	15	19
12,50	17	9	45	20	0	26,50	34	40	35	17	23	40,50	49	25	9	14	16
12,75	17	29	43	19	58	26,75	34	57	55	17	20	40,75	49	39	22	14	13
13,00	17	49	39	19	56	27,00	35	15	12	17	17	41,00	49	53	32	14	10
13,25	18	9	32	19	53	27,25	35	32	25	17	13	41,25	50	7	38	14	6
13,50	18	29	24	19	52	27,50	35	49	35	17	10	41,50	50	21	41	14	3
13,75	18	49	14	19	50	27,75	36	6	41	17	6	41,75	50	35	41	14	0
14,00	19	9	1	19	47	28,00	36	23	44	17	3	42,0	50	49	38	13	57

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Comètes.

Jours.	Anomalie vraie. D. M. S.	Différences. M. S.	Jours.	Anomalie vraie. D. M. S.	Différences M. S.	Jours.	Anomalie vraie. D. M. S.	Différences M. S.
42,00	50 49 38		56,00	62 29 32		70,00	71 51 23	
42,25	51 3 31	13 53	56,25	62 40 41	11 9	70,25	72 0 21	8 5[illegible]
42,50	51 17 21	13 50	56,50	62 51 47	11 6	70,50	72 9 18	8 57
42,75	51 31 8	13 47	56,75	63 2 51	11 4	70,75	72 18 12	8 54
43,00	51 44 52	13 44	57,00	63 13 52	11 1	71,00	72 27 4	8 52
43,25	51 58 33	13 41	57,25	63 24 50	10 58	71,25	72 35 54	8 50
43,50	52 12 10	13 37	57,50	63 35 46	10 56	71,50	72 44 42	8 48
43,75	52 25 44	13 34	57,75	63 46 39	10 53	71,75	72 53 29	8 47
44,00	52 39 15	13 31	58,00	63 57 30	10 51	72,00	73 2 13	8 44
44,25	52 52 43	13 28	58,25	64 8 18	10 48	72,25	73 10 55	8 42
44,50	53 6 8	13 25	58,50	64 19 4	10 46	72,50	73 19 36	8 41
44,75	53 19 30	13 22	58,75	64 29 47	10 43	72,75	73 28 15	8 39
45,00	53 32 48	13 18	59,00	64 40 28	10 41	73,00	73 36 51	8 36
45,25	53 46 3	13 15	59,25	64 51 6	10 38	73,25	73 45 26	8 35
45,50	53 59 16	13 13	59,50	65 1 42	10 36	73,50	73 53 58	8 32
45,75	54 12 26	13 10	59,75	65 12 15	10 33	73,75	74 2 29	8 31
46,00	54 25 32	13 6	60,00	65 22 45	10 30	74,00	74 10 58	8 29
46,25	54 38 35	13 3	60,25	65 33 13	10 28	74,25	74 19 25	8 27
46,50	54 51 35	13 0	60,50	65 43 39	10 26	74,50	74 27 50	8 25
46,75	55 4 32	12 57	60,75	65 54 2	10 23	74,75	74 36 13	8 23
47,00	55 17 26	11 54	61,00	66 4 23	10 21	75,00	74 44 34	8 21
47,25	55 30 17	12 51	61,25	66 14 41	10 18	75,25	74 52 53	8 19
47,50	55 43 5	12 48	61,50	66 24 57	10 16	75,50	75 1 11	8 18
47,75	55 55 49	12 44	61,75	66 35 11	10 14	75,75	75 9 27	8 16
48,00	56 8 31	12 42	62,00	66 45 22	10 11	76,00	75 17 41	8 14
48,25	56 21 10	12 39	62,25	66 55 31	10 9	76,25	75 25 53	8 12
48,50	56 33 46	12 36	62,50	67 5 37	10 6	76,50	75 34 3	8 10
48,75	56 46 19	12 33	62,75	67 15 41	10 4	76,75	75 42 12	8 9
49,00	56 58 49	12 30	63,00	[illegible] 25 43	10 2	77,00	75 50 19	8 7
49,25	57 11 16	12 27	63,25	67 35 42	9 59	77,25	75 58 24	8 5
49,50	57 23 41	12 25	63,50	67 45 39	9 57	77,50	76 6 27	8 3
49,75	57 36 2	12 21	63,75	67 55 34	9 55	77,75	76 14 28	8 1
50,00	57 48 20	12 18	64,00	68 5 27	9 53	78,00	76 22 28	8 0
50,25	58 0 35	12 15	64,25	6[illegible] 15 17	9 50	78,25	76 30 26	7 58
50,50	58 12 47	12 12	64,50	68 25 5	9 48	78,50	76 38 22	7 56
50,75	58 24 57	12 10	64,75	68 34 51	9 46	78,75	76 46 16	7 54
51,00	58 37 4	12 7	65,00	68 44 34	9 43	79,00	76 54 9	7 53
51,25	58 49 8	12 4	65,25	68 54 15	9 41	79,25	77 2 0	7 51
51,50	59 1 9	11 1	65,50	69 3 54	9 39	79,50	77 9 49	7 49
51,75	59 13 7	11 58	65,75	69 13 31	9 37	79,75	77 17 37	7 48
52,00	59 25 3	11 56	66,00	69 23 5	9 34	80,00	77 25 23	7 46
52,25	59 36 35	11 52	66,25	69 32 37	9 32	80,25	77 33 7	7 44
52,50	59 48 45	11 50	66,50	69 42 7	9 30	80,50	77 40 50	7 43
52,75	60 0 32	11 47	66,75	69 51 35	9 28	80,75	77 48 31	7 41
53,00	60 12 16	11 44	67,00	70 1 1	9 26	81,00	77 56 10	7 39
53,25	60 23 57	11 41	67,25	70 10 25	9 24	81,25	78 3 48	7 38
53,50	60 35 36	11 39	67,50	70 19 46	9 21	81,50	78 11 24	7 36
53,75	60 47 12	11 36	67,75	70 29 5	9 19	81,75	78 18 58	7 34
54,00	60 58 45	11 33	68,00	70 38 22	9 17	82,00	78 26 31	7 33
54,25	61 10 15	11 30	68,25	70 47 37	9 15	82,25	78 34 2	7 31
54,50	61 21 43	11 28	68,50	70 56 50	9 13	82,50	78 41 31	7 29
54,75	61 33 8	11 25	68,75	71 6 1	9 11	82,75	78 48 59	7 28
55,00	61 44 30	11 22	69,00	71 15 10	9 9	83,00	78 56 25	7 26
55,25	61 55 50	11 20	69,25	71 24 16	9 6	83,25	79 3 50	7 25
55,50	62 7 7	11 17	69,50	71 33 20	9 4	83,50	79 11 13	7 23
55,75	62 18 21	11 14	69,75	71 42 22	9 2	83,75	79 18 35	7 22
56,00	62 29 32	11 11	70,00	71 51 23	9 1	84,00	79 25 55	7 20

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

Jours.	Anomalie vraie.			Différences.		Jours.	Anomalie vraie.			Différences.		Jours.	Anomalie vraie.			Différences.	
	D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.
84,00	79	25	55	7	18	98,00	85	38	42	6	3	114,0	91	29	17	9	54
84,25	79	33	13	7	17	98,25	85	44	45	6	1	114,5	91	39	11	9	50
84,50	79	40	30	7	15	98,50	85	50	46	6	0	115,0	91	49	1	9	47
84,75	79	47	45	7	14	98,75	85	56	46	5	59	115,5	91	58	48	9	43
85,00	79	54	59	7	13	99,00	86	2	45	5	58	116,0	92	8	31	9	39
85,25	0	2	12	7	11	99,25	86	8	43	5	56	116,5	92	18	10	9	36
85,50	80	9	23	7	9	99,50	86	14	39	5	55	117,0	92	27	46	9	33
85,75	80	16	32	7	8	99,75	86	20	34	5	55	117,5	92	37	19	9	29
86,00	80	23	40	7	6	100,00	86	26	29	5	53	118,0	92	46	48	9	26
86,25	80	30	46	7	5	100,25	86	32	22	5	52	118,5	92	56	14	9	23
86,50	80	37	51	7	3	100,50	86	38	14	5	51	119,0	93	5	37	9	20
86,75	80	44	54	7	2	100,75	86	44	5	5	50	119,5	93	14	57	9	17
87,00	80	51	56	7	0	101,00	86	49	55	5	49	120,0	93	24	14	9	13
87,25	80	58	56	6	59	101,25	86	54	44	5	47	120,5	93	33	27	9	10
87,50	81	5	55	6	57	101,50	87	1	31	5	46	121,0	93	42	37	9	7
87,75	81	12	52	6	56	101,75	87	7	17	5	46	121,5	93	51	44	9	4
88,00	81	19	48	6	55	102,00	87	13	3	5	44	122,0	94	0	48	9	1
88,25	81	26	43	6	53	102,25	87	18	47	5	43	122,5	94	9	49	8	58
88,50	81	33	36	6	52	102,50	87	24	30	5	42	123,0	94	18	47	8	55
88.7	81	40	28	6	50	102,75	87	30	12	5	41	123,5	94	27	42	8	52
89,00	81	47	18	6	49	103,00	87	35	53	5	40	124,0	94	36	34	8	49
89,25	81	54	7	6	47	103,25	87	41	33	5	39	124,5	94	45	23	8	46
89,50	82	0	54	6	46	103,50	87	47	12	5	38	125,0	94	54	9	8	43
89,75	82	7	40	6	45	103,75	87	52	50	5	37	125,5	95	2	52	8	41
90,00	82	14	25	6	43	104,00	87	58	27	5	35	126,0	95	11	33	8	37
90,25	82	21	8	6	42	104,25	88	4	2	5	35	126,5	95	20	10	8	35
90,50	82	27	50	6	41	104,50	88	9	37	5	33	127,0	95	28	45	8	32
90,75	82	34	31	6	39	104,75	88	15	10	5	33	127,5	95	37	17	8	29
91,00	82	41	10	6	38	105,00	88	20	43	5	31	128,0	95	45	46	8	26
91,25	82	47	48	6	37	105,25	88	26	14	5	31	128,5	95	54	12	8	23
91,50	82	54	25	6	35	105,50	88	31	45	5	29	129,0	96	2	35	8	21
91,75	83	1	0	6	34	105,75	88	37	14	5	29	129,5	96	10	56	8	18
92,00	83	7	34	6	33	106,00	88	42	43	5	27	130,0	96	19	14	8	15
92,25	83	14	7	6	31	106,25	88	48	10	5	27	130,5	96	27	29	8	13
92,50	83	20	38	6	30	106,50	88	53	37	5	25	131,0	96	35	42	8	10
92,75	83	27	8	6	28	106,75	88	59	2	5	24	131,5	96	43	52	8	8
93,00	83	33	36	6	27	107,00	89	4	26	5	23	132,0	96	52	0	8	5
93,25	83	40	3	6	26	107,25	89	9	49	5	22	132,5	97	0	5	8	2
93,50	83	46	29	6	25	107,50	89	15	11	5	22	133,0	97	8	7	8	0
93,75	83	52	54	6	23	107,75	89	20	33	5	20	133,5	97	16	7	7	57
94,00	83	59	17	6	22	108,00	89	25	53	5	20	134,0	97	24	4	7	55
94,25	84	5	39	6	21	108,25	89	31	13	5	18	134,5	97	31	59	7	52
94,50	84	12	0	6	20	108,50	89	36	31	5	18	135,0	97	39	51	7	50
94,75	84	18	20	6	18	108,75	89	41	49	5	16	135,5	97	47	41	7	47
95,00	84	24	38	6	17	109,00	89	47	5	5	16	136,0	97	55	28	7	45
95,25	84	30	55	6	16	109,25	89	52	21	5	14	136,5	98	3	13	7	43
95,50	84	37	11	6	15	109,50	89	57	35	5	14	137,0	98	10	56	7	40
95,75	84	43	26	6	13	109,75	90	2	49	5	12	137,5	98	18	36	7	38
96,00	84	49	39	6	12	110,00	90	8	1	10	22	138,0	98	26	14	7	36
96,25	84	55	51	6	11	110,50	90	18	23	10	19	138,5	98	33	50	7	33
96,50	85	2	2	6	10	111,00	90	28	42	10	15	139,0	98	41	23	7	31
96,75	85	8	12	6	8	111,50	90	38	57	10	11	139,5	98	48	54	7	28
97,00	85	14	20	6	7	112,00	90	49	8	10	8	140,0	98	56	22	7	27
97,25	85	20	27	6	6	112,50	90	59	16	10	4	140,5	99	3	49	7	24
97,50	85	26	33	6	5	113,00	91	9	20	10	0	141,0	99	11	13	7	22
97,75	85	32	38	6	4	113,50	91	19	20	9	57	141,5	99	18	35	7	20
98,00	85	38	42			114,00	91	29	17			142,0	99	25	54		

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

JOURS.	ANOMALIE VRAIE.			Différences.		JOURS.	ANOMALIE VRAIE.			Différences		JOURS.	ANOMALIE VRAIE.			Différences.	
	D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M	
142,0	99	25	54	7	18	170,0	105	25	5	5	37	206	111	16	49	8	28
142,5	99	33	12	7	15	170,5	105	30	42	5	36	207	111	25	17	8	24
143,0	99	40	27	7	13	171,0	105	36	18	5	34	208	111	33	41	8	20
143,5	99	47	40	7	11	171,5	105	41	52	5	33	209	111	42	1	8	16
144,0	99	54	51	7	9	172,0	105	47	25	5	32	210	111	50	17	8	13
144,5	100	2	0	7	6	172,5	105	52	57	5	30	211	111	58	30	8	10
145,0	100	9	6	7	4	173,0	105	58	27	5	29	212	112	6	40	8	6
145,5	100	16	10	7	3	173,5	106	3	56	5	27	213	112	14	46	8	2
146,0	100	23	13	7	1	174,0	106	9	23	5	26	214	112	22	48	8	0
146,5	100	30	14	6	59	174,5	106	14	49	5	25	215	112	30	48	7	56
147,0	100	37	13	6	56	175,0	106	20	14	5	23	216	112	38	44	7	53
147,5	100	44	9	6	54	175,5	106	25	37	5	22	217	112	46	37	7	49
148,0	100	51	3	6	52	176,0	106	30	59	5	21	218	112	54	26	7	46
148,5	100	57	55	6	50	176,5	106	36	20	5	19	219	113	2	12	7	44
149,0	101	4	45	6	48	177,0	106	41	39	5	18	220	113	9	56	7	40
149,5	101	11	33	6	47	177,5	106	46	57	5	17	221	113	17	36	7	37
150,0	101	18	20	6	44	178,0	106	52	14	5	16	222	113	25	13	7	34
150,5	101	25	5	6	42	178,5	106	57	30	5	14	223	113	32	47	7	30
151,0	101	31	47	6	41	179,0	107	2	44	5	13	224	113	40	17	7	28
151,5	101	38	28	6	38	179,5	107	7	57	5	11	225	113	47	45	7	25
152,0	101	45	6	6	37	180,0	107	13	8	5	10	226	113	55	10	7	22
152,5	101	51	43	6	35	180,5	107	18	18	5	9	227	114	2	32	7	19
153,0	101	58	18	6	33	181,0	107	23	27	5	8	228	114	9	51	7	16
153,5	102	4	51	6	32	181,5	107	28	35	5	6	229	114	17	7	7	14
154,0	102	11	23	6	29	182,0	107	33	41	5	5	230	114	24	21	7	11
154,5	102	17	52	6	28	182,5	107	38	46	5	4	231	114	31	32	7	7
155,0	102	24	20	6	26	183,0	107	43	50	5	3	232	114	38	39	7	5
155,5	102	30	46	6	24	183,5	107	48	53	5	1	233	114	45	44	7	3
156,0	102	37	10	6	22	184,0	107	53	54	5	0	234	114	52	47	7	0
156,5	102	43	30	6	20	184,5	107	58	54	4	59	235	114	59	47	6	57
157,0	102	49	52	6	19	185,0	108	3	53	4	58	236	115	6	44	6	54
157,5	102	56	11	6	17	185,5	108	8	51	4	57	237	115	13	35	6	52
158,0	103	2	28	6	16	186,0	108	13	48	4	56	238	115	20	30	6	49
158,5	103	8	44	6	13	186,5	108	18	44	4	54	239	115	27	19	6	46
159,0	103	14	57	6	11	187,0	108	23	38	4	53	240	115	34	5	6	44
159,5	103	21	8	6	10	187,5	108	28	31	4	52	241	115	40	49	6	42
160,0	103	27	18	6	9	188,0	108	33	23	4	51	242	115	47	31	6	39
160,5	103	33	27	6	7	188,5	108	38	14	4	50	243	115	54	10	6	37
161,0	103	39	34	6	5	189,0	108	43	4	4	49	244	116	0	47	6	34
161,5	103	45	39	6	3	189,5	108	47	53	4	48	245	116	7	21	6	32
162,0	103	51	42	6	2	190	108	52	41	9	32	246	116	13	53	6	29
162,5	103	57	44	6	0	191	109	2	13	9	27	247	116	20	22	6	27
163,0	104	3	45	5	59	192	109	11	40	9	23	248	116	26	49	6	25
163,5	104	9	43	5	57	193	109	21	3	9	19	249	116	33	14	6	22
164,0	104	15	40	5	56	194	109	30	22	9	15	250	116	39	36	6	20
164,5	104	21	36	5	54	195	109	39	37	9	10	251	116	45	56	6	18
165,0	104	27	30	5	52	196	109	48	47	9	6	252	116	52	14	6	16
165,5	104	33	21	5	51	197	109	57	53	9	2	253	116	58	30	6	13
166,0	104	39	13	5	49	198	110	6	55	8	58	254	117	4	43	6	11
166,5	104	45	2	5	48	199	110	15	53	8	54	255	117	10	54	6	9
167,0	104	50	50	5	46	200	110	24	47	8	50	256	117	17	3	6	7
167,5	104	56	36	5	45	201	110	33	37	8	46	257	117	23	10	6	5
168,0	105	2	21	5	43	202	110	42	23	8	42	258	117	29	15	6	3
168,5	105	8	4	5	42	203	110	51	5	8	38	259	117	35	18	6	0
169,0	105	13	46	5	40	204	110	59	43	8	35	260	117	41	18	5	58
169,5	105	19	26	5	39	205	111	8	18	8	31	261	117	47	16	5	56
170,0	105	25	5			206	111	16	49			262	117	53	12		

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

Jours	Anomalie vraie.	Différences.	Jours.	Anomalie vraie.	Différences.	Jours.	Anomalie vraie.	Différences.
	D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.
262	117 53 12		318	122 39 45		374	126 19 17	
263	117 59 7	5 55	319	122 44 10	4 25	375	126 22 45	3 28
264	118 5 0	5 53	320	122 48 34	4 24	376	126 26 12	3 27
265	118 10 50	5 50	321	122 52 57	4 23	377	126 29 38	3 26
266	118 16 39	5 49	322	122 57 18	4 21	378	126 33 4	3 26
267	118 22 25	5 46	323	123 1 38	4 20	379	126 36 29	3 25
268	118 28 10	5 45	324	123 5 57	4 19	380	126 39 53	3 24
269	118 33 52	5 42	325	123 10 15	4 18	381	126 43 16	3 23
270	118 39 33	5 41	326	123 14 32	4 17	382	126 46 39	3 23
271	118 45 12	5 39	327	123 18 48	4 16	383	126 50 0	3 21
272	118 50 49	5 37	328	123 23 2	4 14	384	126 53 21	3 21
273	118 56 24	5 35	329	123 27 15	4 13	385	126 56 41	3 20
274	119 1 57	5 33	330	123 31 27	4 12	386	127 0 0	3 19
275	119 7 28	5 31	331	123 35 38	4 11	387	127 3 19	3 19
276	119 12 58	5 30	332	123 39 48	4 10	388	127 6 37	3 18
277	119 18 26	5 28	333	123 43 56	4 8	389	127 9 54	3 17
278	119 23 52	5 26	334	123 48 4	4 8	390	127 13 10	3 16
279	119 29 16	5 24	335	123 52 0	4 6	391	127 16 25	3 15
280	119 34 39	5 23	336	123 56 16	4 6	392	127 19 40	3 15
281	119 40 0	5 21	337	124 0 20	4 4	393	127 22 54	3 14
282	119 45 19	5 19	338	124 4 23	4 3	394	127 26 7	3 13
283	119 50 36	5 17	339	124 8 25	4 2	395	127 29 20	3 13
284	119 55 52	9 16	340	124 12 26	4 1	396	127 32 32	3 12
285	120 1 6	5 14	341	124 16 26	4 0	397	127 35 43	3 11
286	120 6 19	5 13	342	124 20 25	3 59	398	127 38 53	3 10
287	120 11 30	5 11	343	124 24 23	3 58	399	127 42 3	3 10
288	120 16 39	5 9	344	124 28 20	3 57	400	127 45 12	3 9
289	120 21 46	5 7	345	124 32 15	3 55	402	127 51 28	6 16
290	120 26 42	5 6	346	124 36 10	3 55	404	127 57 41	6 13
291	120 31 56	5 4	347	124 40 4	3 54	406	128 3 51	6 10
292	120 36 59	5 3	348	124 43 57	3 53	408	128 9 58	6 7
293	120 42 1	5 2	349	124 47 48	3 51	410	128 16 3	6 5
294	120 47 1	5 0	350	124 51 39	3 51	412	128 22 6	6 3
295	120 51 59	4 59	351	124 55 29	3 50	414	128 28 5	5 59
296	120 56 55	4 56	352	124 59 17	3 48	416	128 34 2	5 57
297	121 1 50	4 55	353	125 3 5	3 48	418	128 39 56	5 54
298	121 6 44	4 54	354	125 6 52	3 47	420	128 45 49	5 53
299	121 11 36	4 52	355	125 10 38	3 46	422	128 51 38	5 49
300	121 16 27	4 51	356	125 14 23	3 45	424	128 57 25	5 47
301	121 21 17	4 50	357	125 18 17	3 44	426	129 3 10	5 45
302	121 26 5	4 48	358	125 21 50	3 43	428	129 8 52	5 42
303	121 30 51	4 46	359	125 25 32	3 42	430	129 14 32	5 40
304	121 35 36	4 45	360	125 29 13	3 41	432	129 20 9	5 37
305	121 40 20	4 44	361	125 32 54	3 41	434	129 25 44	5 35
306	121 45 2	4 42	362	125 36 33	3 39	436	129 31 17	5 33
307	121 49 43	4 41	363	125 40 11	3 38	438	129 36 48	5 31
308	121 54 23	4 40	364	125 43 49	3 38	440	129 42 16	5 28
309	121 59 1	4 38	365	125 47 26	3 37	442	129 47 43	5 27
310	122 3 38	4 37	366	125 51 2	3 36	444	129 53 7	5 24
311	122 8 13	4 35	367	125 54 36	3 34	446	129 58 29	5 22
312	122 12 47	4 34	368	125 58 10	3 34	448	130 3 48	5 19
313	122 17 20	4 33	369	126 1 44	3 34	450	130 9 6	5 18
314	122 21 52	4 32	370	126 5 16	3 32	452	130 14 21	5 15
315	122 26 22	4 30	371	126 8 47	3 31	454	130 19 35	5 14
316	122 30 51	4 29	372	126 12 18	3 31	456	130 24 46	5 11
317	122 35 18	4 27	373	126 15 48	3 30	458	130 29 51	5 9
318	121 39 45	4 27	374	126 19 17	3 29	460	130 35 3	5 8

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

JOURS.	ANOMALIE VRAIE. D. M. S.	Différences. M. S.	JOURS.	ANOMALIE VRAIE. D. M. S.	Différences M. S.	JOURS.	ANOMALIE VRAIE. D. M. S.	Différences. M. S.
460	130 35 3		572	134 38 0		684	137 39 28	
462	130 40 8	5 5	574	134 41 41	3 41	686	137 42 18	2 50
464	130 45 12	5 4	576	134 45 22	3 41	688	137 45 8	2 50
466	130 50 13	5 1	578	134 49 1	3 39	690	137 47 57	2 49
468	130 55 13	5 0	580	134 52 39	3 38	692	137 50 45	2 48
470	131 0 10	4 57	582	134 56 16	3 37	694	137 53 32	2 47
472	131 5 6	4 56	584	134 59 51	3 35	696	137 56 19	2 47
474	131 10 0	4 54	586	135 3 26	3 35	698	137 59 5	2 46
476	131 14 52	4 52	588	135 7 0	3 34	700	138 1 51	2 46
478	131 19 43	4 51	590	135 10 32	3 32	705	138 8 42	6 51
480	131 24 31	4 48	592	135 14 4	3 32	710	138 15 29	6 47
482	131 29 18	4 47	594	135 17 35	3 31	715	138 22 11	6 42
484	131 34 3	4 45	596	135 21 4	3 29	720	138 28 49	6 38
486	131 38 46	4 43	598	135 24 32	3 28	725	138 35 23	6 34
488	131 43 27	4 41	600	135 28 0	3 28	730	1 8 41 52	6 29
490	131 48 7	4 40	602	135 31 26	3 26	735	138 48 18	6 26
492	131 52 45	4 38	604	135 34 51	3 25	740	138 54 41	6 21
494	131 57 22	4 37	606	135 38 16	3 25	745	139 1 0	6 19
496	132 1 57	4 35	608	135 41 39	3 23	750	139 7 15	6 15
498	132 6 30	4 33	610	135 45 2	3 23	755	139 13 27	6 12
500	132 11 1	4 31	612	135 48 24	3 22	760	139 19 35	6 8
502	132 15 31	4 30	614	135 51 44	3 20	765	139 25 39	6 4
504	132 19 59	4 28	616	135 55 3	3 19	770	139 31 40	6 1
506	132 24 26	4 27	618	135 58 21	3 18	775	139 37 37	5 57
508	132 28 51	4 25	620	136 1 39	3 18	780	139 43 31	5 54
510	132 33 15	4 24	622	136 4 55	3 16	785	139 49 21	5 50
512	132 37 37	4 22	624	136 8 11	3 16	790	139 55 9	5 48
514	132 41 58	4 21	626	136 11 26	3 15	795	140 0 54	5 45
516	132 46 17	4 19	628	136 14 40	3 14	800	140 6 35	5 41
518	132 50 35	4 18	630	136 17 53	3 13	805	140 12 13	5 38
520	132 54 51	4 16	632	136 21 5	3 12	810	140 17 48	5 35
5 2	132 59 6	4 15	634	136 24 16	3 11	815	140 23 20	5 32
524	133 3 19	4 13	636	136 27 27	3 11	820	140 28 49	5 29
526	133 7 31	4 12	638	136 30 37	3 10	825	140 34 15	5 26
528	133 11 41	4 10	640	136 33 46	3 9	830	140 39 39	5 24
530	133 15 50	4 9	642	136 36 54	3 8	835	140 45 0	5 21
532	133 19 58	4 8	644	136 40 1	3 7	840	140 50 18	5 18
534	133 24 4	4 6	646	136 43 7	3 6	845	140 55 33	5 15
536	133 28 9	4 5	648	136 46 12	3 5	850	141 0 45	5 12
538	133 32 13	4 4	650	136 49 16	3 4	855	141 5 55	5 10
540	133 36 15	4 2	652	136 52 19	3 3	860	141 11 2	5 7
542	133 40 16	4 1	654	136 55 22	3 3	865	141 16 7	5 5
544	133 44 16	4 0	656	136 58 24	3 2	870	141 21 9	5 2
546	133 48 14	3 58	658	137 1 25	3 1	875	141 26 8	4 59
548	133 52 11	3 57	660	137 4 25	3 0	880	141 31 5	4 57
550	133 56 7	3 56	662	137 7 24	2 59	885	141 36 0	4 55
552	134 0 2	3 55	664	137 10 23	2 59	890	141 40 52	4 52
554	134 3 55	3 53	666	137 13 21	2 58	895	141 45 42	4 50
556	134 7 47	3 52	668	137 16 18	2 57	900	141 50 30	4 48
558	134 11 38	3 51	670	137 19 15	2 57	905	141 55 15	4 45
560	134 15 27	3 49	672	137 22 11	2 56	910	141 59 58	4 43
562	134 19 16	3 49	674	137 25 5	2 54	915	142 4 39	4 41
564	134 23 3	3 47	676	137 27 59	2 54	920	142 9 17	4 38
566	134 26 49	3 46	678	137 30 52	2 53	925	142 13 53	4 36
568	134 30 34	3 45	680	137 33 45	2 53	930	142 18 28	4 35
570	134 34 18	3 44	682	137 36 37	2 52	935	142 23 1	4 33
572	134 38 0	3 42	684	137 39 28	2 51	940	142 27 31	4 30

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

Jours.	Anomalie vraie.	Différences.	Jours.	Anomalie vraie.	Différences.	Jours.	Anomalie vraie.	Différences.
	D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.
940	142 27 31		1250	146 13 22		1820	150 32 8	
945	142 31 59	4 28	1260	146 19 17	5 55	1830	150 35 37	3 29
950	142 36 24	4 25	1270	146 25 9	5 52	1840	150 39 5	3 28
955	142 40 48	4 24	1280	146 30 56	5 47	1850	150 42 31	3 26
960	142 45 10	4 22	1290	146 36 40	5 44	1860	150 45 55	3 24
965	142 49 30	4 20	1300	146 42 20	5 40	1870	150 49 18	3 23
970	142 53 48	4 18	1310	146 47 56	5 36	1880	150 52 39	3 21
975	142 58 4	4 16	1320	146 53 28	5 32	1890	150 55 59	3 20
980	143 2 19	4 15	1330	146 58 57	5 29	1900	150 59 17	3 18
985	143 6 31	4 12	1340	147 4 23	5 26	1910	151 2 34	3 17
990	143 10 42	4 11	1350	147 9 45	5 22	1920	151 5 49	3 15
995	143 14 50	4 8	1360	147 15 4	5 19	1930	151 9 3	3 14
1000	143 18 57	4 7	1370	147 20 19	5 15	1940	151 12 15	3 12
1005	143 23 3	4 6	1380	147 25 31	5 12	1950	151 15 26	3 11
1010	143 27 6	4 3	1390	147 30 39	5 8	1960	151 18 36	3 10
1015	143 31 8	4 2	1400	147 35 45	5 6	1970	151 21 44	3 8
1020	143 35 8	4 0	1410	147 40 48	5 3	1980	151 24 51	3 7
1025	143 39 6	3 58	1420	147 45 47	4 59	1990	151 27 57	3 6
1030	143 43 2	3 56	1430	147 50 44	4 57	2000	151 31 2	3 5
1035	143 46 57	3 55	1440	147 55 38	4 54	2010	151 34 6	3 4
1040	143 50 50	3 53	1450	148 0 28	4 50	2020	151 37 8	3 2
1045	143 54 42	3 52	1460	148 5 16	4 48	2030	151 40 9	3 1
1050	143 58 32	3 50	1470	148 10 2	4 46	2040	151 43 8	2 59
1055	144 2 21	3 49	1480	148 14 44	4 42	2050	151 46 6	2 58
1060	144 6 8	3 47	1490	148 19 24	4 40	2060	151 49 3	2 57
1065	144 9 54	3 46	1500	148 24 1	4 37	2070	151 51 59	2 56
1070	144 13 38	3 44	1510	148 28 35	4 34	2080	151 54 53	2 54
1075	144 17 20	3 42	1520	148 33 7	4 32	2090	151 57 46	2 53
1080	144 21 1	3 41	1530	148 37 37	4 30	2100	152 0 38	2 52
1085	144 24 41	3 40	1540	148 42 4	4 27	2110	152 3 29	2 51
1090	144 28 19	3 38	1550	148 46 28	4 24	2120	152 6 19	2 50
1095	144 31 56	3 37	1560	148 50 40	4 22	2130	152 9 8	2 49
1100	144 35 31	3 35	1570	148 55 10	4 20	2140	152 11 55	2 47
1105	144 39 5	3 34	1580	148 59 27	4 17	2150	152 14 42	2 47
1110	144 42 37	3 32	1590	149 3 42	4 15	2160	152 17 27	2 45
1115	144 46 8	3 31	1600	149 7 55	4 13	2170	152 20 11	2 44
1120	144 49 38	3 30	1610	149 12 6	4 11	2180	152 22 55	2 44
1125	144 53 7	3 29	1620	149 16 14	4 8	2190	152 25 37	2 42
1130	144 56 34	3 27	1630	149 20 20	4 6	2200	152 28 18	2 41
1135	145 0 0	3 26	1640	149 24 24	4 4	2220	152 33 38	5 20
1140	145 3 24	3 24	1650	149 28 26	4 2	2240	152 38 54	5 16
1145	145 6 47	3 23	1660	149 32 26	4 0	2260	152 44 6	5 12
1150	145 10 9	3 22	1670	149 36 24	3 58	2280	152 49 14	5 8
1155	145 13 30	3 21	1680	149 40 20	3 56	2300	152 54 18	5 4
1160	145 16 49	3 19	1690	149 44 14	3 54	2320	152 59 18	5 0
1165	145 20 7	3 18	1700	149 48 6	3 52	2340	153 4 15	4 57
1170	145 23 25	3 18	1710	149 51 56	3 50	2360	153 9 8	4 53
1175	145 26 41	3 16	1720	149 55 44	3 48	2380	153 13 58	4 50
1180	145 29 55	3 14	1730	149 59 31	3 47	2400	153 18 44	4 46
1185	145 33 8	3 13	1740	150 3 15	3 44	2420	153 23 27	4 43
1190	145 36 21	3 13	1750	150 6 58	3 43	2440	153 28 7	4 40
1195	145 39 32	3 11	1760	150 10 39	3 41	2460	153 32 44	4 37
1200	145 42 42	3 10	1770	150 14 18	3 39	2480	153 37 18	4 34
1210	145 48 59	6 17	1780	150 17 56	3 38	2500	153 41 48	4 30
1220	145 55 11	6 13	1790	150 21 31	3 35	2520	153 46 15	4 27
1230	146 1 19	6 8	1800	150 25 5	3 34	2540	153 50 39	4 24
1240	146 7 22	6 3	1810	150 28 37	3 32	2560	153 55 1	4 22
1250	146 13 22	6 0	1820	150 32 8	3 31	2580	153 59 20	4 19

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

JOURS.	ANOMALIE VRAIE.	Différences.	JOURS.	ANOMALIE VRAIE.	Différences.	JOURS.	ANOMALIE VRAIE.	Différences.
	D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.
2580	153 59 20	4 16	3900	157 30 34	3 1	6650	161 18 40	2 54
2600	154 3 36	4 13	3925	157 33 35	2 59	6700	161 21 34	2 52
2620	154 7 49	4 11	3950	157 36 34	2 58	6750	161 24 26	2 50
2640	154 12 0	4 8	3975	157 39 32	2 55	6800	161 27 16	2 48
2660	154 16 8	4 6	4000	157 42 28	5 47	6850	161 30 4	2 47
2680	154 20 14	4 3	4050	157 48 15	5 41	6900	161 32 51	2 45
2700	154 24 17	4 0	4100	157 53 56	5 36	6950	161 35 36	2 43
2720	154 28 17	3 58	4150	157 59 32	5 30	7000	161 38 19	5 22
2740	154 32 15	3 55	4200	158 5 2	5 25	7100	161 43 41	5 16
2760	154 36 10	3 53	4250	158 10 27	5 20	7200	161 48 57	5 10
2780	154 40 3	3 51	4300	158 15 47	5 15	7300	161 54 7	5 4
2800	154 43 54	3 49	4350	158 21 2	5 10	7400	151 59 11	4 59
2820	154 47 43	3 46	4400	158 26 12	5 4	7500	162 4 10	4 53
2840	154 51 29	3 44	4450	158 31 16	5 0	7600	162 9 3	4 48
2860	154 55 13	3 42	4500	158 35 16	4 56	7700	162 13 51	4 43
2880	154 58 55	3 40	4550	158 41 12	4 52	7800	162 18 34	4 38
2900	155 2 35	3 38	4600	158 46 3	4 47	7900	162 23 12	4 33
2920	155 6 13	3 36	4650	158 50 50	4 43	8000	162 27 47	4 29
2940	155 9 49	3 34	4700	158 55 33	4 38	8100	162 32 14	4 24
2960	155 13 23	3 31	4750	159 0 11	4 35	8200	162 36 38	4 20
2980	155 16 54	3 29	4800	159 4 46	4 31	8300	162 40 58	4 16
3000	155 20 23	4 19	4850	159 9 17	4 27	8400	162 45 14	4 12
3025	155 24 42	4 17	4900	159 13 44	4 23	8500	162 49 26	4 7
3050	155 28 59	4 14	4950	159 18 7	4 19	8600	162 53 33	4 4
3075	155 33 13	4 11	5000	159 22 26	4 16	8700	162 57 37	4 0
3100	155 37 24	4 8	5050	159 26 42	4 12	8800	163 1 37	3 56
3125	155 41 32	4 5	5100	159 30 54	4 10	8900	163 5 33	3 52
3150	155 45 37	4 2	5150	159 35 4	4 6	9000	153 9 25	3 49
3175	155 49 39	4 0	5200	159 39 10	4 2	9100	163 13 14	3 46
3200	155 53 39	3 57	5250	159 43 12	3 59	9200	163 17 0	3 43
3225	155 57 36	3 54	5300	159 47 11	3 57	9300	163 20 43	3 39
3250	156 1 30	3 52	5350	159 51 8	3 55	9400	163 24 22	3 36
3275	156 5 22	3 50	5400	159 55 2	3 50	9500	163 27 58	3 33
3300	156 9 12	3 48	5450	159 58 52	3 47	9600	163 31 31	3 30
3325	156 13 0	3 45	5500	160 2 39	3 44	9700	163 35 1	3 27
3350	156 16 45	3 43	5550	160 6 24	3 42	9800	163 38 28	3 24
3375	156 20 28	3 40	5600	160 10 6	3 39	9900	163 41 52	3 21
3400	156 24 8	3 38	5650	160 13 45	3 37	10000	163 45 13	3 19
3425	156 27 46	3 36	5700	160 17 22	3 34	10100	163 48 32	3 16
3450	156 31 22	3 34	5750	160 20 56	3 32	10200	163 51 48	3 14
3475	156 34 56	3 32	5800	160 24 28	3 29	10300	163 55 2	3 11
3500	156 38 28	3 30	5850	160 27 57	3 26	10400	163 58 13	3 8
3525	156 41 58	3 27	5900	160 31 23	3 24	10500	164 1 21	3 6
3550	156 45 25	3 25	5950	160 34 47	3 22	10600	164 4 27	3 4
3575	156 48 50	3 24	6000	160 38 9	3 20	10700	164 7 31	3 1
3600	156 52 14	3 22	6050	160 41 29	3 17	10800	164 10 32	2 59
3625	156 55 36	3 20	6100	160 44 46	3 15	10900	164 13 31	2 57
3650	156 58 56	3 18	6150	160 48 1	3 13	11000	164 16 28	2 54
3675	157 2 14	3 16	6200	160 51 14	3 11	11100	164 19 22	2 52
3700	157 5 30	3 14	6250	160 54 25	3 9	11200	164 21 14	2 50
3725	157 8 44	3 12	6300	160 57 34	3 7	11300	164 25 4	2 49
3750	157 11 56	3 10	6350	161 0 41	3 4	11400	164 27 53	2 47
3775	157 15 6	3 9	6400	161 3 45	3 3	11500	164 30 40	2 45
3800	157 18 15	3 7	6450	161 6 48	3 1	11600	164 33 25	2 43
3825	157 21 22	3 6	6500	161 9 49	2 59	11700	164 36 8	2 41
3850	157 24 28	3 4	6550	161 12 48	2 57	11800	164 38 49	2 39
3875	157 27 32	3 2	6600	161 15 45	2 55	11900	164 41 28	2 36
3900	157 30 34		6650	161 18 40		12000	164 44 4	

Suite de la Table générale du Mouvement parabolique des Cometes.

JOURS.	ANOMALIE VRAIE.	Differences.	JOURS	ANOMALIE VRAIE.	Differences.	JOURS.	ANOMALIE VRAIE.	Differences
	D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.
12000	164 44 4		24000	167 56 8		60000	171 8 25	
12125	164 47 18	3 14	24500	168 1 9	5 1	61000	171 11 22	2 57
12250	164 50 29	3 11	25000	168 6 2	4 53	62000	171 14 15	2 53
12375	164 53 38	3 9	25500	168 10 48	4 46	63000	171 17 4	2 49
12500	164 56 44	3 6	26000	168 15 27	4 39	64000	171 19 49	2 45
12625	164 59 47	3 3	26500	168 19 58	4 31	65000	1 1 22 31	2 42
12750	165 2 48	3 1	27000	168 24 22	4 24	66000	171 25 10	2 39
12875	165 5 47	2 59	27500	168 28 40	4 18	67000	171 27 46	2 36
13000	165 8 43	2 56	28000	168 32 52	4 12	68000	171 30 18	2 32
13125	165 11 37	2 54	28500	168 36 58	4 6	69000	171 32 47	2 29
13250	165 14 29	2 52	29000	168 40 58	4 0	70000	171 35 14	2 27
13375	165 17 19	2 50	29500	168 44 52	3 54	71000	171 37 38	2 24
13500	165 20 6	2 47	30000	168 48 41	3 49	72000	171 39 59	2 21
13625	165 22 52	2 46	30500	168 52 25	3 44	73000	171 42 18	2 19
13750	165 25 35	2 43	31000	168 56 4	3 39	74000	171 44 34	2 16
13875	165 28 16	2 41	31500	168 59 39	3 35	75000	171 46 47	2 13
14500	165 30 35	2 39	32000	169 3 9	3 30	76000	171 48 58	2 11
14125	165 33 32	2 37	32500	169 6 34	3 25	77000	171 51 7	2 9
14250	165 36 8	2 36	33000	169 9 55	3 21	78000	171 53 14	2 7
14375	165 38 42	2 34	33500	169 13 12	3 17	79000	171 55 19	2 5
14500	165 41 14	2 32	34000	169 16 26	3 14	80000	171 57 21	2 2
14625	165 43 44	2 30	34500	169 19 36	3 10	81000	171 59 21	2 0
14750	165 46 13	2 29	35000	169 22 42	3 6	82000	172 1 19	1 58
14875	165 48 40	2 27	35500	169 25 44	3 2	83000	172 3 16	1 57
15000	165 51 5	2 25	36000	169 28 43	2 59	84000	172 5 11	1 55
15125	165 53 29	2 24	36500	169 31 39	2 56	85000	172 7 4	1 53
15250	165 55 51	2 22	37000	169 34 32	2 53	86000	172 8 55	1 51
15375	165 58 11	2 20	37500	169 37 21	2 49	87000	172 10 44	1 49
15500	166 0 30	2 19	38000	169 40 7	2 46	88000	172 12 31	1 47
15625	166 2 47	2 17	38500	169 42 50	2 43	89000	172 14 17	1 46
15750	166 5 3	2 16	39000	169 45 31	2 41	90000	172 16 1	1 44
15875	166 7 17	2 14	39500	169 48 9	2 38	91000	172 17 44	1 43
16000	166 9 30	2 13	40000	169 50 44	2 35	92000	172 19 25	1 41
16250	166 13 52	4 22	40500	169 53 17	2 33	94000	172 22 [illegible]	3 19
16500	166 18 9	4 17	41000	169 55 47	2 30	96000	172 25 59	3 15
16750	166 22 20	4 11	41500	169 58 15	2 28	98000	172 29 7	3 8
17000	166 26 25	4 5	42000	170 0 40	2 25	100000	172 32 9	3 2
17250	166 30 26	4 1	42500	170 3 3	2 23	105000	172 39 26	7 17
17500	166 34 23	3 57	43000	170 5 24	2 21	110000	172 46 14	6 48
17750	166 38 15	3 52	43500	170 7 43	2 19	115000	172 52 39	6 25
18000	166 42 3	3 48	44000	170 9 59	2 16	120000	172 58 42	6 3
18250	166 45 47	3 44	45000	170 14 26	4 27	125000	173 4 25	5 43
18500	166 49 26	3 39	46000	170 18 45	4 19	130000	173 9 50	5 25
18750	166 53 1	3 35	47000	170 22 56	4 11	135000	173 14 59	5 9
19000	166 56 32	3 31	48000	170 27 0	4 4	140000	173 19 54	4 55
19250	167 0 0	3 28	49000	170 30 58	3 58	145000	173 24 34	4 40
19500	167 3 24	3 24	50000	170 34 49	3 51	150000	173 29 2	4 28
19750	167 6 45	3 21	51000	170 38 34	3 45	155000	173 33 18	4 16
20000	167 10 2	3 17	52000	170 42 13	3 39	160000	173 37 2[illegible]	4 5
20500	167 16 26	6 24	53000	170 45 47	3 34	165000	173 41 19	3 56
21000	167 22 39	6 13	54000	170 49 16	3 29	170000	173 45 4	3 41
21500	167 28 40	6 1	55000	170 52 39	3 23	175000	173 48 41	3 37
22000	167 34 30	5 50	56000	170 55 57	3 18	180000	173 52 10	3 29
22500	167 40 9	5 39	57000	170 57 10	3 13	185000	173 55 32	3 22
23000	167 45 38	5 29	58000	171 2 19	3 9	190000	173 58 46	3 14
23500	167 50 58	5 20	59000	171 5 24	3 5	195000	174 1 54	3 8
24000	167 56 8	5 10	60000	171 8 25	3 1	200000	174 4 55	3 1

Table pour convertir les arcs du Cercle en parties du Rayon.

1d	0,017453293	32d	0,558505361	63d	1,099557429
2	0,034906585	33	0,575958653	64	1,117010 [illegible]
3	0,052359878	34	0,593411946	65	1,134464014
4	0,069813170	35	0,610865238	66	1,151917306
5	0,087266463	36	0,628318531	67	1,169370599
6	0,104719755	37	0,645771823	68	1,186823891
7	0,122173048	38	0,663225116	69	1,204277184
8	0,139626340	39	0,680678408	70	1,221730476
9	0,157079633	40	0,698131701	71	1,239183769
10	0,174532925	41	0,715584993	72	1,256637061
11	0,191986218	42	0,733038286	73	1,274090354
12	0,209439510	43	0,750491578	74	1,291543646
13	0,226892803	44	0,767944871	75	1,308996939
14	0,244346095	45	0,785398163	76	1,326450232
15	0,261799388	46	0,802851466	77	1,343903524
16	0,279252680	47	0,820304748	78	1,361356817
17	0,296705973	48	0,837758041	79	1,378810109
18	0,314159265	49	0,855211333	80	1,396263402
19	0,331612558	50	0,872664626	81	1,413716694
20	0,349065850	51	0,890117919	82	1,431169987
21	0,366519143	52	0,907571211	83	1,448623279
22	0,383972435	53	0,925024504	84	1,466076572
23	0,401425728	54	0,942477796	85	1,483529864
24	0,418879020	55	0,959931089	86	1,500983157
25	0,436332313	56	0,977384381	87	1,518436449
26	0,453785606	57	0,994837674	88	1,535889742
27	0,471238898	58	1,012290966	89	1,553343034
28	0,488692191	59	1,029744259	90	1,570796327
29	0,506145483	60	1,047197551	180	3,141592654
30	0,523598776	61	1,064650844	270	4,712388980
31	0,541052068	62	1,082104136	360	6,283185307

Table

Suite de la Table pour convertir les arcs du Cercle en parties du Rayon.

	MINUTES.	SECONDES.		MINUTES.	SECONDES.
1	0,000290888	0,000004848	31	0,0090175334	0,000150292
2	0,000581776	0,000009696	32	0,009308423	0,000155140
3	0,000872665	0,000014544	33	0,009599311	0,000159989
4	0,001163553	0,000019393	34	0,009890199	0,000164837
5	0,001454441	0,000024241	35	0,010181087	0,000169685
6	0,001745329	0,000029089	36	0,010471976	0,000174533
7	0,002036217	0,000033937	37	0,010762864	0,000179381
8	0,002327106	0,000038785	38	0,011053752	0,000184229
9	0,002617994	0,000043633	39	0,011344640	0,000189077
10	0,002908882	0,000048481	40	0,011635528	0,000193925
11	0,003199770	0,000053330	41	0,011926417	0,000198774
12	0,003490659	0,000058178	42	0,012217305	0,000203622
13	0,003781547	0,000063026	43	0,012508193	0,000208470
14	0,004072435	0,000067874	44	0,012799081	0,000213318
15	0,004363323	0,000072722	45	0,013089969	0,000218166
16	0,004654211	0,000077570	46	0,013380858	0,000223014
17	0,004945100	0,000082418	47	0,013671746	0,000227862
18	0,005235988	0,000087266	48	0,013962634	0,000232711
19	0,005526876	0,000092115	49	0,014253522	0,000237559
20	0,005817764	0,000096963	50	0,014544410	0,000242407
21	0,006108652	0,000101811	51	0,014835299	0,000247255
22	0,006399541	0,000106659	52	0,015126187	0,000252103
23	0,006690429	0,000111507	53	0,015417075	0,000256951
24	0,006981317	0,000116355	54	0,015707963	0,000261799
25	0,007272207	0,000121203	55	0,015998851	0,000266648
26	0,007563093	0,000126052	56	0,016289740	0,000271496
27	0,007853982	0,000130900	57	0,016580628	0,000276344
28	0,008144870	0,000135748	58	0,016871516	0,000281192
29	0,008435758	0,000140596	59	0,17162404	0,000286040
30	0,008726646	0,000145444	60	0,17453293	0,000290888

Table pour convertir les Heures, Secondes & Minutes, en Dec[illegible]s de Jour.

Heures.	Decimales.	Minutes.	Decimales.	Secondes.	Decim[illegible]s
1	0,04166	1	0,000694	1	0,000011[illegible]7
2	0,08333	2	0,001388	2	0,0000[illegible]31[illegible]
3	0,12500	3	0,002083	3	0,000034[illegible]2
4	0,16666	4	0,002777	4	0,00004[illegible]
5	0,20833	5	0,003472	5	0,00005787
6	0,25000	6	0,004166	6	0,00006944
7	0 29166	7	0,004861	7	0,00008102
8	0,33333	8	0,005555	8	0,00009259
9	0,37500	9	0,006250	9	0,00010416
10	0,41666	10	0,006944	10	0,00011574
11	0,45833	11	0,007638	11	0,00012731
12	0,50000	12	0,008333	12	0,00013888
13	0,54166	13	0,009027	13	0,00015046
14	0,58333	14	0,009722	14	0,00016204
15	0,62500	15	0,010416	15	0,00017361
16	0,66666	16	0,011111	16	0,00018518
17	0,70833	17	0,011805	17	0,00019676
18	0,75000	18	0,012500	18	0,00020833
19	0,79166	19	0,013194	19	0,00021991
20	0,83333	20	0,013888	20	0,00023148
21	0,87500	21	0,014583	21	0,00024305
22	0,91666	22	0,015277	22	0,00025463
23	0,95833	23	0,015972	23	0,00026620
24	1,00000	24	0,016666	24	0,00027777
		25	0,017361	25	0,00028935
		26	0,018055	26	0,00030093
		27	0,018750	27	0,00031250
		28	0,019444	28	0,00032407
		29	0,020138	29	0,00033565
		30	0,020833	30	0,00034722
		31	0,021527	31	0,00035880
		32	0,022222	32	0,00037037
		33	0,022916	33	0,00038194
		34	0,023611	34	0,00039352
		35	0,024305	35	0,00040509
		36	0,025000	36	0,00041666
		37	0,025694	37	0,00042824
		38	0,026388	38	0,00043981
		39	0,027083	39	0,00045138
		40	0,027777	40	0,00046296
		41	0,028472	41	0,00047454
		42	0,029166	42	0,00048611
		43	0,029861	43	0,00049769
		44	0,030555	44	0,00050936
		45	0,031250	45	0,00052083
		46	0,031944	46	0,00053241
		47	0,032638	47	0,00054398
		48	0,033333	48	0,00055555
		49	0,034027	49	0,00056713
		50	0,034722	50	0,00057870
		51	0,035416	51	0,00059027
		52	0,036111	52	0,00060185
		53	0,036805	53	0,00061343
		54	0,037500	54	0,00062300
		55	0,038194	55	0.00063657
		56	0,038888	56	0,00064815
		57	0,039583	57	0,00065972
		58	0,040277	58	0,00067130
		59	0,040972	59	0,00068287
		60	0,041666	60	0,00069144

CHAPITRE SECOND.

Dans-lequel on considere les circonstances du mouvement apparent des Planetes & des Cometes, relativement à un Observateur qui est lui-même en mouvement.

DANS le Chapitre précédent j'ai considéré les mouvemens absolus des Planetes & des Cometes dans leurs trajectoires respectives, abstraction faite de toute observation que l'on pourroit faire de ces mouvemens; dans le Chapitre présent je me propose de considérer les circonstances du mouvement apparent des Planetes & des Cometes, par rapport à un Observateur qui décrit lui-même une trajectoire dans un plan différent de celui de la Planete ou de la Comete.

ARTICLE PREMIER.

Détermination du lieu apparent d'une Planete ou d'une Comete, vu de la Terre; & de sa distance à la Terre, pour un instant donné.

(448) Lorsque l'on connoît les circonstances du mouvement d'une Planete ou d'une Comete dans son orbite, la premiere question qui se présente à résoudre, est la détermination du lieu apparent de la Planete ou de la Comete vu de la Terre, & de sa distance à la Terre pour un instant quelconque. Voici comment cette question peut être énoncée.

Etant donnés les élémens de l'orbite d'une Planete ou d'une Comete, son grand axe, le lieu de son périhélie sur l'orbite, le passage par le périhelie, la longitude de son nœud, l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Ecliptique, déterminer pour un instant quelconque, la longitude & la latitude apparentes de la Planete ou de la Comete vues de la Terre, ainsi que sa distance à la Terre.

On voit d'abord que, puisque l'instant pour lequel on calcule est donné, & que les élémens des orbites de la Terre & de la Planete ou de la Comete sont connus, on déterminera facilement le lieu du Soleil, ainsi que sa distance à la Terre. On connoîtra donc la différence en longitude du Soleil & du Nœud de la Planete ou à la Comete. On déterminera pareillement le lieu de la Planete ou de la Comete dans son orbite, vu du Soleil, ainsi que sa distance au Soleil; & l'on conclura la distance du lieu de la Planete ou de la Comete sur son orbite, à son nœud ascendant; ces données résoudront la question proposée.

Pour y parvenir soit

r le rayon vecteur de la Terre ;

R le rayon vecteur de la Planete ou de la Comete ;

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Planete ou de la Comete sur l'Ecliptique,

Δ la distance de la Terre à la Planete ou à la Comete;

A la longitude du Soleil vue de la Terre ;

B la longitude géocentrique de la Planete ou de la Comete ;

L la latitude géocentrique de la Planete ou de la Comete ;

ζ la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Planete ou de la Comete ;

u l'angle du rayon vecteur de la Comete ou de la Planete avec la ligne des nœuds ; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comete ou de la Planete, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de l'astre dans son orbite.

Soit d'ailleurs ♈ ♋ ♎ ♑ l'Ecliptique rapportée à la sphere des Fixes ; S le Soleil ; EeT l'orbite de la Terre ; T le lieu de la Terre dans son orbite ; NSn la ligne des nœuds de la Planete ou de la Comete ; N le nœud ascendant ; C le lieu de la Planete ou de la Comete dans son orbite ; SC le rayon vecteur de la Planete ou de la Comete ; C′ la projection de la Planete ou de la Comete sur l'Ecliptique ; CC′ la distance perpendiculaire de la Planete ou de la Comete au plan de l'Ecliptique ; CM la perpendiculaire abaissée de la Planete ou de la Comete sur la ligne des nœuds, dans le plan de l'orbite de la Planete ou de la Comete; C′M la perpendiculaire abaissée de la projection C′ de la Planete ou de la Comete sur la ligne des nœuds dans le plan de l'Ecliptique ; Tm la perpendiculaire abaissée de la Terre sur la ligne des nœuds ; TC la distance de la Planete ou de la Comete à la Terre ; ESe le diametre de l'orbite terrestre passant par le premier point d'*Aries*.

Fig. 16.

Par la Terre T menons une parallele indéfinie Tt' au diametre ESe de l'orbite de la Terre passant par le premier point d'*Aries* ; & une autre parallele Tt à la ligne NSn des nœuds de la Planete ou de la Comete; prenons le point t tel que Mt soit le prolongement de la perpendiculaire C′M abaissée de la projection C′ de la Planete ou de la Comete, sur la ligne des nœuds dans le plan de l'Ecliptique ; & que par conséquent C′Mt soit perpendiculaire à la ligne Tt.

Il est évident que, puisque par la construction l'angle MSC $= u$, & que SC $=$ R, l'on a CM $=$ R sin u ; SM $=$ R cos u. D'ailleurs puisque l'angle CMC′ $=$ I, & que le triangle CMC′ est rectangle en C′, l'on a CC′ $=$ R sin u sin I, C′M $=$ R sin u cos I. Enfin puisque TC $= \Delta$, que l'angle CTC′ $=$ L, & que le triangle CTC′ est rectangle en C′, l'on a CC′ $= \Delta$ sin L ; comparant les deux valeurs de CC′, on aura

$$(1)\quad \mathrm{R} \sin u \sin \mathrm{I} - \Delta \sin \mathrm{L} = 0.$$

Maintenant puisque les droites Tt, NSn sont paralleles ; l'on a Mt $=$ mT $= r$ sin TSm, puisque nous avons nommé r le rayon vecteur ST de la Terre. L'on a de plus tC′ $=$ Mt $+$ MC′ $= r$ sin TSm $+$ R sin u cos I. Il est pareillement évident que l'angle tTC′ est égal

à la longitude géocentrique de la Planete ou de la Comete, moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'il est égal à l'angle $C'Tt'$ moins l'angle tTt'. Par une raison semblable, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil vue de la Terre, moins la longitude du nœud ascendant de la Planete ou de la Comete ; donc l'angle $STt = A - \zeta$; or l'angle $TSm =$ l'angle STt ; donc $tC' = r \sin(A - \zeta) + R \sin u \cos I$. Fig. 16.

Maintenant à cause du triangle tTC' rectangle en t, l'on a $TC' \sin C'Tt = C't$; d'ailleurs l'angle $C'Tt = B - \zeta$, & $TC' = \Delta \cos L$; donc $tC' = \Delta \cos L \sin(B - \zeta)$; comparant les deux valeurs de tC' l'on aura

$$(2)\ \Delta \cos L \sin(B - \zeta) - r \sin(A - \zeta) - R \sin u \cos I = 0;$$

Ou si l'on veut, à cause de $R \sin u \sin I = \Delta \sin L$,

$$(3)\ \text{Tang}\, I\,(\Delta \cos L \sin(B - \zeta) - r \sin(A - \zeta)) - \Delta \sin L = 0.$$

Il suit également des constructions précédentes que $TC' \cos C'Tt = Tt$; mais $Tt = SM + Sm$; $SM = R \cos u$; $Sm = r \cos(A - \zeta)$; donc $Tt = R \cos u + r \cos(A - \zeta)$; donc

$$(4)\ \Delta \cos L \cos(B - \zeta) - R \cos u - r \cos(A - \zeta) = 0.$$

Si l'on compare la valeur de $\Delta \cos L$ tirée de cette derniere équation avec celle que l'on conclut de l'équation (2), l'on aura

$$(5)\ \text{Tang}\,(B - \zeta) = \frac{r \sin(A - \zeta) + R \sin u \cos I}{r \cos(A - \zeta) + R \cos u}$$

Si l'on compare enfin les équations (1) & (2), l'on conclura

$$(6)\ \text{Tang}\, L = \frac{R \sin u \sin I \sin(B - \zeta)}{R \sin u \cos I + r \sin(A - \zeta)}.$$

(449) Cherchons maintenant l'expression de la distance TC de la Terre, à la Planete ou à la Comete. Pour y parvenir nous remarquerons que si du lieu C de la Comete ou de la Planete dans son orbite, l'on mene à la Terre la droite CT, cette droite sera l'hypothenuse du triangle $CC'T$ rectangle en C' ; l'on aura donc $CT^2 = C'T^2 + CC'^2$. D'ailleurs à cause du triangle rectangle $C'Tt$, l'on a $C'T^2 = Tt^2 + C't^2$. Nous avons vu que $C't = r \sin(A - \zeta) + R \sin u \cos I$; que $CC' = R \sin u \sin I$; de plus $Tt = R \cos u + r \cos(A - \zeta)$; donc $CT^2 = (R \cos u + r \cos(A - \zeta))^2 + (R \sin u \cos I + r \sin(A - \zeta))^2 + R^2 \sin^2 u \sin^2 I$; donc

$$(1)\ \Delta = \sqrt{(R^2 + r^2 + 2Rr(\cos u \cos(A - \zeta) + \sin u \cos I \sin(A - \zeta)))}.$$

Nous pouvons actuellement résoudre les questions proposées. En effet, puisque, par la supposition, l'on connoît les quantités R, r, u, A, ζ, I, l'on déterminera la latitude géocentrique de la Planete ou de la Comete, au moyen de l'équation (6) du §. 448 ; la longitude géocentrique au moyen de l'équation (5) du même paragraphe ; & la distance de la Planete ou de la Comete à la Terre, au moyen de l'équation (1). Il faudra seulement avoir attention, dans l'usage de ces formules, de donner aux sinus, cosinus, & tangentes des angles que l'on emploiera, les

signes qui leur conviennent, relativement aux valeurs de ces différens angles.

Nous remarquerons ici que Δ est toujours positif; que sin L & tang L sont positifs, lorsque la latitude géocentrique de la Planete ou de la Comete est boréale ; que sin L & tang L sont négatifs dans le cas contraire ; que cos L est toujours positif; que sin I est toujours positif; que tang I & cosin I sont positifs pour toutes les Planetes ; mais que ces quantités sont négatives dans le cas des Cometes, lorsque ces astres sont rétrogrades. Quant aux quantités sin u, cos u, sin $(A-\zeta)$, cos $(A-\zeta)$, il faut leur donner le signe qui convient à la supposition que l'on calcule, & l'on prendra pour valeur de $B-\zeta$, celle qui sera déterminée par l'équation (5) du §. 448.

J'ai donné des formules pour calculer la distance d'une Comete au Soleil, ainsi que son anomalie vraie, lorsque l'on connoît sa distance périhélie & le tems écoulé depuis le passage par le périhélie jusqu'à l'instant pour lequel on calcule ; mais ces équations sont du troisieme dégré ; & quoiqu'il soit impossible de parvenir à des résultats plus simples, on pourroit être tenté d'éviter ce calcul. C'est à quoi l'on parviendra au moyen de la Table générale des mouvemens des Cometes.

(450) Lorsque l'on connoît les circonstances du mouvement d'une Planete, ou d'une Comete dans son orbite, non-seulement on peut, au moyen des équations précédentes, déterminer pour un instant donné, la longitude & la latitude géocentriques de l'Astre, ainsi que sa distance à la Terre ; on peut également résoudre les Problemes inverses ; c'est à dire, étant données les longitudes & les latitudes géocentriques, on peut retrouver les Elémens. Ces derniers Problemes présentent un grand objet d'utilité, & je ne me propose pas, dans cet instant, de les résoudre ; il me suffit d'avoir démontré les équations qui serviront de base à ces recherches.

Passons aux exemples.

EXEMPLE.

(451) On demande la distance de Mars à la Terre, ainsi que la longitude & la latitude géocentriques de cette Planete pour le 1er Janvier 1786 à midi.

Solution. Je cherche par les Tables du Soleil, la longitude de cet astre, ainsi que sa distance à la Terre pour le 1er Janvier 1786 à midi ; je trouve que la longitude du Soleil étoit alors de $9^s\, 11^d\, 20'\, 59''$, & que sa distance à la Terre étoit de 0,98324; donc $A = 281^d\, 20'\, 59''$; $r = 0,98324$. Par les Tables de Mars je trouve qu'à la même heure, le lieu de cet astre dans son orbite étoit de $2^s\, 23^d\, 12'\, 22''$; sa distance au Soleil de 1,56279, la longitude du nœud ascendant de $1^s\, 18^d\, 0'\, 24''$; donc $\zeta = 48^d\, 0'\, 24''$; $R = 1,56276$; $u = 35^d\, 11'\, 58''$; de plus l'inclinaison du plan de l'orbite de Mars sur l'Ecliptique est de $1^d\, 51'\, 0''$; donc $I = 1^d\, 51'\, 0''$; $A-\zeta = 233^d\, 20'\, 35''$; ces données vont servir à résoudre les questions proposées.

TYPE *du Calcul.*

r ſin (A — ζ) + R ſin u coſ I = — (1) + (2) ;

9·9926650 . . log r
9·9042881 . . log ſin (A—ζ)

(1) 9·8969531 . . . . — 0,78877

0·1939040 . . log R
9·7607483 . . log ſin u
9·9997736 . . log coſ I

(2) 9·9544259 . . . + 0,90038

+ 0,11161

Détermination de la longitude géocentrique.

$$\text{Tang}\,(B - \zeta) = \frac{+}{+}$$

9·0477031 . . . log 0,11161
0·1611698 . . . compl. log 0,68997

9·2088729 . . . log Tang (B — ζ)

Et attendu que le numérateur & le dénominateur de la fraction qui exprime Tang (B — ζ) ſont tous deux poſitifs ;

$$B - \zeta = 9^d\ 11'\ 20''$$

$$B = \begin{cases} 9^d\ 11'\ 20'' \ldots B - \zeta \\ 48\ \ 0\ \ 24 \ldots \zeta \\ 57\ \ 11\ \ 44 \end{cases}$$

r coſ (A — ζ) + R coſ u = — (1) + (2) ;

9·9926650 . . log r
9·7760048 . . log coſ (A—ζ)

(1) 9·7686698 . . . . — 0,58704

0·1939040 . . log R
9·9122991 . . log coſ u

(2) 0·1062031 . . . . + 1,27701

+ 0,68997

Détermination de la latitude géocentrique.

$$\text{Tang}\ L = \frac{+}{+}$$

0·1939040 . . . log R
9·7607483 . . . log ſin u
8·5089736 . . . log ſin I
9·2032771 . . . log ſin (B — ζ)
0·9522969 . . . compl. log 0,11161

8·6191999 . . . log Tang L

Latitude géocentrique = $2^d\ 22'\ 55''$ boréale.

Détermination de la diſtance de Mars à la Terre.

0·1939040 . . . log R
9·7607483 . . . log ſin u
8·5089736 . . . log ſin I
1·38093[illegible] . compl. log ſin L

9·8445602 . . . log Δ

$$\Delta = 0{,}69956.$$

Remarque ſur le cas où l'Aſtre eſt une Comete.

(452) On voit maintenant comment au moyen des équations précédentes, on détermine la longitude & la latitude géocentriques des Pla-

netes, ainſi que leurs diſtances à la Terre. Le calcul eſt le même pour les Cometes, avec cette différence cependant que dans ce cas l'on n'a point de Table particuliere qui repréſente le lieu de la Comete dans ſon orbite. Mais comme l'on connoît les élémens de la Comete, c'eſt à dire, ſa diſtance périhelie, le lieu du périhélie ſur l'orbite, la longitude du nœud aſcendant, l'inſtant du paſſage par le périhélie, il faudra déterminer d'après ces élémens, le lieu de la Comete dans ſon orbite pour l'inſtant donné, ainſi que ſa diſtance au Soleil; d'où l'on conclura l'angle du rayon vecteur de la Comete avec le nœud aſcendant. On n'oubliera pas que cet angle doit être compté ſur l'orbite de la Comete, en ſuivant le ſens du mouvement de cet aſtre, ſoit que la Comete ſoit directe, ſoit qu'elle ſoit rétrograde; mais dans ce dernier cas on fera coſ I & tang I négatifs.

ARTICLE II.

Des Equations qui ont lieu lorſqu'on veut faire uſage de la longitude de la Terre vue du Soleil.

(453) Au lieu d'employer dans les formules, la longitude du Soleil vue de la Terre, on pourroit vouloir faire uſage de la longitude de la Terre vue du Soleil. Dans cette nouvelle hypotheſe, ſi l'on nomme

A′ la longitude de la Terre vue du Soleil; cette longitude differe de 180^d de celle du Soleil vue de la Terre;

& que l'on conſerve d'ailleurs toutes les définitions précédentes, l'on aura les équations ſuivantes.

(1) $R \sin u \sin I - \Delta \sin L = 0$;

(2) $\Delta \cos L \sin (B - \zeta) + r \sin (A' - \zeta) - R \sin u \cos I = 0$;

(3) $\text{Tang}\, I\, (\Delta \cos L \sin (B - \zeta) + r \sin (A' - \zeta)) - \Delta \sin L = 0$;

(4) $\Delta \cos L \cos (B - \zeta) - R \cos u + r \cos (A' - \zeta) = 0$;

(5) $$\text{Tang}\, (B - \zeta) = \frac{R \sin u \cos I - r \sin (A' - \zeta)}{R \cos u - r \cos (A' - \zeta)}$$

(6) $$\text{Tang}\, L = \frac{R \sin u \sin I \sin (B - \zeta)}{R \sin u \cos I - r \sin (A' - \zeta)};$$

(7) $\Delta = \sqrt{(R^2 + r^2 - 2Rr\, (\cos u \cos (A' - \zeta) + \sin u \cos I \sin (A' - \zeta)))}$;

Ces équations ſe déduiſent d'une maniere bien ſimple de celles des §. 448 & 449. En effet puiſque les angles A & A′ different de 180^d; $\sin (A' - \zeta) = -\sin (A' - \zeta)$; $\cos (A' - \zeta) = -\cos (A - \zeta)$; les équations précédentes ſont donc démontrées. Nous ferons indiſtinctement uſage dans la ſuite, des équations du préſent paragraphe, ou de celles des § 448 & 449.

CHAPITRE

CHAPITRE TROISIEME.

De quelques questions du genre de Maximis & Minimis, *relatives aux équations du Chapitre précédent.*

JE me propose, dans ce Chapitre, d'examiner quelques questions du genre *de maximis & minimis* relatives aux équations du Chapitre précédent. Ces questions ameneront naturellement les recherches sur les Stations & Rétrogradations des Planetes, & sur les plus courtes distances des Cometes, soit à l'orbite terrestre, soit à la Terre.

ARTICLE PREMIER.

D'une équation qui a lieu lorsque la longitude géocentrique d'une Planete est un Maximum *ou un* Minimum.

(454) J'ai démontré (§. 453) que si l'on nomme

r le rayon vecteur de la Terre;
R le rayon vecteur d'une Planete;
I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Planete sur l'Ecliptique;
A′ la longitude de la Terre vue du Soleil;
ζ la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Planete;
u l'angle du rayon vecteur de la Planete avec la ligne des nœuds;
B la longitude géocentrique de la Planete;

l'on a généralement

$$(1)\ \text{Tang}\,(B-\zeta)=\frac{R\ \text{sin}\,u\,\text{cos}\,I-r\ \text{sin}\,(A'-\zeta)}{R\ \text{cos}\,u-r\ \text{cos}\,(A'-\zeta)}.$$

Il est facile, au moyen de cette équation, de déterminer la condition qui a lieu, lorsque la longitude géocentrique d'une Planete est un *maximum* ou un *minimum*. En effet, il ne s'agit que de différencier l'équation précédente, par rapport à toutes les variables, & de supposer $d(B-\zeta)=0$; & comme l'on a d'ailleurs assez d'équations pour réduire le résultat final à une variable, on peut, géométriquement parlant, résoudre la question dans toute sa généralité. Mais il faut en convenir; le Problême ainsi considéré d'une maniere générale, ne peut manquer de conduire à des résultats compliqués; j'ai donc cru qu'il me seroit permis, avec les Astronomes qui ont traité cette question, de restreindre la solution au cas des seules Planetes, en supposant nulles les inclinaisons des plans des orbites sur l'Ecliptique, & en regardant les trajectoires comme circulaires.

(455) Puisque nous supposons nulles les inclinaisons des plans des

orbites sur l'Ecliptique, il est clair, 1°. que dans l'équation (1) du §. précédent, cos $I = 1$, 2°. que la position du nœud ascendant n'est d'aucune considération dans le Problême. On pourra donc, pour la facilité des calculs, dans le présent Article & dans le suivant, entendre par

ζ la longitude du point de l'Ecliptique correspondant au lieu de la conjonction de la Planete & de la Terre vue du Soleil ;
u la longitude héliocentrique de la Planete ;

Et l'on écrira dans l'équation (1) du §. précédent $u - \zeta$ à la place de u. Cette expression deviendra alors

$$(1)\quad \text{Tang}\,(B - \zeta) = \frac{R \sin (u - \zeta) - r \sin (A' - \zeta)}{R \cos (u - \zeta) - r \cos (A' - \zeta)}.$$

Si l'on différencie cette équation, en regardant R & r comme des constantes ; & que l'on suppose $d(B - \zeta) = 0$; l'on aura

$$(2)\quad R(R - r\cos(A' - \zeta - u + \zeta))\,d(u - \zeta) + r(r - R\cos(A' - \zeta - u + \zeta))\,d(A' - \zeta) = 0.$$

Mais puisque par la construction, les angles $A' - \zeta$ & $u - \zeta$ sont comptés en partant du point de l'Ecliptique qui répond au lieu de la conjonction héliocentrique de la Terre & de la Planete ; que de plus les angles traversés dans le même tems par les Planetes & par la Terre, sont en raison inverse de la durée des révolutions ; & que d'ailleurs les durées des révolutions sont comme les racines quarrées du cube des demi-grands axes ; l'on a

$$(3)\quad A' - \zeta : u - \zeta :: R^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}};$$

$$(4)\quad d(A' - \zeta) : d(u - \zeta) :: R^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}};$$

L'équation (2) deviendra donc,

$$(5)\quad R^{\frac{1}{2}}\, r^{\frac{1}{2}}\left(R^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{2}}\right) - \left(R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}\right)\cos(A' - \zeta - u + \zeta) = 0;$$

Cette équation a toujours lieu lorsque la longitude géocentrique d'une Planete est un *maximum* ou un *minimum*.

ARTICLE II.

Des Stations & des Rétrogradations des Planetes.

Détermination des arcs parcourus par la Terre & par la Planete dans leurs orbites respectives, depuis la conjonction héliocentrique de ces Astres, jusqu'aux instans où la Planete vue de la Terre commence & finit de paroître rétrograde.

(456) Au moyen des équations précédentes, il est facile de déterminer les Stations & les Rétrogradations des Planetes ; en effet, si l'on

veut avoir l'expression des arcs parcourus par la Terre & par la Planete, dans leurs orbites respectives, depuis la conjonction héliocentrique de ces Astres, jusqu'à l'instant où la Planete paroît stationaire, & par conséquent, jusqu'aux instans où la Planete vue de la Terre commence & finit d'avoir un mouvement rétrograde; dans l'équation (5) du §. précédent, l'on éliminera $A' - \zeta$ ou $u - \zeta$, au moyen de l'équation (3), & l'on aura

$$(1)\quad \operatorname{cof}\left(\frac{(R^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}})}{R^{\frac{3}{2}}}(A' - \zeta)\right) - \frac{R^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}(R^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{2}})}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

$$(2)\quad \operatorname{cof}\left(\frac{(R^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}})}{r^{\frac{3}{2}}}(u - \quad)\right) - \frac{R^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}(R^{\frac{1}{2}} + r^{\frac{1}{2}})}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Ces équations feront connoître les arcs parcourus par la Terre, & par la Planete dans leurs orbites respectives, depuis l'instant de la conjonction héliocentrique de ces Astres, jusqu'aux instans où la Planete vue de la Terre, commence & finit de paroître rétrograde. Le double de ces arcs exprimera la portion des orbites que la Terre & la Planete parcourent pendant la durée de la Rétrogradation; & comme les mouvemens de la Terre & de la Planete sont supposés uniformes, & que l'on connoît les tems des révolutions de ces Astres, l'on conclura facilement la durée de Rétrogradation.

Détermination des arcs de Rétrogradation.

(457) Dans le §. précédent, nous avons déterminé les arcs parcourus par la Terre & par la Planete, dans leurs orbites respectives, depuis l'instant de la conjonction héliocentrique de ces Astres, jusqu'aux instans où la Planete commence & finit de paroître rétrograde, c'est-à-dire jusqu'aux instans où la Planete est stationaire; nous avons pareillement déterminé la durée des Rétrogradations; il nous reste maintenant à donner l'expression des arcs de Rétrogradation vus de la Terre.

Pour y parvenir, nous remarquerons que les arcs parcourus par la Planete & par la Terre, dans leurs orbites respectives, entre les instans de la conjonction héliocentrique & les instans où commence & finit la rétrogradation de la Planete, sont égaux; de sorte que, par exemple, l'arc que parcourt la Terre dans son orbite, depuis l'instant où la Planete commence à être rétrograde, jusqu'à l'instant de la conjonction héliocentrique, est égal à l'arc parcouru par la Terre, depuis l'instant de la conjonction héliocentrique, jusqu'à l'instant où la Planete cesse d'être rétrograde; mais ces deux arcs sont situés de part & d'autre du point de l'Ecliptique qui répond à la conjonction héliocentrique. Ce que nous disons de la Terre doit s'entendre également de la Planete.

Il suit de là que si l'on considere les deux instans des Stations, celui qui précede & celui qui suit la conjonction héliocentrique ; que l'on nomme

B′ la longitude géocentrique de la Planete correspondante au premier instant;
B la longitude géocentrique de la Planete correspondante au second instant;

attendu que les sinus des angles $u-\zeta$, $A'-\zeta$ correspondans à ces deux instans, ne different que par le signe, & que les cosinus de ces mêmes angles ont le même signe, on aura

$$(1)\ \text{Tang}\,(B-\zeta)=\frac{R\ \text{sin}\,(u-\zeta)-r\ \text{sin}\,(A'-\zeta)}{R\ \text{cos}\,(u-\zeta)-r\ \text{cos}\,(A'-\zeta)};$$

$$(2)\ \text{Tang}\,(B'-\zeta)=\frac{r\ \text{sin}\,(A'-\zeta)-R\ \text{sin}\,(u-\zeta)}{R\ \text{cos}\,(u-\zeta)-r\ \text{cos}\,(A'-\zeta)}.$$

Mais puisque les expressions des tangentes des arcs $B-\zeta$ & $B'-\zeta$, ont le même dénominateur, & que leurs numérateurs ne different que par le signe, ces arcs sont évidemment d'un même nombre de degrés; seulement l'un est positif & l'autre est négatif; & chacun d'eux est égal à la moitié de l'arc de Rétrogradation de la Planete. On pourra donc déterminer l'arc de Rétrogradation, en évaluant les arcs $B-\zeta$ ou $B'-\zeta$, au moyen des équations du présent paragraphe ; & le double de l'un quelconque de ces arcs, sera l'arc de Rétrogradation demandé. Nous remarquerons seulement que les valeurs de $u-\zeta$, $A'-\zeta$, qu'il faudra employer dans le calcul, sont celles déterminées par les équations (1) & (2) du §. 456.

Application des Théories précédentes aux différentes Planetes.

(458) Il est facile, au moyen des équations précédentes, de déterminer pour chacune des Planetes la durée & la quantité de leurs Rétrogradations. Si l'on applique en particulier cette Théorie à Saturne en supposant que sa distance moyenne au Soleil est à la distance moyenne de la Terre au Soleil, comme 9,53937 est à 1 ; dans l'équation (1) du §. 456, l'on fera $R=9,53937$, $r=1,00000$; d'où l'on conclura $\text{cos}\,(0,96606\,(A'-\zeta))=\text{cos}\,65^d\,30'\,40''$; donc $A'-\zeta=67^d\,48'\,45''$; donc $2\,(A'-\zeta)=135^d\,37'\,30''$; la Terre parcourt donc dans son orbite, $135^d\,37'\,30''$ pendant le tems que Saturne paroît rétrograde ; & ce dernier Astre parcourt, pendant le même tems, un arc de $4^d\,36'\,15''$ dans sa trajectoire.

Si l'on veut pareillement évaluer l'arc de Rétrogradation de Saturne ; dans l'équation (2) du §. 457, l'on supposera $R=9,53937$; $u-\zeta=2^d\,18'\,7''$; $r=1$, $A'-\zeta=67^d\,48'\,45''$, & l'on aura $\text{Tang}\,(B'-\zeta)=\text{Tang}\,3^d\,23'\,20''$; & comme l'arc $B'-\zeta$ est la moitié de l'arc de Rétrogradation, l'arc de Rétrogradation sera de $6^d\,46'\,40''$;

Si l'on suppose, avec M. de la Lande, que pour les différentes Planetes les demi-grands axes de leurs orbites ont les valeurs suivantes

Demi-grands axes des orbites des Planetes.

Herschell,	Saturne,	Jupiter,	Mars,	La Terre,	Vénus,	Mercure.
19,08180	9,53938	5,20010	1,52359	1,00000	0,72333	0,38710

L'on parviendra aux résultats suivans pour les moyennes distances

	Arcs de Rétrogradation des différentes Planetes vus de la Terre.	Arcs decrits par la Terre dans son orbite, pendant le tems que les Planetes paroissent rétrograder.	Durées des Rétrogradations des Planetes.
Herschell	4^d 2′ 58″	149^d 9 0″	151,27 jours
Saturne	6 46 40	135 37 30	137,68
Jupiter.	10 2 23	118 8 0	120,25
Mars	14 29 30	70 53 0	72,25
Vénus	16 3 10	41 22 0	42,40
Mercure.	12 33 0	21 29 0	21,75

ARTICLE III.

D'une équation qui a lieu lorsque la distance de la Planete ou de la Comete à la Terre, est un minimum.

(459) Dans le paragraphe 453, j'ai donné pour un instant quelconque, l'expression de la distance d'une Planete ou d'une Comete à la Terre; & j'ai fait voir que si l'on nomme

r le rayon vecteur de la Terre;
R le rayon vecteur de la Planete ou de la Comete;
I l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Ecliptique;
A′ la longitude de la Terre vue du Soleil;
ζ la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Planete ou de la Comete;
u l'angle du rayon vecteur de l'Astre avec la ligne des nœuds;
Δ la distance de la Terre à l'Astre;

l'on a

$$(1)\quad \Delta = \sqrt{(R^2 + r^2 - 2Rr(\operatorname{cos} u \operatorname{cos}(A' - \zeta) + \operatorname{sin} u \operatorname{cos} I \operatorname{sin}(A' - \zeta)))}.$$

Je vais maintenant résoudre quelques questions du genre de *maximis* & *minimis* relatives aux distances des Planetes ou des Cometes à la Terre.

(460) Si l'on différencie l'expression précédente de Δ, & que l'on fasse $d\Delta = 0$, l'on aura

$$\begin{aligned}(1)\quad & (R - r(\operatorname{cos} u \operatorname{cos}(A' - \zeta) + \operatorname{sin} u \operatorname{cos} I \operatorname{sin}(A' - \zeta)))dR \\ & + (r - R(\operatorname{cos} u \operatorname{cos}(A' - \zeta) + \operatorname{sin} u \operatorname{cos} I \operatorname{sin}(A' - \zeta)))dr \\ & - Rr(\operatorname{cos} u \operatorname{cos} I \operatorname{sin}(A' - \zeta) - \operatorname{sin} u (\operatorname{cos} A' - \zeta))du \\ & - Rr(\operatorname{sin} u \operatorname{cos} I \operatorname{cos}(A' - \zeta) - \operatorname{cos} u \operatorname{sin}(A' - \zeta))dA' = 0.\end{aligned}$$

Cette équation a lieu lorsque la distance de l'Astre à la Terre est un *maximum* ou un *minimum*.

(461) Dans cette derniere équation, on peut diminuer le nombre des variables ; soit en effet

β' la longitude du périhélie de la Terre vue du Soleil ; cette longitude differe de 180^d de celle du Soleil vue de la Terre ;
a' le demi-grand axe de l'orbite de la Terre ;
E' l'excentricité de cette orbite ;
P' son parametre ;

l'on a pour équation à l'orbite de la Terre

$$(1)\quad 2r\left(\frac{E'}{a'}\operatorname{cof}(A'-\beta')+1\right)-P'=0.$$

Cette équation différenciée donne

$$(2)\quad dr\left(\frac{E'}{a'}\operatorname{cof}(A'-\beta')+1\right)-\frac{E'}{a'}r\operatorname{fin}(A'-\beta')\,dA'=0.$$

Par la même raison, si l'on nomme

β l'angle du lieu du périhelie de l'Astre sur l'orbite avec le nœud ascendant ; cet angle doit être compté en suivant le sens du mouvement de l'Astre ;
a le demi-grand axe de l'orbite de l'Astre ;
E l'excentricité de l'orbite ;
P le parametre ;

l'on a pour équation à l'orbite de l'Astre

$$(3)\quad 2R\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(u-\beta)+1\right)-P=0;$$

Cette équation différenciée donne

$$(4)\quad dR\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(u-\beta)+1\right)-\frac{E}{a}R\operatorname{fin}(u-\beta)\,du=0.$$

Si dans l'équation (1) du §. précédent, l'on élimine dR & dr au moyen des équations (2) & (4), l'on aura

$$(5)\quad \Big(Rr(\operatorname{fin}u\operatorname{cof}I\operatorname{cof}(A'-\zeta)-\operatorname{cof}u\operatorname{fin}(A'-\zeta))\left(\frac{E'}{a'}\operatorname{cof}(A'-\beta')+1\right)$$
$$-r(r-R(\operatorname{cof}u\operatorname{cof}(A'-\zeta)+\operatorname{fin}u\operatorname{cof}I\operatorname{fin}(A'-\zeta)))\frac{E'}{a'}\operatorname{fin}(A'-\beta')\Big)$$
$$\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(u-\beta)+1\right)dA'$$
$$+\Big(Rr(\operatorname{cof}u\operatorname{cof}I\operatorname{fin}(A'-\zeta)-\operatorname{fin}u\operatorname{cof}(A'-\zeta))\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(u-\beta)+1\right)$$
$$-R(R-r(\operatorname{cof}u\operatorname{cof}(A'-\zeta)+\operatorname{fin}u\operatorname{cof}I\operatorname{fin}(A'-\zeta)))\frac{E}{a}\operatorname{fin}(u-\beta)\Big)$$
$$\left(\frac{E'}{a'}\operatorname{cof}(A'-\beta')+1\right)du=0.$$

Cette équation sert à résoudre toutes les questions relatives aux plus courtes distances des Planetes & des Cometes à la Terre. Nous remarquerons que dans le cas des orbites paraboliques, l'on a $\frac{E}{a}=1$, $P=4D$; en nommant d'ailleurs

D la distance périhélie de la Comete.

(462) Si l'on vouloit réſoudre généralement la queſtion des plus courtes diſtances, on tomberoit dans une ſolution très-compliquée, de laquelle il ſeroit difficile de rien conclure ; mais ſi l'on ſuppoſe circulaires les orbites de la Terre & de la Planete, le Problême eſt alors beaucoup plus facile. En effet, dans ce cas l'on a $E = 0$, $E' = 0$; & l'équation (5) du paragraphe précédent devient

$$(1)\ (\text{Tang}\, u \,\text{coſ}\, I - \text{Tang}\,(A' - \zeta))\, dA' + (\text{Tang}\,(A' - \zeta)\,\text{coſ}\, I - \text{tang}\, u)\, du = 0.$$

Maintenant puiſque généralement les tems des révolutions périodiques ſont comme les racines quarrées des cubes des rayons ; & que les arcs décrits dans un même tems, par les Planetes dans leurs orbites circulaires, ſont en raiſon inverſe des tems des révolutions, l'on a

$dA' : du :: R^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}}$ donc enfin

$$(2)\ (\text{Tang}\, u \,\text{coſ}\, I - \text{tang}\,(A' - \zeta))\, R^{\frac{3}{2}} + (\text{Tang}\,(A' - \zeta)\,\text{coſ}\, I - \text{tang}\, u)\, r^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Si l'on part d'une certaine époque, par exemple, de l'équinoxe d'Automne pour une certaine année ; & que l'on nomme

C la diſtance de la Planete dans ſon orbite, au nœud aſcendant, à l'époque dont il s'agit ;

l'on aura évidemment pour un inſtant quelconque, la relation ſuivante entre la longitude A' de la Terre vue du Soleil & la diſtance de la Planete au nœud aſcendant

$$(3)\ (u - C)\, R^{\frac{3}{2}} - A'\, r^{\frac{3}{2}} = 0\ ;$$

Cette équation combinée avec la précédente réſoudra la queſtion propoſée.

On doit ſentir par cet exemple particulier, combien la ſolution générale eſt compliquée. Au reſte il étoit aiſé de prévoir cette complication, puiſque la ſolution renferme eſſentiellement la conſidération des mouvemens ſimultanés des Aſtres dans leurs orbites reſpectives. Nous remarquerons enfin que la ſolution finale eſt tranſcendante, même dans le cas des orbites circulaires ; car ſi dans l'équation (2) l'on élimine les valeurs de $r^{\frac{3}{2}}, R^{\frac{3}{2}}$ au moyen de l'équation (3), l'on introduit dans l'équation, les arcs u & A' qui ſont alors combinés avec leur ſinus.

ARTICLE IV.

Détermination du minimum minimorum *de diſtance de la Planete ou de la Comete à la Terre.*

(463) Au lieu de déterminer ſimplement les *maxima* & *minima* de diſtances de la Comete ou de la Planete à la Terre, on peut chercher

les *minima minimorum* des diſtances de ces Aſtres à la Terre. Le Problême devient alors traitable, & il préſente d'ailleurs un objet de curioſité intéreſſant.

Il eſt aiſé d'aſſigner le ſimptôme qui réſout le Problême. En effet, puiſque la diſtance cherchée eſt un *minimum minimorum*, il faut ſuppoſer nuls à la fois les coéficiens de dA' & de du dans l'équation (5) du §. 461, l'on a donc

$$(1)\ R(\sin u \cos I \cos(A'-\zeta) - \cos u \sin(A'-\zeta))\left(\frac{E'}{a'}\cos(A'-\beta')+1\right)$$
$$-(r - R(\cos u \cos(A'-\zeta) + \sin u \cos I \sin(A'-\zeta)))\frac{E'}{a'}\sin(A'-\beta')=0;$$

$$(2)\ r(\cos u \cos I \sin(A'-\zeta) - \sin u \cos(A'-\zeta))\left(\frac{E}{a}\cos(u-\beta)+1\right)$$
$$-(R - r(\cos u \cos(A'-\zeta) + \sin u \cos I \sin(A'-\zeta)))\frac{E}{a}\sin(u-\beta)=0.$$

Nous remarquerons, relativement à la queſtion précédente, qu'elle ne détermine pas ſeulement le *minimum minimorum* de diſtance de l'Aſtre à la Terre ; elle ſert encore à connoître les points où l'Aſtre approche le plus de l'orbite terreſtre ; car il eſt évident que ces points coïncident avec ceux où l'Aſtre ſeroit à la plus petite diſtance poſſible de la Terre, ſi la Terre ſe trouvoit préciſément dans les points correſpondans de ſon orbite.

Du cas des Planetes

(464). Si l'on ſuppoſe circulaires les orbites de la Terre & des Planetes, & cette ſuppoſition ſuffit pour les Planetes, la ſolution devient fort ſimple; en effet à cauſe de $E'=0$; & de $E=0$, l'on a

$$(1)\ \text{Tang}\, u \cos I - \text{Tang}(A'-\zeta) = 0,$$
$$(2)\ \text{Tang}(A'-\zeta)\cos I - \text{tang}\, u = 0.$$

D'où l'on tire

$$(3)\ \text{Tang}(A'-\zeta)(1-\cos^2 I) = 0.$$

Ces équations font voir que le *minimum minimorum* de diſtance de la Planete à la Terre a lieu, 1°. lorſqu'à la fois $\text{Tang}(A'-\zeta)=0$, & $\text{Tang}\, u=0$. 2°, Lorſque $1-\cos^2 I=0$, & $\text{Tang}\, u = \text{Tang}(A'-\zeta)$. Ces ſolutions ſont conformes à ce que l'on ſait d'ailleurs. En effet la condition de $\text{Tang}(A'-\zeta)=0$, & de $\text{Tang}\, u=0$, indique que le *minimum minimorum* de diſtance de la Planete à la Terre, arrive lorſque la Planete & la Terre ſe trouvent en même tems dans le nœud de la Planete. La condition de $1-\cos^2 I=0$, & de $\text{Tang}(A'-\zeta)=\text{Tang}\, u$, démontre que ſi l'inclinaiſon de l'orbite de la Planete étoit nulle, tous les points de l'orbite ſatisferoient également au Problême ; il ſuffiroit que la Terre & la Planete fuſſent dans le même rayon vecteur.

Du cas des Cometes.

(465) Dans les recherches qui vont ſuivre, nous continuerons de regarder l'orbite de la Terre comme circulaire, mais nous ſuppoſerons que l'orbite de la Comete eſt parabolique ; & comme alors $E' = 0$, $\frac{E}{a} = 1$, l'on aura

$$(1)\quad \text{Tang}\, u \cos I - \text{Tang}\,(A' - \zeta) = 0\,;$$

Mais au lieu de l'équation (2) du §. précédent, il conviendra d'employer l'équation (2) du §. 463, que l'on mettra ſous la forme ſuivante,

$$(2)\quad r(\cos I\, \text{Tang}\,(A' - \zeta) - \text{Tang}\, u)\,(\cos(u - \beta) + 1)$$
$$- \left(\frac{R}{\cos u \cos(A' - \zeta)} - r\,(1 + \text{Tang}\, u \cos I\, \text{Tang}\,(A' - \zeta))\right) \sin(u - \beta) = 0.$$

L'on aura de plus

$$(3)\quad R\,(\cos(u - \beta) + 1) - 2\,D = 0.$$

Ces équations vont réſoudre la queſtion propoſée.

(466) Nous remarquerons d'abord que l'équation (1) du §. précédent déſigne un triangle ſphérique rectangle, dans lequel u eſt l'hypothenuſe, $A' - \zeta$ eſt le côté adjacent à l'angle droit, & I eſt l'inclinaiſon de l'hypothenuſe ſur le côté $A' - \zeta$. Le *minimum minimorum* de diſtance de la Comete & de la Terre, dans l'hypotheſe de l'orbite circulaire de la Terre, ne peut donc avoir lieu que lorſque la Comete & la Terre ſe trouvent à la fois dans un plan perpendiculaire à l'Ecliptique ; mais cette condition n'eſt pas ſuffiſante, il faut de plus que les équations (2) & (3) du §. précédent ſoient ſatisfaites.

Si dans l'équation (2) du §. précédent, l'on élimine R au moyen de l'équation (3), que l'on ſubſtitue à $\text{Tang}\,(A' - \zeta)$ ſa valeur $\text{Tang}\, u \cos I$, & à $\cos(A' - \zeta)$ ſa valeur $\frac{1}{\sqrt{(1 + \text{Tang}^2 u \cos^2 I)}}$ elle deviendra

$$(1)\quad r\,(\sin(u - \beta)(1 + \text{tang}^2 u \cos^2 I) - \text{Tang}\, u \sin^2 I\,(\cos(u - \beta) + 1))$$
$$- \frac{2\,D \sin(u - \beta)}{\cos(u - \beta) + 1} \times \frac{\sqrt{(1 + \text{tang}^2 u \cos^2 I)}}{\cos u} = 0.$$

Cette équation détermine le lieu de la Comete dans ſon orbite, lorſqu'elle eſt à ſa plus petite diſtance de l'Ecliptique.

Nous remarquerons ici que l'origine des angles u & $A' - \zeta$ eſt au nœud aſcendant de l'orbite de la Comete ſur l'Ecliptique, & que de plus, à l'inſtant des plus courtes diſtances de la Comete à la Terre, ces deux Aſtres ſont toujours dans un même plan perpendiculaire à l'Ecliptique; $\cos u$ & $\cos(A' - \zeta)$ changent donc de ſignes par les mêmes ſuppoſitions ; $\cos(A' - \zeta) \cos u$, & $\frac{\cos u}{\cos(A' - \zeta)}$ ſont donc des quantités tou-

jours positives ; mais $\text{cos}(A' - \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{Tang}^2 u \cos^2 I)}}$. Donc, dans l'équation (1) la quantité $\frac{\sqrt{(1 + \text{Tang}^2 u \cos^2 I)}}{\cos u}$ est toujours positive.

(467) Lorsque l'on aura déterminé le point u de l'orbite de la Comete qui approche le plus de l'orbite de la Terre, on déterminera le point correspondant de l'orbite Terrestre, au moyen de l'équation

$$(1)\ \text{Tang}\ (A' - \zeta) = \text{Tang}\ u\ \cos I.$$

On déterminera le rayon vecteur R de la Comete, au moyen de l'équation

$$(2)\ R = \frac{2D}{\cos(u - \beta) + 1}.$$

On calculera enfin la plus courte distance de l'orbite de la Comete à l'orbite de la Terre, au moyen de l'équation (1) du §. 459, que l'on mettra sous la forme suivante ;

$$(3)\ \Delta = \sqrt{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos u \sqrt{(1 + \text{tang}^2 u \cos^2 I)})}.$$

Il est aisé de démontrer par des raisons analogues à celles du §. précédent, que dans l'équation (3), la quantité $\cos u \sqrt{(1 + \text{tang}^2 u \cos^2 I)}$ est toujours positive.

(468) Il n'est pas facile de résoudre l'équation (1) du §. 466 ; nous remarquerons cependant, pour faciliter cette solution, que les valeurs de u qui satisfont au Probleme, ne peuvent pas être fort différentes de celles correspondantes aux nœuds, si l'inclinaison de l'orbite est très-grande : & des points de l'orbite de la Comete dans lesquels sa distance au Soleil est égale à celle de la Terre au Soleil, si l'inclinaison est petite. On commencera donc par essayer ces points ; ces recherches fourniront des moyens pour tomber facilement sur la valeur cherchée. Comme cette méthode suppose que l'on connoît l'anomalie de la Comete correspondante au point de son orbite où sa distance au Soleil égale le rayon correspondant de l'orbite de la Terre, on déterminera cette anomalie au moyen de l'équation suivante

$$(1)\ r(\cos(u - \beta) + 1) - 2D = 0.$$

Application du Calcul à la Comete de 1680.

(469) Cette Comete, l'une des plus célebres que l'on ait observées, & que l'on croit être la même que celle qui parut à la mort de Jules César, a été calculée par Halley ; voici ses élémens.

Nœud ascendant.	9ˢ 2ᵈ 2′ 0″.
Nœud descendant	3 2 2 0.
Lieu du périhelie sur l'orbite . . .	8 22 39 30.
Inclinaison de l'orbite.	60 56 0.
Distance perihélie	0,006125.
Mouvement direct.	
Passage par le périhélie	18 Décembre 1680, 0ʰ 15′ 0″.

Puisque le nœud ascendant de la Comete est dans $9^s\ 2^d\ 2'\ 0''$, que le lieu du périhélie sur l'orbite est dans $8^s\ 22^d\ 39'\ 30''$, que l'inclinaison de l'orbite est de $60^d\ 56'\ 0''$, que la distance périhélie $= 0{,}006125$; l'on a, $\zeta = 272^d\ 2'\ 0''$; $\beta = 350^d\ 37'\ 30''$; $I = 60^d\ 56'\ 0''$; $2D = 0{,}01225$. Je remarque ensuite que relativement à cette Comete, il n'est pas possible que le *minimum* de distance à l'orbite de la Terre ait lieu dans le nœud ascendant. En effet, dans ce nœud $u = 0$; & conséquemment $u - \beta = 9^d\ 22'\ 30''$; l'équation (1) du §. 466 est donc très-éloignée d'être satisfaite.

Quant au nœud descendant, nous remarquerons que, comme dans ce nœud $u = 180^d$, l'équation (1) du §. 466 approche d'être satisfaite; on peut donc essayer des calculs aux environs de ce nœud. Nous observerons d'abord que puisque sa longitude vue du Soleil est de $3^s\ 2^d\ 2'$, le rayon vecteur r de la Terre qu'il convient d'employer dans les calculs, est celui qui répond à la longitude du Soleil de $9^s\ 2^d\ 2'$ vue de la Terre; l'on a donc $r = 0{,}98327$. De plus, puisque $u = 180^d$, l'on a $\sin u = 0$; $\text{Tang}\ u = 0$; $\cos u = -1$; $u - \beta = 189^d\ 22'\ 30''$; $1 + \tan^2 u \cos^2 I = 1$; $\frac{\sqrt{(1 + \tan^2 u \cos^2 I)}}{\cos u} = 1$; $\cos(u - \beta) + 1 = 0{,}01336$; $\frac{2D}{\cos(u-\beta)+1} = 0{,}91691$. L'équat. (1) du §. 466 devient donc $0{,}98327 - 0{,}91691 = 0{,}06636$; d'où l'on conclura que la supposition de la Comete dans le nœud descendant, ne rend pas précisément nulle l'équation (1) du §. 466.

Si l'on cherche le point de l'orbite de la Comete, où sa distance au Soleil a été égale à $0{,}98327$, on trouvera facilement, au moyen de l'équation (1) du §. 468, dans laquelle on fera $2D = 0{,}01225$, $r = 0{,}98327$, que la valeur de $\cos(u - \beta)$ étoit alors de $-0{,}98754$, & que par conséquent l'on avoit $u - \beta = 189^d\ 3'\ 15''$; d'où l'on conclura $u = 179^d\ 40'\ 45''$. L'on aura donc dans ce cas, $\cos(u - \beta) + 1 = 0{,}01246$, & l'on pourra supposer sans erreur, $\tan u \sin^2 I (\cos(u-\beta)+1) = 0$; $1 + \tan^2 u \cos^2 I = 1$; $\frac{\sqrt{(1+\tan^2 u \cos^2 I)}}{\cos u} = 1$; & l'équation (1) du §. 466 deviendra $0{,}98327 - 0{,}98315 = 0{,}00012$. L'équation (1) du §. 466 est donc aussi pleinement satisfaite qu'il est nécessaire; & la valeur de u qui répond au *minimum* de distance de l'orbite de la Comete à l'orbite de la Terre, est de $179^d\ 40'\ 45''$.

(470) Puisque l'on connoît les valeurs de u & de $u - \beta$ qui satisfont au *minimum* de distance de l'orbite de la Comete à l'orbite de la Terre, on conclura facilement, au moyen des équations (1), (2) & (3) du §. 467, que l'on avoit pour valeurs correspondantes de $A' - \zeta$, A', R & Δ: $A' - \zeta = 179^d\ 50'\ 37''$; $R = 0{,}98327$; $A' = 3^s\ 1^d\ 52'\ 37''$; $\Delta = 0{,}00433$. Et si l'on suppose la moyenne distance du Soleil à la Terre de 34558400 lieues, cette derniere valeur de Δ répond à 151270 lieues.

On voit par là que le *minimum* de distance de la Comete de 1680, à l'orbite de la Terre, a lieu lorsque cette Comete n'est éloignée du

nœud descendant, que de 19′ 15″; le point correspondant de l'orbite de la Terre est celui qui a pour longitude $3^s\,1^d\,52'\,37''$; la distance de la Comete à l'orbite de la Terre est alors un peu plus grande que celle de la Lune à la Terre.

(471) Dans le cas que nous venons de discuter, la distance de la Comete au Soleil étoit égale à la distance correspondante du Soleil à la Terre; de plus l'on avoit $\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 u \cos^2 I)} = 1$; de sorte que l'expression de Δ du paragraphe 467, se réduisoit à l'expression suivante, $\Delta = \sqrt{(2r^2(1 - \cos u))}$; mais $1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{1}{2} u$, l'expression de Δ pouvoit donc être mise sous la forme qui suit,

$$(1)\quad \Delta = 2r \sin \tfrac{1}{2} u.$$

J'ai cru devoir faire cette remarque qui peut être utile dans des cas semblables.

Article V.

Usage de l'équation (3) du §. 467, pour déterminer le tems que la Comete est à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'une quantité assignée.

(472) On peut au moyen de l'équation (3) du §. 467, déterminer avec beaucoup de facilité, le tems qu'une Comete est à une distance de l'orbite de la Terre, plus petite qu'une quantité assignée; en effet, si l'on reprend l'équation (3) du §. 467, l'on aura

$$(1)\quad r^2 + R^2 - \Delta^2 - 2Rr \cos u \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 u \cos^2 I)} = 0.$$

Mais $R = \dfrac{2D}{\cos(u - \beta) + 1}$; donc enfin

$$(2)\quad (\cos(u-\beta)+1)^2 \times (r^2 - \Delta^2) - 4Dr(\cos u - \beta) + 1) \times \cos u \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 u \cos I)} + 4D^2 = 0.$$

Cette équation déterminera les points extrêmes de l'arc de la trajectoire décrit par la Comete, pendant le tems qu'elle est à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'une quantité donnée, & on la résoudra par les méthodes ordinaires d'approximation.

Si l'on suppose la distance donnée d'un million de lieues, & la moyenne distance de la Terre au Soleil de 34558400 lieues, l'on aura $\Delta = 0{,}0289365$; $\Delta^2 = 0{,}0008373\overset{.}{2}$.

Application à la Comete de 1680.

(473) Dans le cas de la Comete de 1680, l'on a $r = 0{,}98327$; $2D = 0{,}01225$; $r^2 = 0{,}96682$; $r^2 - \Delta^2 = 0{,}96598$; $4D^2 = 0{,}00015007$. J'essaie donc successivement plusieurs valeurs de u peu différentes de $179^d\,40'\,45''$, qui répond au *minimum* de distance de la Comete à l'orbite

de la Terre, & je vois que les quantités suivantes $u = 179^d\ 33'\ 0''$, $u = 179^d\ 48'\ 47''$ rendent nulle l'équation (2) du §. précédent ; ce sont celles qui satisfont au Problême. Si l'on ajoute à ces valeurs, la longitude du nœud ascendant de la Comete, on verra que l'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire, pendant qu'elle a été à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'un million de lieues, est compris entre $3^s\ 1^d\ 35'\ 0''$ & $3^s\ 1^d\ 50'\ 47''$.

Article VI.

Notice des Cometes qui ont approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues ; & Calcul des plus courtes distances de ces Cometes à l'Ecliptique

Je me propose, dans cet Article, de donner la Notice des Cometes qui ont approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues ; & le Calcul des plus courtes distances de ces Cometes à l'Ecliptique, ainsi que l'arc que ces Cometes ont décrit dans leurs orbites, lorsqu'elles étoient à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'un million de lieues. Je ne parlerai dans cette Notice, que des Cometes dont on a calculé les orbites.

Comete de 837.

(474) La premiere Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues, est celle de 837. Cette comete est célebre dans l'Histoire, par la frayeur qu'elle inspira à Louis-le-Débonnaire ; voici ses élémens :

Nœud ascendant	$6^s\ 26^d\ 33'$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	9 19 3
Inclinaison de l'orbite	10
Distance du périhélie	0,58000
Mouvement rétrograde.	
Passage par le Périhélie	1er. Mars 837.

D'après ces élémens, on trouvera, par les méthodes précédentes, que le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre, est dans $6^s\ 27^d\ 53'\ 0''$ comptés sur l'orbite. La longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre, est de $6^s\ 27^d\ 51'\ 42''$ comptée sur l'Ecliptique. Le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre, est de 0,004064, ou de 140460 lieues. L'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire, pendant le tems qu'elle s'est approchée de l'Ecliptique plus près que d'un million de lieues, est compris entre $6^s\ 26^d\ 5'\ 2''$ & $6^s\ 29^d\ 54'\ 22''$ sur l'orbite de la Comete.

Comete de 1618.

(475) La seconde Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre

plus près que d'un million de lieues, est celle de 1618 ; voici ses élémens d'après Halley.

Nœud ascendant	2f 16d 1′ 0″
Lieu du périhélie sur l'orbite .	0 2 14 0
Inclinaison de l'orbite . . .	37 34 0
Distance périhélie	0,37975
Mouvement direct	
Passage au périhélie . . . . 8 Novembre 1618, 12h 33′ 0″	

D'après ces élémens, on trouvera que le *maximum* d'approximation de cette Comete à l'orbite de la Terre, est dans 8f 17d 21′ 5″ comptés sur l'orbite. La longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre est de 8f 17d 4′ 28″ sur l'Ecliptique. Le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre est de 0,01452 ou de 501620 lieues. L'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire pendant le tems qu'elle s'est approchée de l'Ecliptique plus près que d'un million de lieues est compris entre 8f 16d 25′ 25″ & 8f 18d 9′ 40″ sur l'orbite de la Comete.

Comete de 1680.

(476) La troisieme Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre, plus près que d'un million de lieues, est la fameuse Comete de 1680. Voici ses élémens d'après Halley.

Nœud ascendant	9f 2d 2′ 0″
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	8 22 39 30
Inclinaison de l'orbite	60 56 0
Distance périhélie.	0,006125
Mouvement direct.	
Passage par le périhélie . . . . 18 Décembre 1680, 0h 15′ 0″.	

D'après ces élémens, nous avons vu que le *maximum* d'approximation de cette Comete à l'orbite de la Terre est dans 3f 1d 42′ 15″ compté sur l'orbite de la Comete. La longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre est de 3f 1d 52′ 37″ ; le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre est de 0,00438 ou de 151270 lieues. L'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire pendant le tems qu'elle s'est approchée de l'Ecliptique plus près que d'un million de lieues, est compris 3f 1d 35′ 0″ & 3f 1d 50′ 47″.

Comete de 1684.

(477) La quatrieme Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues est celle de 1684 ; voici ses élémens d'après Halley.

Nœud ascendant	8f 28d 15′ 0″
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	7 28 52 0
Inclinaison de l'orbite	65 48 40
Distance périhélie	0,96015
Mouvement direct	
Passage au périhélie . . . . . 8 Juin 1684, 10h 26′ 0″.	

D'après ces élémens on trouvera que le *maximum* d'approximation de

cette Comete à l'orbite de la Terre est dans $8^s\ 28^d\ 5'\ 39''$ sur l'orbite de la Comete ; la longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre est de $8^s\ 26^d\ 11'\ 10''$ sur l'Ecliptique ; le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre est de 0 00919 ou de 317470 lieues. L'arc decrit par la Comete dans sa trajectoire pendant le tems qu'elle s'est approchée de l'Ecliptique plus près que d'un million de lieues, est compris entre $8^s\ 26^d\ 25'\ 50''$ & $8^s\ 29^d\ 48'\ 10''$ sur l'orbite de la Comete.

Comete de 1702.

(478) La cinquieme Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues, est celle de 1702 ; voici ses élémens d'après l'Abbé de la Caille.

Nœud ascendant	6^s	9^d	$25'$	$15''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . . .	4	18	41	3
Inclinaison de l'orbite		4	30	0
Distance périhélie	0,64590			
Mouvement direct.				
Passage au Périhélie . . . . . . 13 Mars 1702, $14^h\ 22'\ 0''$.				

D'après ces élémens, on trouvera que le *minimum* de distance de la Comete à l'Ecliptique est dans $7^s\ 1^d\ 47'\ 30''$ sur l'orbite. La longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre est de $7^s\ 1^d\ 43'\ 45''$ sur l'Ecliptique. Le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre est de 0,02997, ou de 1,035700 lieues. Quoique cette Comete n'ait pas approché précisément d'un million de lieues de l'orbite de la Terre, comme cependant elle est sur la limite, je n'ai pas cru devoir la passer sous silence.

Comete de 1743.

(479) La sixieme Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues, est celle de 1743 ; voici ses élémens d'après M. Struick.

Nœud ascendant	2^s	8^d	$10'$	$48''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	3	2	58	4
Inclinaison de l'orbite		2	15	50
Distance périhélie.	0,83840			
Mouvement direct.				
Passage au périhélie . . . . . 10 Janvier 1743, $21^h\ 24'\ 57''$.				

D'après ces élémens on trouvera que le *minimum* de distance de la Comete à l'Ecliptique est dans $1^s\ 17^d\ 6'\ 33''$ sur l'orbite. La longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre est de $1^s\ 17^d\ 7'\ 28''$ sur l'Ecliptique. Le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre est de 0,01404 ou de 485330 lieues L'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire pendant qu'elle étoit à une distance de l'Ecliptique moindre qu'un million de lieues, est compris entre $1^s\ 13^d\ 37'\ 10''$ & $1^s\ 20^d\ 30'\ 14''$ sur l'orbite.

Comete de 1763.

(480) La ſeptieme Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues, eſt celle de 1763 ; voici ſes élémens d'après M. Pingré.

Nœud aſcendant	$11^s\ 26^d\ 29'\ 29''$
Lieu du périhélie ſur l'orbite . .	$2\ 25\ 0\ 48$
Inclinaiſon du plan de l'orbite . .	$73\ 39\ 29$
Diſtance périhélie.	0,49842
Mouvement direct.	
Paſſage au périhélie	1^{er}. Novembre 1763, $21^h\ 6'\ 29''$.

Comme cette Comete peut approcher de l'orbite terreſtre plus près que d'un million de lieues, vers le nœud aſcendant & vers le nœud deſcendant, il faut calculer pour ces deux circonſtances.

Vers le nœud aſcendant, le *minimum* de diſtance de la Comete à l'Ecliptique eſt dans $11^s\ 25^d\ 33'\ 45''$ ſur l'orbite ; la longitude du point correſpondant de l'orbite de la Terre eſt de $11^s\ 26^d\ 13'\ 48''$ ſur l'Ecliptique. Le *minimum* de diſtance de la Comete à l'orbite de la Terre, eſt de 0,02221, ou de 767930 lieues. L'arc décrit par la Comete dans cette partie de ſa trajectoire, pendant qu'elle eſt à une diſtance de l'Ecliptique moindre qu'un million de lieues, eſt compris entre $11^s\ 24^d\ 31'\ 8''$, & $11^s\ 26^d\ 17'\ 3''$ ſur l'orbite.

Vers le nœud deſcendant le *minimum* de diſtance de la Comete à l'Ecliptique eſt dans $5^s\ 25^d\ 41'\ 2''$ ſur l'orbite ; la longitude du point correſpondant de l'orbite de la Terre eſt de $5^s\ 26^d\ 15'\ 51''$ ſur l'Ecliptique. Le *minimum* de diſtance de la Comete à l'orbite de la Terre, eſt de 0,01831, ou de 632660 lieues. L'arc décrit par la Comete dans cette partie de ſa trajectoire, pendant qu'elle eſt à une diſtance de l'Ecliptique moindre qu'un million de lieues, eſt compris entre $5^s\ 24^d\ 53'\ 7''$, & $5^s\ 26^d\ 35'\ 17''$ ſur l'orbite.

Comete de 1770.

(481) La huitieme Comete qui ait approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues, eſt celle de 1770. Voici ſes élémens.

Nœud aſcendant	$4^s\ 19^d\ 39'\ 5''$
Lieu du périhélie ſur l'orbite . .	$11\ 25\ 27\ 16$
Inclinaiſon du plan de l'orbite . .	$1\ 44\ 30$
Diſtance périhélie	0,636878
Mouvement direct.	
Paſſage au Périhélie	9 Août 1770, $0^h\ 16'\ 54''$.

Cette Comete, attendu la très-petite inclinaiſon du plan de ſon orbite, peut approcher de l'orbite terreſtre plus près que d'un million de lieues dans deux circonſtances différentes. On a d'abord un *minimum* de diſtance de la Comete à l'Ecliptique, dans $9^s\ 10^d\ 8'\ 57''$ ſur l'orbite. La longitude du point correſpondant de l'orbite de la Terre eſt de $9^s\ 10^d\ 9'\ 45''$ ſur l'Ecliptique. Le *minimum* de diſtance de la Comete à l'orbite de la

Terre,

Terre, est de 0,01965, ou de 679120 lieues. L'arc décrit par la Comete dans cette partie de sa trajectoire, pendant qu'elle est à une distance de l'orbite de la Terre moindre qu'un million de lieues, est compris entre $9^s 8^d 36' 34''$ & $9^s 11^d 41' 36''$ sur l'orbite.

On a un second *maximum* d'approximation de cette Comete à l'Ecliptique, dans $2^s 8^d 26' 6''$ sur l'orbite. La longitude du point correspondant de l'orbite de la Terre est de $2^s 8^d 26' 36''$ sur l'Ecliptique. Le *minimum* de distance de la Comete à l'orbite de la Terre est de 0,02836, ou de 979935 lieues. L'arc décrit par la Comete dans cette partie de sa trajectoire, pendant qu'elle est à une distance de l'orbite de la Terre moindre qu'un million de lieues, est compris entre $2^s 7^d 56' 41''$ & $2^s 8^d 51' 16''$ sur l'orbite.

Cometes qui, après les précédentes, ont le plus approché de l'orbite de la Terre.

(482) Parmi les Cometes dont les élémens ont été déterminés d'après leurs apparitions, je n'en connois point d'autres qui puissent approcher de l'orbite de la Terre, plus près que d'un million de lieues. Sans doute il y a un plus grand nombre de Cometes qui sont dans ce cas ; mais il n'est pas possible de rien dire de certain sur ce sujet.

On peut ajouter aux huit Cometes dont je viens de calculer les plus courtes distances à l'orbite de la Terre, celles de 1299, 1472, 1596, 1683, 1739, 1759, 1760, 1764, 1769, 1771, 1787. Ce sont celles qui, après les huit Cometes dont nous venons de parler, ont le plus approché de l'orbite de la Terre. Comme leurs plus petites distances à l'Ecliptique surpassent un million de lieues, je me suis contenté de les indiquer, sans entrer dans aucun détail à leur égard. Je remarquerai seulement que le *minimum* de distance de la Comete de 1764, à l'orbite de la Terre, est de 1189400 lieues, dans $9^s 21^d 10' 44''$ sur l'orbite de la Comete.

ARTICLE VII.

Détermination de la durée du tems qu'une Comete est à des distances de l'orbite de la Terre plus petites qu'une quantité donnée ; & de l'époque précise où la Comete est à ces distances.

(483) Dans les Articles précédens, j'ai donné une formule pour déterminer l'arc décrit par une Comete dans sa trajectoire, pendant le tems qu'elle est à une distance de l'orbite de la Terre, plus petite qu'une distance donnée ; & j'ai appliqué le calcul à huit Cometes, les seules qui, d'après les élémens connus, puissent approcher de l'Ecliptique plus près que d'un million de lieues. Je me propose dans cet Article de déterminer généralement la durée du tems qu'une Comete est à des distances de l'orbite de la Terre plus petites qu'une quantité donnée ; je déter-

minerai ensuite l'époque précise où les Cometes dont il a été question ci-dessus, ont été à des distances de l'Ecliptique plus petites qu'un million de lieues.

Pour résoudre les Problêmes proposés, soient

$u1$, $u2$, les points extrêmes qui terminent l'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire, pendant le tems qu'elle est à des distances de l'orbite de la Terre plus petites qu'une quantité donnée ; je désignerai ces points, par leurs distances angulaires $u1$, $u2$, au nœud ascendant de la Comete, comptées sur l'orbite ;

$t1$, $t2$, le tems employé par la Comete à parvenir de son périhélie aux points $u1$, $u2$ de son orbite, exprimé en minutes d'heures ;

D la distance périhélie de la Comete ;

β l'angle du lieu du périhélie de la Comete sur l'orbite, avec le nœud ascendant; cet angle, ainsi que les angles $u1$, $u2$, doivent être comptés en suivant le sens du mouvement de la comete.

Il suit de l'équation (2) du §. 434, que l'on a

$$(1)\quad t1 = 109{,}6153 \times 1440'\, D^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}(u1-\beta) + \tfrac{3}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u1-\beta)\right),$$

$$(2)\quad t2 = 109{,}6153 \times 1440'\, D^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}(u2-\beta) + \tfrac{3}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(u2-\beta)\right),$$

(3) Tems pendant lequel la Comete est à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'une quantité assignée $= t2 - t1$.

Ces équations vont résoudre les questions proposées.

Application du Calcul à la Comete de 1680.

(484) Relativement à la Comete de 1680, nous avons vu § (473) que les valeurs de $u1$, $u2$ qui répondent aux extrémités de l'arc que décrit la Comete dans sa trajectoire, pendant le tems qu'elle est à une distance de l'orbite de la Terre moindre qu'un million de lieues, sont $u1 = 179^d\,33'\,0''$, $u2 = 179^d\,48'\,47''$. Nous avons vu d'ailleurs que, relativement à cette Comete, $\beta = 350^d\,37'\,30''$, $D = 0{,}006125$; on a donc $u1 - \beta = 188^d\,55'\,30''$; $u2 - \beta = 189^d\,11'\,17''$. On conclura donc facilement au moyen des équations du § précédent, que la Comete de 1680 a commencé à être à une distance de l'orbite de la Terre moindre qu'un million de lieues, 28 jours 3 h 7' avant son passage par le périhélie ; qu'elle a été 2 jours $7^h\,38'$ à des distances de l'orbite de la Terre moindres qu'un million de lieues ; & qu'elle a cessé d'être à ces distances de l'Ecliptique, 25 jours $19^h\,29'$ avant son passage par le périhélie ; & comme le passage par le périhélie a eu lieu le 18 Décembre $0^h\,15'$, la Comete a commencé à être à des distances de l'orbite de la Terre moindres qu'un million de lieues, le 19 Novembre $21^h\,8'$; & elle a continué jusqu'au 22 Novembre $4^h\,45'$.

Nous avons vu (§ 476) que la longitude de l'Ecliptique correspon-

dante au *minimum* de diſtance de la Comete à l'orbite terreſtre eſt de $3^s\ 1^d\ 52'\ 37''$. Pour que la Comete eût été effectivement à des diſtances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit donc fallu que la Comete eût parcouru la portion de ſon orbite qui avoiſine l'Ecliptique, vers le 25 Décembre, tems auquel la longitude de la Terre vue du Soleil eſt de $3^s\ 1^d\ 52'$; la Comete a donc paſſé par le périhélie 34 jours trop tôt, à l'époque de 1680.

Epoques où les Cometes de 837, 1618, 1680, 1684, 1702, 1743, 1763 & 1770, ont été à des diſtances de l'Ecliptique plus petites qu'un million de lieues.

Comete de 837.

(485) On trouvera par de ſemblables calculs que la Comete de 837 a été 3 jours $19^h\ 38'$ à des diſtances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues ; depuis le 5 Avril $20^h\ 9'\ 36''$, juſqu'au 9 Avril $15^h\ 47'\ 16''$. Pour que la Comete eût été effectivement à des diſtances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût paſſé 9 jours plutard par le périhélie. Comme cette Comete revenoit du périhélie, & que d'ailleurs elle a paſſé très-près de la Terre, on ne doit point être étonné de la frayeur qu'elle a inſpirée.

Comete de 1618.

(486) La Comete de 1618 a été 2 jours $0^h\ 43'$, à des diſtances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues; depuis le 29 Septembre $18^h\ 12'\ 48''$ juſqu'au 1^er^ Octobre $8^h\ 56'\ 0''$. Pour que cette Comete eût été effectivement à des diſtances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût paſſé 114 jours plutôt par ſon périhélie.

Comete de 1680.

(487) La Comete de 1680 a été 2 jours $7^h\ 38'$ à des diſtances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues; depuis le 19 Novembre $21^h\ 8'$, juſqu'au 22 Novembre $4^h\ 45'$. Pour que cette Comete eût été effectivement à des diſtances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût paſſé 34 jours plutard par ſon périhélie.

Comete de 1684.

(488) La Comete de 1684 a été 2 jours $11^h\ 38'$, à des diſtances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues ; depuis le 27 Juin $18^h\ 52'\ 58''$, juſqu'au 30 Juin $6^h\ 31'\ 27''$. Pour que cette Comete eût été

effectivement à des distances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût passé 8 jours plutôt par son périhélie.

Comete de 1702.

(489) Nous avons déjà remarqué que la Comete de 1702 n'avoit pas précisément approché de l'orbite de la Terre plus près qu'un million de lieues ; nous ne ferons donc aucune recherche sur le nombre de jours où sa distance à l'orbite de la Terre a été plus petite qu'un million de lieues ; les racines de l'équation seroient toutes imaginaires.

Comete de 1743.

(490) La Comete de 1743 a été 5 jours $9^h\ 36'$, à des distances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues ; depuis le 10 Décembre 1742 $3^h\ 39'\ 29''$, jusqu'au 15 Décembre $13^h\ 15'\ 21''$ de la même année. Pour que cette Comete eût été effectivement à des distances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût passé un mois plutôt par le périhélie.

Comete de 1763.

(491) La Comete de 1763 a été deux fois à des distances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues ; 1°. 1 jour $18^h\ 39'\ 12''$, depuis le 23 Septembre $20^h\ 56'\ 5''$, jusqu'au 25 Septembre $15^h\ 35'\ 17''$; 2°. 2 jours $1^h\ 40'\ 48''$, depuis le 9 Décembre $18^h\ 28'\ 5''$, jusqu'au 12 Décembre $2^h\ 8'\ 53''$. Pour que cette Comete eût été effectivement à des distances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût passé 5 jours plutôt, ou 3 mois $\frac{1}{3}$ plutard par le périhélie.

Comete de 1770.

(492) La Comete de 1770 a été deux fois à des distances de l'orbite de la Terre plus petites qu'un million de lieues ; 1°. 2 jours $20^h\ 38'\ 24''$, depuis le 29 Juin $22^h\ 7'\ 18''$, jusqu'au 2 Juillet $18^h\ 45'\ 42''$. 2°. $19^h\ 18'\ 32''$, depuis le 14 Septembre $2^h\ 49'\ 32''$, jusqu'au 14 Septembre $22^h\ 8'\ 4''$. Comme la Terre, par un hasard fort singulier, décrivoit à la fin de Juin, précisément la portion de son orbite qui avoisine l'orbite de la Comete, la Comete de 1770 a réellement approché de la Terre plus près qu'un million de lieues. Le *minimum* de distance a été d'environ 750000 lieues, dans la journée du 1er. Juillet.

Quant à la seconde époque, pour que la Comete eût été effectivement à cette époque, à des distances de la Terre plus petites qu'un million de lieues, il auroit fallu qu'elle eût passé deux mois & demi plutôt par le périhélie.

Remarque ſur la Comete qui a conſtamment approché le plus près de la Terre.

(493) On peut conclure de ces recherches, que de toutes les Cometes obſervées, celle qui a approché le plus près de la Terre, eſt conſtamment la Comete de 1770. Le Phénomene a eu lieu de nos jours ſans qu'il y ait eu la moindre altération dans la Nature.

On peut auſſi remarquer qu'en général les Cometes qui ont effrayé l'Univers ne ſont pas celles qui ont approché le plus près de notre globe, ce ſont celles qui, à raiſon de leurs petites diſtances périhélies, ont déployé de longues queues après leur paſſage par ces points de leurs orbites.

Dans les recherches précédentes, nous ſommes partis des élémens des Cometes déterminés dans le §. 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481.

ARTICLE VIII.

Des plus grandes latitudes géocentriques des Planetes.

(494) Pour compléter les recherches du genre *de maximis & minimis*, relatives aux équations du Chapitre précédent, je dois déterminer les plus grandes latitudes géocentriques des Planetes. Si l'on vouloit appliquer l'analyſe à toutes les orbites en général, on tomberoit dans des réſultats compliqués; je me contenterai donc de réſoudre le Problême pour les Planetes, en ſuppoſant d'ailleurs que leurs orbites ſont circulaires.

Soit

r le rayon vecteur de la Terre;
R le rayon vecteur de la Planete;
I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Planete ſur l'Ecliptique;
A′ la longitude de la Terre vue du Soleil;
ζ la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Planete;
u l'angle du rayon vecteur de la Planete, avec la ligne des nœuds;
L la latitude géocentrique de la Planete;
Δ la diſtance de la Planete à la Terre.

Nous avons vu (§. 453) que l'on a les équations ſuivantes.

$$(1)\quad R\sin u \sin I - \Delta \sin L = 0;$$

$$(2)\quad \Delta = \sqrt{(R^2 + r^2 - 2Rr(\cos u \cos(A' - \zeta) + \sin u \cos I \sin(A' - \zeta)))}.$$

Si l'on différencie ces deux dernieres équations, en regardant R & r comme des conſtantes, & que l'on ſuppoſe $dL = 0$; l'on aura

$$(3)\quad \cos u\, du - \sin u\, d\Delta = 0,$$

$$(4)\quad \Delta d\Delta + Rr(\cos u \cos I \sin(A' - \zeta) - \sin u \cos(A' - \zeta))\,du$$
$$+ Rr(\sin u \cos I \cos(A' - \zeta) - \cos u \sin(A' - \zeta))\,dA' = 0;$$

Et si dans l'équation (4) l'on élimine $d\Delta$, au moyen de l'équation (3), l'on aura

$$(5)\ (\Delta \operatorname{cos} u + \mathrm{R}r \operatorname{sin} u (\operatorname{cos} u \operatorname{cos} \mathrm{I} \operatorname{sin}(\mathrm{A}'-\zeta) - \operatorname{sin} u \operatorname{cos}(\mathrm{A}'-\zeta)))\, du + \mathrm{R}r \operatorname{sin} u (\operatorname{sin} u \operatorname{cos} \mathrm{I} \operatorname{cos}(\mathrm{A}'-\zeta) - \operatorname{cos} u \operatorname{sin}(\mathrm{A}'-\zeta))\, d\mathrm{A}' = 0.$$

Cette derniere équation a toujours lieu lorsque la latitude géocentrique de la Planete est un *maximum*.

(495) Si l'on vouloit résoudre généralement la question des plus grandes latitudes géocentriques des Planetes, l'on remarqueroit que puisque les tems des révolutions périodiques sont comme les racines quarrées des cubes des rayons, & que les arcs décrits dans un même tems par les Planetes, dans leurs orbites circulaires, sont en raison inverse des tems des révolutions, l'on a $d\mathrm{A}' : du :: \mathrm{R}^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}}$; d'où l'on concluroit

$$(1)\ (\Delta \operatorname{cos} u + \mathrm{R}r \operatorname{sin} u (\operatorname{cos} u \operatorname{cos} \mathrm{I} \operatorname{sin}(\mathrm{A}'-\zeta) - \operatorname{sin} u \operatorname{cos}(\mathrm{A}'-\zeta)))\, r^{\frac{3}{2}} + \mathrm{R}r \operatorname{sin} u (\operatorname{sin} u \operatorname{cos} \mathrm{I} \operatorname{cos}(\mathrm{A}'-\zeta) - \operatorname{cos} u \operatorname{sin}(\mathrm{A}'-\zeta))\, \mathrm{R}^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Si l'on part d'une certaine époque, par exemple, de l'équinoxe d'Automne, pour une certaine année, & que l'on nomme

C la distance de la Planete dans son orbite au nœud ascendant, à l'époque dont il s'agit ;

L'on aura évidemment, pour un instant quelconque, la relation suivante entre la longitude A' de la Terre vue du Soleil & la distance de la Planete au nœud ascendant,

$$(2)\ (u - \mathrm{C})\, \mathrm{R}^{\frac{3}{2}} - \mathrm{A}' r^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Cette équation combinée avec la précédente résoudroit généralement la question proposée ; mais on doit sentir en même tems combien la solution générale seroit compliquée. D'ailleurs le résultat final seroit transcendant, puisque l'élimination de $r^{\frac{3}{2}}, \mathrm{R}^{\frac{3}{2}}$, au moyen de l'équation (2), introduiroit dans l'équation finale les arcs u & A' qui seroient combinés avec leur sinus.

Maintenant, au lieu de déterminer les *maxima & minima* des latitudes géocentriques des Planetes, en embrassant la totalité de leurs différentes révolutions, si l'on cherchoit le *maximum maximorum* de ces latitudes, le Problême deviendroit traitable. Il présenteroit d'ailleurs un objet de curiosité intéressant.

Il est aisé d'assigner le symptôme qui résout cette derniere question. En effet, puisque la latitude cherchée est un *maximum maximorum*, il

faut supposer nuls à la fois les coefficiens de dA' & de du, dans l'équation (5) du §. précédent ; l'on a donc pour conditions

$$(3)\ \Delta \cos u + Rr \sin u (\cos u \cos I \sin (A' - \zeta) - \sin u \cos (A' - \zeta)) = 0;$$

$$(4)\ \sin u \cos I \cos (A' - \zeta) - \cos u \sin (A' - \zeta) = 0.$$

Si dans l'équation (3) l'on élimine $\sin u \cos (A' - \zeta)$, au moyen de de l'équation (4), elle deviendra

$$(5)\ \cos u (\Delta \cos I - Rr \sin u \sin^2 I \sin (A' - \zeta)) = 0.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (4), va déterminer les conditions du Problême.

De l'équation précédente l'on tire $\cos u = 0$; cette valeur substituée dans l'équation (4), donne $\cos (A' - \zeta) = 0$. L'on voit par là que la condition du *maximum maximorum* de latitude géocentrique d'une Planete, est que cet Astre & la Terre vus du Soleil, soient en même tems dans leurs orbites respectives, à 90^d ou à 270^d du nœud ascendant de la Planete. La latitude géocentrique correspondante a pour expression

$$(6)\ \sin L = \frac{R \sin I}{\sqrt{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos I)}}.$$

Pour que le *maximum maximorum* absolu des latitudes géocentriques eût lieu, il faudroit que la Terre fût aphélie & la Planete périhélie, si la Planete est supérieure; ou que la Terre fût périhélie & la Planete aphélie, si la Planete est inférieure; à l'instant où ces Astres sont à la fois à 90^d ou à 270^d du nœud ascendant de la Planete. Cette réunion de circonstances ne peut se rencontrer dans aucune des Planetes de notre systême.

ARTICLE IX.

Des maxima *des angles d'élongations des Planetes.*

(496) Je terminerai ce Chapitre par la solution d'un Problême du genre de *maximis & minimis*, relatif aux élongations des Planetes. On sait que l'on appelle en Astronomie, *angles d'élongations d'une Planete*, la différence entre la longitude géocentrique de la Planete & celle du Soleil ; je me propose de déterminer les *maxima* de ces angles.

Pour résoudre le Problême proposé, il faut d'abord donner l'expression des angles d'élongation. Il est facile de déduire des équations du Chapitre précédent, l'expression générale de ces angles ; soit en effet

r le rayon vecteur de la Terre ;
R le rayon vecteur de la Planete ;
A la longitude du Soleil vue de la Terre ;
I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Terre sur l'Ecliptique ;
B la longitude géocentrique de la Planete ;
ζ la longitude d'un point quelconque de l'Ecliptique, pris arbitrairement. Dans la question dont il s'agit, nous confondrons ce point avec le premier point d'Ariès, & conséquemment nous ferons $\zeta = 0$;
u l'angle du rayon vecteur de la Planete avec le premier point d'Ariès, & conséquemment la longitude héliocentrique de la Planete.

Il fuit de l'équation (5) du §. 448 que l'on a

$$(1)\ \text{Tang } B = \frac{r \text{ fin } A + R \text{ fin } u \text{ cof } I}{r \text{ cof } A + R \text{ cof } u}.$$

D'ailleurs, puifque l'angle d'élongation eft égal à B — A, & que (Trig. rectiligne) la tangente de la différence de deux angles eft égale à la différence des tangentes divifée par la fomme du rayon & du produit des tangentes, l'on aura tout de fuite

$$(2)\ \text{Tang } (B - A) = \frac{R(\text{fin } u \text{ cof } A \text{ cof } I - \text{fin } A \text{ cof } u)}{r + R(\text{fin } u \text{ fin } A \text{ cof } I + \text{cof } u \text{ cof } A)};$$

Ou, fi l'on n'a point égard à l'inclinaifon de l'orbite de la Planete,

$$(3)\ \text{Tang } (B - A) = \frac{R \text{ fin } (u - A)}{r + R \text{ cof } (u - A)}.$$

Rien de plus fimple que de déterminer maintenant les *maxima* des angles d'élongation. En effet, fi l'on différencie l'équation (3) dans l'hypothefe des orbites circulaires, c'eft-à-dire, en ne regardant comme variables que les quantités A, B & u, & que l'on faffe $d(B - A) = 0$, l'on aura pour condition du *maximum* des angles d'élongation,

$$(4)\ r \text{ cof } (u - A) + R = 0.$$

Et fi l'on porte cette valeur de cof $(u - A)$ dans l'équation (3) l'on aura pour expreffion du plus grand angle d'élongation de la Planete

$$(5)\ \text{Tang } (B - A) = \frac{R}{\sqrt{(r^2 - R^2)}};$$

D'où l'on voit que le Problême n'eft poffible que pour les Planetes, relativement auxquelles r furpaffe R, c'eft-à-dire, que pour les Planetes inférieures.

Il fuit de l'équation (5) que les tangentes des plus grandes élongations, & par conféquent, les plus grandes élongations elles-mêmes, dépendent de la fraction $\frac{R}{\sqrt{(r^2 - R^2)}}$. Cette fraction n'a pas toujours la même valeur, puifque les diftances des Planetes & de la Terre au Soleil, font différentes dans les différens points des orbites. Les plus grandes élongations d'une même Planete ne doivent donc pas toujours être égales ; & c'eft ce que l'on obferve dans la Nature. Au furplus le *maximum maximorum* des angles d'élongation a lieu, lorfqu'en vertu des mouvemens de la Terre & de la Planete, la quantité $\frac{R}{\sqrt{(r^2 - R^2)}}$ eft un *maximum*. La circonftance la plus favorable feroit que la Terre fût périhélie, tandis que la Planete feroit aphélie.

On trouvera d'après ces principes, que le *maximum maximorum* d'angle d'élongation, eft de $47^d\ 48'\ 20''$ pour Vénus, & de $28^d\ 20'\ 20''$ pour Mercure.

CHAPITRE

CHAPITRE QUATRIEME.

De la durée du tems qu'une Comete & la Terre sont à des distances respectives plus petites qu'une distance donnée.

Je me propose de déterminer, dans ce Chapitre, la durée du tems qu'une Comete & la Terre sont à des distances respectives plus petites qu'une distance assignée, & de traiter les Problêmes relatifs à cette durée. La question dont il s'agit est différente de celle résolue dans les Articles précédens. En effet, j'ai déterminé uniquement dans ces Articles, l'arc décrit par la Comete dans sa trajectoire, pendant le tems qu'elle est à une distance de l'orbite de la Terre plus petite qu'une quantité donnée ; le mouvement simultané de la Terre n'entroit pour rien dans cette considération. Dans la question dont il s'agit, il faut au contraire combiner les mouvemens simultanés de la Terre & de la Comete.

Il est évident que l'on peut résoudre généralement le Problême proposé, au moyen de l'équation (1) du §. 459, combinée avec les équations aux orbites de la Comete & de la Terre, & avec les équations aux arcs décrits dans le même tems par ces deux Astres. Comme cette analyse conduiroit à des résultats très-compliqués, que d'ailleurs je n'ai en vue que des circonstances particulieres du Problême, voici une méthode qui peut s'appliquer à tous ces cas. La seule condition qui restraigne la solution, est de supposer le tems des Phénomenes assez courts, pour que l'on puisse substituer aux véritables trajectoires de la Terre & de la Comete, des trajectoires rectilignes.

ARTICLE PREMIER.

Expression de la distance de la Comete à la Terre, dans l'hypothese des trajectoires rectilignes.

(497) J'imagine que l'on connoisse le lieu de la Comete & de la Terre dans leurs orbites respectives, à un certain instant donné, ainsi que l'angle des tangentes respectives aux orbites, avec des droites données de position ; je me propose de déterminer, en conséquence, la distance de la Terre & de la Comete dans les instans voisins, en supposant toutefois que l'on regarde les petites portions de leurs orbites comme rectilignes.

Pour y parvenir, soit

r le rayon vecteur de la Terre à un certain instant déterminé ;

R le rayon vecteur de la Comete, au même instant ;

b l'angle du rayon vecteur de la Terre avec la ligne des nœuds, pour l'instant

donné ; cet angle doit être compté sur le plan de l'Ecliptique, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Terre ;

b' l'angle du rayon vecteur R de la Comete avec la ligne des nœuds, pour l'instant donné ; cet angle doit être compté sur le plan de l'orbite de la Comete, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Comete ;

n le mouvement de la Terre dans son orbite, correspondant à une minute de tems ; cette quantité doit être exprimée en valeur du rayon de l'orbite terrestre ;

n' le mouvement de la Comete dans son orbite, correspondant à une minute de tems ; cette quantité doit être exprimée en valeur du rayon de l'orbite terrestre ;

t le nombre de minutes horaires écoulées depuis l'époque d'où l'on part, jusqu'à un autre instant quelconque ;

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique ;

a l'angle de la tangente à l'orbite de la Terre avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur l'Ecliptique ;

a' l'angle de la tangente à l'orbite de la Comete avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds, menée sur le plan de cette orbite ;

Δ la distance de la Comete à la Terre pour un instant quelconque.

D'après les définitions précédentes, il est évident qu'à l'instant d'où l'on part, la distance de la Terre au point où la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée par la Terre sur l'Ecliptique, rencontre cette ligne des nœuds, s'exprime par r sin b. Il est également évident que la distance du Soleil, à l'intersection de cette perpendiculaire avec la ligne des nœuds, s'exprime par r cos b. Par une raison analogue, la distance correspondante de la Comete, au point où la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée par la Comete sur son orbite, rencontre cette ligne des nœuds, s'exprime par R sin b' ; & la distance du Soleil, à l'intersection de cette perpendiculaire avec la ligne des nœuds, a pour expression R cos b'. Considérons maintenant les mouvemens de la Comete & de la Terre dans leurs orbites respectives, orbites que je regarde comme se confondant avec les tangentes aux orbites curvilignes, & dont par conséquent les angles avec les perpendiculaires respectives à la ligne des nœuds sont a, & a'. Après un instant t, la Terre aura parcouru dans sa trajectoire rectiligne, l'espace nt ; mais comme cette trajectoire est inclinée de l'angle a sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur l'Ecliptique, l'espace nt se décomposera dans les deux suivans, nt sin a, nt cos a. Par des raisons analogues, après le même instant t, la Comete aura parcouru dans sa trajectoire rectiligne, l'espace $n't$ qui se décompose dans les deux suivans, $n't$ sin a', $n't$ cos a'. De sorte qu'après l'instant t, la distance de la Terre à la ligne des nœuds mesurée sur la perpendiculaire à cette ligne des nœuds menée par la Terre sur l'Ecliptique, aura pour expression, $r \sin b + nt \cos a$; la distance du Soleil au point où cette perpendiculaire

rencontre la ligne des nœuds, aura pour expression $r \cos b + nt \sin a$; la distance de la Comete à la ligne des nœuds mesurée sur la perpendiculaire à cette ligne des nœuds menée par la Comete sur le plan de l'orbite de la Comete, aura pour expression, $R \sin b' + n't \cos a'$; & la distance du Soleil au point où cette derniere perpendiculaire rencontre la ligne des nœuds, aura pour expression $R \cos b' + n't \sin a'$. Supposons maintenant que de la Comete on abaisse une perpendiculaire sur le plan de l'Ecliptique, la projection de la ligne $R \sin b' + n't \cos a'$ sur l'Ecliptique, aura évidemment pour expression $(R \sin b' + n't \cos a') \cos I$; & la distance de la Comete à sa projection sur l'Ecliptique, sera exprimée par $(R \sin b' + n't \cos a') \sin I$; mais la distance de la Comete à la Terre est l'hypothénuse du triangle rectangle, dont un des côtés est exprimé par $(R \sin b' + n't \cos a') \sin I$; & dont l'autre côté est lui-même l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés $(R \sin b' + n't \cos a') \cos I - r \sin b - nt \cos a$; & $R \cos b' + n't \sin a' - r \cos b - nt \sin a$; donc enfin

$$(1)\quad \Delta^2 = ((R \sin b' + n't \cos a') \cos I - r \sin b - nt \cos a)^2 + (R \cos b' + n't \sin a' - r \cos b - nt \sin a)^2 + (R \sin b' + n't \cos a')^2 \sin^2 I.$$

Des quantités qu'il faut connoître pour faire usage de l'équation précédente.

(498) Pour faire usage de l'équation précédente, il faut connoître toutes les quantités qui entrent dans l'expression de Δ.

Nous remarquerons d'abord que r étant le rayon vecteur de la Terre pour un certain instant déterminé, époque des mouvemens; que b étant l'angle de ce rayon vecteur particulier, avec la ligne des nœuds de la Comete, pour le même instant, compté sur l'Ecliptique en partant du nœud ascendant de la Comete; rien n'est plus simple que d'évaluer r & b. En effet, d'après ces suppositions, l'angle b est égal à la longitude de la Terre vue du Soleil pour l'instant donné, moins la longitude du nœud ascendant de la Comete, vue pareillement du Soleil; & r est la distance de la Terre au Soleil pour le même instant, évaluée dans la supposition que la distance moyenne $= 1$. L'on donnera à $\sin b$ & à $\cos b$, le signe qui convient à la valeur particuliere de l'angle b.

R étant le rayon vecteur de la Comete pour l'instant déterminé origine des mouvemens, & b' étant l'angle de ce rayon vecteur particulier avec la ligne des nœuds, compté sur l'orbite de la Comete, en partant du nœud ascendant, il est également facile d'évaluer ces quantités. En effet, comme par la supposition, l'on connoît les élémens de l'orbite de la Comete, l'angle du périhélie avec la ligne des nœuds, la distance périhélie, l'instant du passage par le périhélie, la distance en tems, du passage par le périhélie à l'instant que l'on considere comme l'époque des mouvemens; l'on a tous les élémens nécessaires, au moyen des méthodes précédentes, pour déterminer l'angle du rayon vecteur de la Comete sur le plan de l'orbite avec le nœud ascendant, correspondant

à l'époque des mouvemens ; ainsi que la distance de la Comete au Soleil pour cet instant. On connoîtra donc l'angle b' & la distance R. Nous remarquerons seulement que la distance R de la Comete au Soleil doit être évaluée en valeur de la distance moyenne de la Terre au Soleil, que nous avons supposée $= 1$; que l'angle b' est compté sur le plan de l'orbite de la Comete, en partant du nœud ascendant, & en allant dans le sens du mouvement de la Comete ; & que l'on doit donner à sin b' & à cos b' les signes relatifs à cette supposition.

I est l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique. Nous avons déja vu que sin I est toujours positif ; que cos I est positif dans le cas des Cometes directes, & négatif dans le cas des Cometes rétrogrades.

t étant le nombre de minutes horaires écoulées depuis l'époque d'où l'on part jusqu'à un autre instant quelconque, il est sensible que t est négatif lorsque l'instant pour lequel on calcule précede l'instant que l'on a pris pour époque des mouvemens ; que t est positif dans le cas contraire.

n est le mouvement de la Terre dans son orbite correspondant à une minute de tems ; & cette quantité doit être évaluée en valeur de la distance moyenne de la Terre au Soleil que nous avons supposée $= 1$. Rigoureusement parlant, n n'est point une quantité constante, puisque le mouvement de la Terre dans son orbite est variable ; cependant comme dans les questions que nous nous proposons de considérer, on peut se contenter d'une approximation, nous prendrons pour n, la valeur qui convient à la moyenne distance de la Terre au Soleil ; & pour évaluer cette quantité, voici comment il faudra s'y prendre. La révolution de la Terre par rapport au Soleil, rapportée aux fixes, est en nombres ronds de 365 jours 6^h $11'$, ou de $525971'$. Si l'on suppose la distance moyenne de la Terre au Soleil $= 1$, la circonférence de l'orbite de la Terre regardée comme circulaire $= \frac{2 \times 355}{113}$; & la partie de cette orbite décrite en une minute $= \frac{2 \times 355}{113 \times 525971}$; l'on a donc $n = 0,000011946$; $\log n = 5{\cdot}0772182$.

n' est le mouvement de la Comete dans son orbite correspondant à une minute de tems. Rien n'est plus facile que d'évaluer cette quantité ; supposons en effet, deux corps dont l'un circule dans un cercle dont le rayon $= 1$, & l'autre dans un cercle dont le rayon $=$ R. On voit d'abord que les circonférences de ces cercles seront entr'elles comme 1 est à R. De plus, en vertu d'une des loix deKépler, le tems de la révolution dans le cercle dont le rayon $= 1$, est au tems de la révolution dans le cercle dont le rayon $=$ R, comme 1 est à $R^{\frac{3}{2}}$; & comme les longueurs des arcs parcourus dans le même tems, dans deux cercles différens, sont entr'elles en raison directe des circonférences de ces cercles, & en

raiſon inverſe des tems des révolutions ; on aura, arc parcouru dans le cercle dont le rayon $= 1$, eſt à l'arc parcouru pendant le même tems, dans le cercle dont le rayon $=$ R, comme 1 eſt à $\frac{R}{R^{\frac{3}{2}}}$, comme 1 eſt à $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Maintenant, ſi l'on ſuppoſe deux corps circulant l'un dans un cercle, & l'autre dans une parabole ; & que la diſtance du ſecond de ces corps au centre des forces centrales ſoit égal au rayon du cercle, l'on a vu (§. 418) que les vîteſſes reſpectives de ces corps dans leurs trajectoires, ſont comme 1 à $\sqrt{2}$. On conclura donc en général, que ſi l'on compare le mouvement de la Terre lors de ſa moyenne diſtance, au mouvement de la Comete lorſque ſon rayon vecteur $=$ R, l'on aura $n : n' :: 1 : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}}$; & par conſéquent $n' = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{R}}$. L'on aura donc $n' = 0{,}000016894$, $\log n' = 5{\cdot}2277325$, en ſuppoſant toutefois que $R = 1$, c'eſt-à-dire, que la diſtance de la Comete au Soleil ſoit égale à la diſtance moyenne de la Terre au Soleil.

a eſt l'angle de la tangente à l'orbite de la Terre pour l'inſtant donné, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée ſur l'Ecliptique. Dans nos conſtructions, l'on a

$$a = 90^d - \text{angle } b - \text{angle de la tangente à l'orbite de la Terre avec le rayon vecteur.}$$

Si l'on ſuppoſe l'orbite terreſtre circulaire, ce qui ſuffit pour les queſtions dont il s'agit, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur $= 90^d$; & l'équation précédente deviendra $a = 360^d - \text{angle } b$.

a' eſt l'angle de la tangente à l'orbite de la Comete avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée ſur le plan de cette orbite. Par des raiſonnemens analogues, on voit tout de ſuite que $a' = 90^d -$ angle $b' -$ angle de la tangente à l'orbite de la Comete avec le rayon vecteur R. Soit

θ l'angle de la tangente à l'orbite de la Comete avec le rayon vecteur R ;

D la diſtance périhélie ;

Z l'angle traverſé depuis le périhélie ;

Il ſuit des équations du §. 413 que $\text{Tang } \theta = \frac{2D}{R \sin Z}$; on connoîtra donc l'angle θ & l'on aura

$$a' = 90^d - \text{angle } b' - \text{angle } \theta.$$

Nous connoiſſons maintenant toutes les quantités qui entrent dans l'expreſſion de Δ, & nous pouvons faire uſage de cette équation. Nous n'entrerons dans aucuns détails ſur ces uſages ; nous remarquerons ſeulement, relativement aux queſtions qui nous intéreſſent, deux cas particuliers, ceux où la Terre & la Comete ſe rencontrent centres à centres, dans les nœuds. Dans ces cas l'on aura $R = r = 1$; $b = 0$, $b' = 0$; ou $b = 180^d$, $b' = 180^d$, ſuivant qu'il s'agit du nœud aſcendant ou du nœud deſcendant.

Article II.

De quelques Problêmes du genre de maximis & minimis *relatifs aux questions précédentes.*

Détermination de l'instant où la Comete & la Terre sont à une distance donnée, dans l'hypothese des trajectoires considérées comme rectilignes.

(499) Pour déterminer à quel instant la Comete & la Terre sont à une certaine distance donnée, il ne s'agit que de résoudre l'équation (1) du §. 497, par rapport à t, en entendant par Δ la distance donnée; Soit donc

$$M = n^2 + n'^2 - 2nn' (\cos a \cos a' \cos I + \sin a \sin a');$$

$$N = \frac{n'R}{M} \sin (b' + a') + \frac{nr}{M} \sin (b + a)$$
$$- \frac{nR}{M} (\cos a \sin b' \cos I + \sin a \cos b')$$
$$- \frac{n'r}{M} (\cos a' \sin b \cos I + \sin a' \cos b);$$

$$P^2 = \frac{R^2}{M} + \frac{r^2}{M} - \frac{\Delta^2}{M} - \frac{2Rr}{M} (\sin b \sin b' \cos I + \cos b \cos b');$$

On résoudra la question proposée, au moyen de l'équation suivante :

$$(1) \quad t^2 + 2Nt + P^2 = 0.$$

Du minimum *de distance de la Comete & de la Terre, dans l'hypothese des trajectoires considérées comme rectilignes.*

(500) Puisqu'il s'agit de déterminer l'instant où la Comete & la Terre sont à leur plus petite distance, les inconnues du Problême sont t & Δ. Dans l'équation (1) du §. précédent, la seule quantité P renferme la variable Δ; si donc l'on différencie cette équation, en regardant t & P comme variables, & que l'on fasse $dP = 0$, la méthode de *maximis & minimis* donnera pour condition du Problême

$$(1) \quad t = -N.$$

On aura la valeur correspondante de Δ, en portant la valeur précédente de t dans l'expression générale de Δ du §. 497.

De l'intervalle de tems pendant lequel la Comete & la Terre sont à des distances moindres qu'une quantité assignée.

(501) Il est facile de déterminer l'intervalle de tems pendant lequel la Comete & la Terre sont à des distances respectives moindres qu'une distance assignée. En effet, puisque les deux valeurs de t tirées de

l'équation (1) du §. 499, expriment les inſtans auxquels la Comete & la Terre ſont à la diſtance aſſignée, la différence de ces deux racines eſt évidemment l'expreſſion du tems intermédiaire pendant lequel la Terre & la Comete ſont à des diſtances moindres que la diſtance aſſignée ; on a donc

(1) Nombre de minutes de tems pendant lequel la Comete & la Terre ſont à des diſtances moindres que la diſtance aſſignée $= 2\sqrt{(N^2 - P^2)}$.

Dans l'équation du paragraphe précédent, ſi l'on ſuppoſe nul le nombre des minutes de tems pendant lequel la Comete & la Terre ſont à des diſtances moindres que la diſtance aſſignée, l'on aura

$$(2)\quad N^2 - P^2 = 0.$$

C'eſt la condition qui rend nul l'intervalle de tems pendant lequel la Comete & la Terre ſont à des diſtances moindres qu'une quantité aſſignée. La Comete & la Terre ne ſont donc qu'un inſtant, à la diſtance donnée.

Quelle doit être la diſtance de la Terre à la ligne des nœuds, au moment où la Comete traverſe l'Ecliptique, pour que la Terre & la Comete puiſſent ſe trouver un inſtant à une diſtance donnée ?

(502) Pour réſoudre généralement la queſtion propoſée, il faudroit avoir recours à l'équation (1) du §. précédent, & l'on auroit pour condition du Problême, $N^2 - P^2 = 0$; mais l'uſage de cette équation priſe généralement, conduiroit à des réſultats compliqués. Afin de rendre la ſolution plus facile, nous apposerons à la queſtion quelques reſtrictions, qui ſans rien ôter à la rigueur des démonſtrations, relativement aux objets que nous nous propoſons de traiter, permettront cependant quelques facilités dans le calcul. Nous ſuppoſerons que les phénomenes ont lieu dans le nœud aſcendant ; nous prendrons pour époque des mouvemens, l'inſtant où la Comete eſt dans le nœud ; nous aurons donc d'abord $b' = 0$. Nous ſuppoſerons l'angle b aſſez petit pour que l'on puiſſe avoir, ſans erreur ſenſible, $\operatorname{cof} b = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{fin}^2 b$. Nous ſuppoſerons auſſi la trajectoire de la Terre perpendiculaire à la ligne des nœuds, & nous aurons $a = 0$. Dans cette hypotheſe, nous aurons évidemment (§. 499) à cauſe de $b' = 0$, & de $a = 0$.

$$M = n^2 + n'^2 - 2nn' \operatorname{cof} a' \operatorname{cof} I;$$

$$N = \frac{nr}{M}\operatorname{fin} b + \frac{n'}{M}\operatorname{fin} a'(R - r) - \frac{n'r}{M}\operatorname{fin} b(\operatorname{cof} a' \operatorname{cof} I - \tfrac{1}{2}\operatorname{fin} a' \operatorname{fin} b);$$

$$P^2 = \frac{(R-r)^2}{M} - \frac{\Delta^2}{M} + \frac{Rr\operatorname{fin}^2 b}{M};$$

Mais, pour que la Comete & la Terre puiſſent être un inſtant à une diſtance donnée, on doit avoir (§. 501) $N^2 - P^2 = 0$.

Soit donc

$$F = r^2 (n - n' \cos. a' \cos I)^2 + n'^2 r \sin^2 a' (R - r) - MRr;$$

$$G = \frac{n' r \sin a' (n - n' \cos a' \cos I)(R - r)}{F};$$

$$H = \frac{n'^2 \sin^2 a' (R - r)^2}{F} + \frac{M(\Delta^2 - (R - r)^2)}{F};$$

l'on aura, en négligeant les puissances de sin b supérieures aux secondes,

$$(1) \quad \sin^2 b + 2G \sin b + H = 0;$$

équation qui déterminera quelle doit être la distance de la Terre à la ligne des nœuds, au moment où la Comete traverse l'Ecliptique, pour que la Terre & la Comete puissent se trouver un instant à une distance donnée.

Si l'on veut connoître à quel instant la Comete & la Terre seront à la distance donnée, on portera d'abord la valeur de sin b que l'on vient de déterminer, dans l'expression de N, & l'on aura (§. 500) pour déterminer l'instant dont il s'agit,

$$(2) \quad t = -N.$$

ARTICLE III.

Du cas particulier d'une Comete qui couperoit l'orbite de la Terre dans son nœud.

(503) Quoique l'on ne connoisse point de Cometes qui coupent l'orbite de la Terre dans le nœud, comme cependant nous nous proposons d'examiner les désordres qu'une Comete pourroit occasionner sur notre globe, par sa proximité de la Terre, nous allons choisir le cas où la probabilité de cette approximation est la plus grande possible; & c'est sans contredit celui d'une Comete qui couperoit l'orbite terrestre dans son nœud. Nous supposerons dans ces recherches, que l'orbite rectiligne de la Terre est perpendiculaire à la ligne des nœuds; & nous prendrons pour époque des mouvemens, l'instant où la Comete est dans le nœud.

Il est évident que l'on aura, dans cette supposition, $R = 1$; $a = 0$; $b' = 0$. De plus, si l'on considere un triangle sphérique rectangle dans lequel a' & I sont les côtés adjacens à l'angle droit, on verra facilement que cos a' cos I est l'expression du cosinus de l'hypothénuse de ce triangle sphérique; la quantité cos a' cos I est donc l'expression du cosinus de l'angle de la trajectoire de la Comete considérée comme rectiligne, avec la trajectoire de la Terre pareillement considérée comme rectiligne; ainsi qu'il est facile de le vérifier, en se figurant le triangle sphérique rectangle dont l'un des côtés mesure l'inclinaison des plans des orbites de la Terre & de la Comete, dont l'autre côté mesure l'angle de la trajectoire de la Comete considérée comme rectiligne, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'orbite de la Comete, & dont l'hypothénuse est égale à l'angle formé par les deux trajectoires rectilignes de la Terre & de la Comete.

Si

Si l'on fait les substitutions indiquées, & que l'on nomme
λ l'angle de la trajectoire de la Comete avec la trajectoire de la Terre;
on aura, dans le cas dont il s'agit, attendu que d'ailleurs $r \operatorname{cos} b = 1$,

$$M = n^2 + n'^2 - 2nn' \operatorname{cos} \lambda;$$

$$N = \frac{\operatorname{tang} b}{M}(n - n' \operatorname{cos} \lambda);$$

$$P^2 = \frac{\operatorname{tang}^2 b}{M} - \frac{\Delta^2}{M}.$$

Mais puisque, par la supposition, $N^2 = P^2$, l'on conclura

$$(1) \quad \operatorname{Tang} b = \frac{\Delta\sqrt{M}}{n' \operatorname{sin} \lambda}.$$

Cette équation déterminera quelle doit être la valeur de l'angle b, pour que la Comete & la Terre puissent être un instant à la distance Δ.

Application des théories précédentes, à une distance de 13000 lieues.

(504) Dans un Ouvrage d'un Astronome célebre, il a été question des désordres qu'une Comete qui approcheroit de 13000 lieues de la Terre, occasionneroit sur notre globe, & particuliérement dans les Marées; j'ai donc pensé que l'on verroit avec plaisir, l'application des théories précédentes à une pareille Comete; je vais chercher en conséquence, quelle devroit être la distance de la Terre à la ligne des nœuds, au moment où la Comete traverse l'Ecliptique, pour que la Terre & la Comete puissent se trouver un instant à la distance de 13000 lieues. Comme cette distance dépend singuliérement de l'angle de l'orbite de la Comete avec l'orbite de la Terre, je supposerai successivement les angles de l'orbite de la Comete avec l'orbite de la Terre, de 30^d, 60^d, 90^d, 120^d, 150^d; & je déterminerai pour tous ces cas, quelle doit être la distance de la Terre à la ligne des nœuds, au moment où la Comete est dans son nœud, pour que le phénomene puisse arriver.

(505) Si l'on fait les calculs indiqués, que l'on donne à Δ, la valeur qui convient à la distance de 13000 lieues, en supposant la moyenne distance du Soleil à la Terre $= 1$; c'est-à-dire, si l'on suppose $\Delta = \frac{13000}{33517500} = 0{,}00038786$, l'on parviendra aux résultats suivans.

Angles de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre.	Limite des distances de la Terre au nœud, à l'instant où la Comete traverse l'Ecliptique, pour que la Comete & la Terre puissent être à une distance de 13000 lieues.
30	. . . . $\pm 0^d\ 1'\ 21''$
60	. . . . $\pm 0\ \ 1\ \ 20$
90	. . . . $\pm 0\ \ 1\ \ 35$
120	. . . . $\pm 0\ \ 2\ \ 13$
150	. . . . $\pm 0\ \ 4\ \ 16$

Du nombre de minutes de tems que la Comete & la Terre seroient à des distances respectives moindres qu'une quantité assignée, dans l'hypothese où ces Astres se rencontreroient centre à centre.

(506) On peut déterminer également combien de tems la Comete & la Terre seroient à des distances respectives moindres qu'une quantité assignée, dans l'hypothese où ces Astres se rencontreroient centre à centre, & que leurs mouvemens ne fussent point altérés par le choc ; il faudroit alors avoir recours aux équations des §. 499 & 501 ; & l'on aura dans ce cas, attendu que $b = 0$, $b' = 0$, $a = 0$; $R = r = 1$; $\cos a' \cos I = \cos \lambda$,

$$M = n^2 + n'^2 - 2nn' \cos \lambda;$$

$$N = 0;$$

$$P^2 = -\frac{\Delta^2}{M};$$

Nombre de minutes de tems pendant lequel la Comete & la Terre sont à des distances moindres que la distance assignée $= \frac{2\Delta}{\sqrt{M}}$.

Si l'on fait les calculs indiqués, pour une distance de 13000 lieues, on parviendra aux résultats suivans.

Angles de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre.	Nombre de minutes de tems que la Comete & la Terre seront à des distances plus petites que 13000 lieues.
0d	. . . . . . 9122″
30	 5090
60	 3000
90	 2182
120	 1798
150	 1619
180	 1565

(507) Si l'on jette les yeux sur la Table précédente, il sera aisé de se convaincre que le nombre de secondes horaires qu'une Comete & la Terre peuvent être à des distances respectives plus petites que 13000 lieues, dépend de l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre. En général ce tems ne peut surpasser 9122″, dans les circonstances les plus favorables. Dans tout autre cas, il est beaucoup moindre. Pour une Comete dont l'orbite est perpendiculaire à celle de la Terre, ce tems n'est déja plus que de 36′ 22″ ; & comme il y a autant à parier qu'une Comete inconnue sera rétrograde que directe, on voit combien il est probable qu'une Comete sera moins d'une heure, à une distance de notre globe plus petite que 13000 lieues, lors même qu'on lui supposeroit, contre toute probabilité, des élémens qui lui feroient rencontrer la Terre.

Article IV.

Remarque ſur le dérangement des Marées, dans le cas d'une Comete qui approcheroit très-près de la Terre.

(508) Ce ſeroit naturellement le lieu de calculer ici les déſordres que la préſence inſtantanée d'une Comete qui approcheroit de 13000 lieues de notre globe, occaſionneroit dans l'Atmoſphere & dans les Marées. Ce travail paroît offrir beaucoup de difficultés; j'obſerverai ſeulement que l'effet de l'action d'une pareille Comete ſur les eaux de la Mer, ne peut être aſſigné que d'après un calcul qui embraſſeroit toutes les circonſtances du Problême; & que toute expreſſion de cet effet, dans laquelle on auroit omis quelques-unes des conditions, ſans être aſſuré de l'influence qu'elle peut avoir ſur l'objet meſuré, ne doit être conſidérée que comme l'expreſſion vague d'un effet dont on n'a d'ailleurs qu'une idée également vague. Je ne puis cependant paſſer ſous ſilence la remarque ſuivante tirée d'un principe de M. d'Alembert, dont il a fait uſage dans ſon Ouvrage ſur la cauſe des Vents. Dans cet Ouvrage, M. d'Alembert démontre que ſi un noyau ſphérique eſt entouré d'un fluide ſur lequel agit un corps fixe & immobile, ce fluide, en vertu de l'action de ce corps, doit paſſer ſucceſſivement de la figure ſphérique qu'il avoit d'abord, à différentes figures elliptiques, dont l'un des axes s'alonge de plus en plus, tandis que l'autre axe diminue; & ce qui eſt remarquable, il trouve que le mouvement des différentes parties du fluide peut être comparé à celui d'un pendule qu'on tireroit de ſon repos pour lui faire décrire de petits arcs circulaires. Or, de même qu'un pendule, lorſqu'il eſt arrivé à ſon point de repos, paſſe au-delà, en vertu de la vîteſſe qu'il a acquiſe, pour retomber enſuite de nouveau; de même auſſi, lorſque la ſurface du fluide qui s'éloigne de plus en plus de la courbe circulaire, a acquis la figure qu'elle auroit dû avoir d'abord pour reſter en équilibre, elle doit néceſſairement paſſer au-delà de ce terme, & continuer de s'élever d'une quantité à peu près égale à celle dont elle s'eſt déja élevée; après quoi le fluide retombera & s'abaiſſera. M. d'Alembert fait voir de plus, que le tems des oſcillations ne dépend point de la force accélératrice, mais uniquement de la profondeur du fluide; de ſorte que quoique les oſcillations ſoient d'autant plus grandes que la force accélératrice eſt plus grande, la durée des oſcillations eſt cependant toujours la même, comme il arrive dans les pendules cicloïdaux.

Soit, en un mot,

ρ le rayon du noyau ſphérique;

p la profondeur du fluide qui entoure ce noyau ſphérique;

$\frac{m}{n}$ le rapport de la circonférence du cercle au diametre ;

δ le nombre de pieds qu'un corps grave parcourt pendant la premiere seconde de sa chûte, en vertu de la force centrale qui agit à l'extrémité du rayon ρ ;

M. d'Alembert démontre que l'on a l'expression suivante

Durée d'une oscillation du fluide, évaluée en secondes horaires $= \frac{m}{n} \times \frac{\rho}{2\sqrt{(3p\delta)}}$.

Appliquons le calcul à cette formule.

Supposons un fluide qui environne la Terre, & dont la profondeur soit par-tout d'une lieue. Puisque le rayon de la Terre contient $1432\frac{1}{2}$ lieues ; si l'on réduit p & ρ en pieds, à raison de 13692 pieds par lieues ; comme d'ailleurs $\delta = 15,1$ pieds, l'expression $\frac{m}{n} \times \frac{\rho}{2\sqrt{(3p\delta)}}$ deviendra $\frac{355}{113} \times \frac{1432,5 \times 13692}{2\sqrt{(3 \times 15,1 \times 13692)}} = 39120''$. La Comete, dans l'hypothese dont il s'agit, emploiera donc $10^h\ 52'$ à produire son effet quel qu'il soit, sur les Marées. Mais les véritables circonstances du Problême sont bien moins favorables à ces perturbations, que les hypotheses soumises au calcul. 1°. La Comete ne répond pas toujours perpendiculairement au même point de la Terre, puisqu'indépendamment du mouvement de rotation de la Terre, la Comete a un mouvement propre très-rapide. 2°. Les eaux de la Mer n'environnent point tout le globe ; & l'on sait par l'exemple des Mers méditerranées qui ne sont presque point sujettes au flux & au reflux, combien cette circonstance diminue l'effet des Marées. 3°. Enfin la Comete ne seroit que très-peu de tems & beaucoup moins que $10^h\ 52'$ à une distance nuisible. Toutes ces raisons réunies me paroissent élever un préjugé légitime contre les grands désordres des Marées produites par l'action des Cometes.

Remarque sur la Comete de 1770.

(509) Je terminerai cet Article, en observant que de nos jours, au commencement de Juillet 1770, une Comete a passé très-près de la Terre ; elle étoit environ à neuf fois la distance de la Lune. Cet événement n'a occasionné aucun mouvement sensible dans l'Atmosphere ni dans les Marées ; aucun dérangement dans le mouvement de la Lune ; & il n'a été remarquable que pour les Astronomes. Je sais qu'il y a loin de cette distance à celle de 13000 lieues ; mais on ne peut saisir avec trop d'empressement l'occasion de rassurer les esprits sur la présence d'un Phénomene dont le nom seul inspiroit la terreur dans les siecles d'ignorance.

CHAPITRE CINQUIEME.

De la probabilité qu'à un instant quelconque une Comete approchera de la Terre plus près que d'une quantité donnée.

L'ORDRE des Problêmes me conduit naturellement à examiner une question intéressante ; je veux parler de la probabilité qu'à un instant quelconque, une Comete approchera de la Terre plus près que d'une quantité donnée. On sent assez qu'une pareille question curieuse par elle-même, l'est encore davantage, si l'on veut apprécier les terreurs que les apparitions des Cometes ont occasionnées dans tous les tems.

ARTICLE PREMIER.

Principes généraux d'après lesquels on peut calculer la probabilité qu'à un instant quelconque, une Comete approchera de la Terre plus près que d'une quantité donnée.

(510) Je suppose que l'on sache uniquement que dans le cours d'une année, une Comete doit traverser l'Ecliptique, sans connoître d'ailleurs les élémens de la Comete ; je me propose de déterminer les principes d'après lesquels on peut calculer la probabilité qu'à un instant quelconque pris dans l'année, cette Comete sera plus près de la Terre qu'une quantité donnée.

Pour résoudre la question proposée, on se rappellera que j'ai donné (§. 501) une méthode pour déterminer l'intervalle de tems pendant lequel la Comete & la Terre sont à des distances moindres qu'une quantité assignée, en supposant connue la distance de la Terre au nœud au moment où la Comete traverse l'Ecliptique. J'ai pareillement déterminé (§. 502) quelle doit être la distance de la Terre à la ligne des nœuds de la Comete, au moment où la Comete traverse l'Ecliptique, pour que la Comete & la Terre puissent se trouver un instant à la distance assignée. Soit donc AB une ligne qui représente le développement de l'Ecliptique, c'est-à-dire, le chemin total de la Terre, pendant une année; sur cette droite AB, je prends un point O à volonté que je suppose celui où la Comete traverse l'Ecliptique. Comme je ne connois pas les élémens de la Comete, & par conséquent l'angle de sa trajectoire avec l'orbite de la Terre, je fais une premiere supposition dans laquelle je donne, par exemple, à cet angle, la valeur de 90^d ; je calcule dans cette supposition (§. 502) la distance de la Terre au nœud, pour que Fig. 17.

la Comete & la Terre puissent être un instant à la distance donnée. Fig. 17. Sur la droite AB, je prends de part & d'autre du point O, les distances O*p*, OP qui soient à AB comme 360^d sont à l'arc *b* déterminé par la formule du §. 502.

Il est évident, d'après cette construction, que si à l'instant où la Comete traverse l'Écliptique en O, la Terre est aux points P, *p* de son orbite, la Comete sera un instant à la distance donnée de la Terre. Si la Terre est au-delà des points *p*, P par rapport au point O, la Comete ne pourra pas atteindre à cette distance; si au contraire la Terre est en-deçà des points P, *p*, la Comete sera plus ou moins long-tems à une distance de la Terre moindre que la quantité assignée; & l'intervalle de tems sera déterminé au moyen de l'équation (1) du §. 501. Supposons maintenant qu'entre les points O & *p*, O & P, on prenne successivement différens autres points P″, P′, &c. & que l'on calcule, au moyen de l'équation (1) du §. 501, le nombre correspondant de minutes pendant lequel la Comete & la Terre seront à des distances moindres que la distance assignée; que par les points P′, P″ l'on éleve les perpendiculaires P′M′, P″M″, &c.; que l'on nomme y', y'' le nombre de minutes trouvé par l'équation (1) du §. 501, correspondant aux points P′, P″, &c.; & que l'on fasse $P'M' : P'N' :: y' : 1440'$; $P''M'' : P''N'' :: y'' : 1440'$ (le nombre 1440 est celui qui exprime les minutes de tems qui répondent à la durée d'un jour); & que sur AB, l'on acheve le parallélogramme ABB′A′, tel que AA′, BB′ soient égaux à P′N′, P″N″, c'est-à-dire, au chemin de la Terre dans son orbite pendant la durée d'un jour; il est clair que si l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre étoit réellement de 90^d, le rapport du tems où la Comete peut être dans l'année, à une distance de la Terre plus grande que la distance donnée, au tems où la Comete pourroit être à une distance plus petite, seroit exprimé par le rapport de la différence des surfaces AA′BB′, PM′M″*p*, à l'aire de la courbe PM′M″*p*; & comme il n'y a point de raison pour qu'un instant quelconque pris au hasard soit plutôt compris dans un tems que dans un autre, la probabilité demandée seroit exprimée par le même rapport. Mais par la supposition, les élémens de la Comete, & par conséquent l'angle de sa trajectoire avec l'orbite de la Terre sont inconnus; il faut donc épuiser successivement les différens angles possibles de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre, & prendre un résultat moyen entre tous les calculs.

On peut conclure de cette analyse, que la solution rigoureuse du Problême n'est pas aussi facile qu'on pourroit se l'imaginer. On voit également que les calculs seroient simplifiés, si l'on connoissoit d'avance l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre.

Indépendamment de l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre, si l'on connoissoit de plus la position du nœud, l'analyse

seroit différente. En effet, dans ce cas, la position du point O seroit Fig. 17.
déterminée ; la probabilité précédente ne s'appliqueroit donc qu'à l'instant de l'année correspondant au point de l'orbite terrestre où se trouve le nœud.

Article II.

Application des principes précédens au cas particulier où la Comete couperoit l'orbite de la Terre dans le nœud.

(511) Quoique mon but ne soit pas d'appliquer l'analyse à toutes les questions que l'on peut se proposer, & que d'ailleurs les méthodes ordinaires d'approximation, par le moyen des quadratures, résolvent toutes ces questions avec une exactitude suffisante, cependant je ne puis me refuser de considérer particuliérement le cas où la Comete couperoit l'orbite de la Terre dans son nœud. Ce cas réunit la singularité la plus remarquable aux facilités les plus grandes de la part du calcul ; il servira en même tems à développer de plus en plus l'esprit de la méthode.

(512) Le Problême dont il s'agit dépend en général de deux intégrations successives. En effet, il faut avoir d'abord le rapport de l'aire $pM''M'P$, au parallélogramme $AA'B'B$, en supposant que l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre soit constant. Il faut ensuite supposer variable l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre, multiplier l'intégrale trouvée ci-dessus, par la différentielle de cet angle ; intégrer de nouveau en regardant comme variables les quantités qui dépendent de l'angle, & diviser cette nouvelle intégrale par l'arc entier dont l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre peut varier. Le calcul développera ces idées.

Article III.

Solution de la question proposée dans l'Article précédent, en supposant connu l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre, au point d'intersection de ces deux orbites.

(513) Il est facile d'évaluer la surface du parallélogramme $A'ABB'$. En effet, d'après les constructions précédentes, la ligne AB représente le chemin de la Terre pendant une année ; & BB' est égal au chemin de la Terre pendant la durée d'un jour.

Soit

1 le rayon de l'orbite terrestre que je suppose circulaire ;

$\frac{m}{n}$ le rapport de la circonférence du cercle au diametre ;

On aura évidemment $AB = \frac{2m}{n}$. Quant à BB', si l'on suppose en nombres

ronds le tems de la révolution de la Terre de 365 jours $\frac{1}{4}$, on aura

Fig. 17. $BB' = \frac{2}{365,25} \times \frac{m}{n}$; donc

Surface du parallélogramme $AA'B'B = \frac{1}{91,31} \times \frac{m^2}{n^2}$.

(514) Pour évaluer d'une maniere analogue, l'aire $pM''M'P$, en supposant connu l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre, je remarque si l'on nomme

b la distance de la Terre au nœud de la Comete, à l'instant où cet astre coupe l'Ecliptique;

η le mouvement de la Terre dans son orbite, correspondant à une minute de tems;

η' le mouvement de la Comete dans son orbite, correspondant à une minute de tems;

Δ la distance donnée de la Comete à la Terre;

λ l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre.

Puisque la quantité BB' qui répond à un jour ou 1440 minutes $= \frac{2}{365,25} \times \frac{m}{n}$; que de plus $P'M' : P'N'$ ou $BB' :: y' : 1440'$; que d'ailleurs $y' = 2\sqrt{(N^2 - P^2)}$, M, N & P ayant pour expression (§. 503)

$$M = \eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda;$$

$$N = \frac{\operatorname{tang} b}{M} (\eta - \eta' \operatorname{cos} \lambda);$$

$$P^2 = -\frac{\Delta^2}{M} + \frac{\operatorname{tang}^2 b}{M};$$

& qu'enfin (§. 513)

$$BB' = \frac{2}{365,25} \times \frac{m}{n};$$

les ordonnées $P'M'$, $P''M''$ &c., à la courbe $PM''M'p$, seront exprimées généralement par

$$\frac{m}{n} \frac{\sqrt{((\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda)\Delta^2 - \eta'^2 \operatorname{sin}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 b)}}{91,31 \times 1440 (\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda)}.$$

L'aire totale de la courbe $pM''M'P$ a donc pour expression

$$\frac{2m}{n} \int \frac{\sqrt{((\eta^2 + \eta' - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda)\Delta^2 - \eta'^2 \operatorname{sin}^2 \lambda \operatorname{tang}^2 b)}\, db}{91,31 \times 1440 (\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda)}.$$

(515) Pour intégrer cette quantité, je la mets sous la forme suivante,

$$\text{Aire de la courbe } pM''M'P = \frac{2\xi}{\sigma} \int db \sqrt{(a^2 - \operatorname{tang}^2 b)}.$$

Dans cette expression,

$$\frac{\xi}{\sigma} = \frac{m}{n} \times \frac{\eta' \operatorname{sin} \lambda}{91,31 \times 1440 (\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda)};$$

$$a^2 = \frac{(\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos} \lambda)\Delta^2}{\eta'^2 \operatorname{sin}^2 \lambda}.$$

J'observe

J'observe que dans le cas que nous considérons, l'angle b est toujours assez petit pour que b, sin b & tang b puissent être pris indifféremment l'un pour l'autre ; la quantité $\frac{2\xi}{\sigma}\int db\sqrt{(a^2 - \text{tang}^2 b)}$ peut donc être mise sous la forme suivante $\frac{2\xi}{\sigma}\int d \sin b\sqrt{(a^2 - \sin^2 b}$. Mais, en vertu de la formule ordinaire des quadratures des courbes, on démontre facilement que $\int d \sin b \sqrt{(a^2 - \sin^2 b)}$ représente la surface d'un quart de cercle dont a est le rayon, dont $\sin b$ est l'abscisse, & dont $\sqrt{(a^2 - \sin^2 b)}$ est l'ordonnée ; donc $\frac{2\xi}{\sigma}\int d \sin b\sqrt{(a^2 - \sin^2 b)}$ représente la surface du demi-cercle dont il s'agit, multipliée par $\frac{\xi}{\sigma}$; ou ce qui revient au même, la surface du cercle dont est question, multipliée par $\frac{1}{2} \times \frac{\xi}{\sigma}$. Fig. 17.

D'après les constructions précédentes, $a = \frac{\Delta\sqrt{(\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos}\lambda)}}{\eta' \sin \lambda}$; $\frac{1}{2} \times \frac{\xi}{\sigma} = \frac{m}{n} \times \frac{\eta' \sin \lambda}{182{,}62 \times 1440\,(\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos}\lambda)}$; par conséquent la surface du cercle dont le rayon est a, a pour expression $\frac{m}{n} \times \frac{\Delta^2(\eta^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta' \operatorname{cos}\lambda)}{\eta'^2 \sin^2 \lambda}$; donc

$$(1)\ \text{Aire de la courbe } pM''M'P = \frac{m^2}{n^2} \times \frac{\Delta^2}{182{,}62 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}.$$

(516) Si l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre étoit connu, cette premiere intégration suffiroit; & la probabilité demandée seroit exprimée par le rapport de $\frac{m^2}{n^2} \times \frac{\Delta^2}{182{,}62 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}$ à $\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{91{,}31} - \frac{\Delta^2}{182{,}62 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}\right)$; ou si l'on veut, par le rapport de $\frac{m^2}{n^2} \times \frac{\Delta^2}{182{,}62 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}$ à $\frac{m^2}{n^2} \times \frac{1}{91{,}31}$; car le terme $\frac{\Delta^2}{182{,}62 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}$ est infiniment petit par rapport à $\frac{1}{91{,}31}$. La probabilité demandée auroit donc pour expression $\frac{\Delta^2}{2 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}$.

Cette derniere expression suppose que l'on sait d'avance que dans l'année dont il s'agit, la Comete coupera l'Ecliptique ; car si l'on ne connoissoit point cet élément, & que l'on sût uniquement d'une maniere générale, qu'une certaine Comete peut couper l'orbite de la Terre, la probabilité demandée auroit pour expression $\frac{1}{\alpha} \times \frac{\Delta^2}{2 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}$; en entendant d'ailleurs par

α le rapport de la durée de la révolution de la Comete, à celle de la Terre.

Et si de plus l'on entendoit par

ν le nombre des Cometes qui coupent l'orbite de la Terre dans le nœud;

la probabilité demandée seroit exprimée par $\frac{\nu}{\alpha} \times \frac{\Delta^2}{2 \times 1440\,\eta' \sin \lambda}$;

α exprimant alors le rapport moyen de la durée des révolutions des Cometes dont il s'agit, à celle de la Terre.

Article IV.

Solution de la question proposée dans l'Article second, en supposant inconnu l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre.

(517) La solution du §. 516 suppose que l'on connoît d'avance l'angle sous lequel la trajectoire de la Comete coupera l'orbite de la Terre; mais si cet angle est inconnu, il faut passer à une seconde intégration, ainsi que nous l'avons dit (§. 511 & 512).

Si l'on multiplie l'expression de la probabilité du §. 516 par $\frac{d\lambda}{\lambda'}$;

λ' est une quantité que l'on doit regarder comme constante dans l'intégration; c'est l'arc qui comprend les différens angles λ que l'on aura considérés dans l'intégration;

on aura à intégrer une quantité de la forme suivante $\frac{\Delta^2}{2 \times 1440\,\eta' \lambda'} \int \frac{d\lambda}{\sin \lambda}$.

Mais on démontre en Géométrie que $\int \frac{d\lambda}{\sin \lambda} = \log \text{Tang}\, \frac{1}{2}\lambda + C$; la quantité qu'il s'agit d'évaluer sera donc exprimée par $\frac{\Delta^2}{2 \times 1440\,\eta' \lambda'}$ $(\log \text{Tang}\, \frac{1}{2}\lambda + C)$.

C est une constante ajoutée en intégrant, & qu'il faut déterminer d'après les circonstances du Problême.

Je n'insisterai point davantage sur cette analyse, parce que je crois essentiel de considérer une nouvelle condition. Je remarquerai seulement, que cette derniere expression suppose que l'on sait d'avance que dans l'année dont il s'agit, la Comete coupera l'Ecliptique; car si l'on ne connoissoit pas cet élément, & que l'on sût uniquement, d'une maniere générale, qu'un nombre ν de Cometes peut couper l'orbite de la Terre, la probabilité demandée auroit pour expression

$$\frac{\nu}{\alpha} \times \frac{\Delta^2}{2 \times 1440\,\eta' \lambda'} (\log \text{Tang}\, \tfrac{1}{2}\lambda + C).$$

Article V.

Solution des questions précédentes, en ayant égard à la différente probabilité des différens angles sous lesquels la trajectoire de la Comete peut couper l'orbite de la Terre.

(518) J'ai supposé dans l'analyse précédente, que tous les angles sous lesquels la trajectoire de la Comete peut couper l'orbite de la

Terre, sont également probables. Cette supposition ne me paroît point exacte.

Pour le démontrer, soit

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique;

a' l'angle de la tangente à la trajectoire de la Comete, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'orbite de la Comete;

D la distance périhélie de la Comete.

Nous avons vu (§. 503) que

(1) $\cos^2$ (angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre considérée comme rectiligne) $= \cos^2 a' \cos^2 I$.

Maintenant si l'on jette les yeux sur l'équation à la parabole du §. 432, & que l'on fasse attention que dans le cas dont il s'agit, $R = 1$ & $Z =$ angle de la ligne des nœuds avec le grand axe de la parabole, on verra que cette équation deviendra

(2) $1 + \cos$ (angle de la ligne des nœuds avec le grand axe) $= 2D$.

Mais (trigonométrie rectiligne) $1 + \cos$ d'un angle $= 2\cos^2 \frac{1}{2}$ angle; donc

(3) $\cos^2$ ($\frac{1}{2}$ angle de la ligne des nœuds avec le grand axe) $= D$.

On sait généralement que dans la parabole, $\frac{1}{2}$ angle du rayon vecteur avec le grand axe $=$ angle de la tangente avec la perpendiculaire au rayon vecteur. Donc puisque la partie de la ligne des nœuds interceptée entre le Soleil & la Comete lorsque cet Astre est dans le nœud, est un certain rayon vecteur particulier, & que, par nos suppositions, a' est l'angle de la tangente à la trajectoire de la Comete avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'orbite de la Comete, l'on a $a' = \frac{1}{2}$ angle de la ligne des nœuds avec le grand axe; donc (*éq.* (3)), $\cos^2 a' = D$. Si l'on porte cette valeur de $\cos^2 a'$ dans l'équation (1), l'on aura

(4) $\cos^2$ (angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre considérée comme rectiligne) $= D \cos^2 I$.

(519) On voit par cette analyse, que si l'on suppose que toutes les inclinaisons des plans des orbites cométaires sur l'Écliptique, sont également possibles, ainsi que toutes les distances périhélies, tous les angles de la trajectoire de la Comete avec la trajectoire de la Terre au point d'intersection dans le nœud, ne sont pas également probables. On voit, par exemple, que la supposition de l'angle nul est la moins probable de toutes, puisqu'elle ne peut avoir lieu qu'autant qu'à la fois D & $\cos I = 1$.

(520) Il est facile de représenter d'une maniere générale les probabilités des différens angles formés par la trajectoire de la Comete, avec l'orbite terrestre, au point d'intersection de ces orbites.

Soit, en effet,

λ l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre.

Nous venons de voir que l'on a

$$(1)\ \cos^2\lambda - D\cos^2 I = 0.$$

Maintenant si l'on suppose à l'angle λ une certaine valeur quelconque déterminée, l'équation précédente sera évidemment à un lieu géométrique, tel que si l'on prend D pour l'abscisse, l'ordonnée de la courbe sera l'expression correspondante de $\cos I$; & si l'on prend successivement différentes valeurs de λ, les surfaces de ces différentes courbes représenteront la probabilité des différens angles λ. Mais ces surfaces ne doivent point être prises indéfiniment ; car puisque d'une part $\cos I$ ne peut point surpasser 1 ; que d'ailleurs D ne peut point surpasser 1, car autrement la trajectoire de la Comete ne couperoit pas l'orbite de la Terre, les surfaces doivent être évaluées depuis $D=\cos^2\lambda$, jusqu'à $D=1$.

(521) Pour déterminer les surfaces en question, & conséquemment la probabilité des différens angles λ, je remarque que puisque d'après nos constructions D est l'abscisse, & $\cos I$ l'ordonnée correspondante des courbes dont il s'agit, l'élément de la surface de ces courbes a pour expression $\cos I\, dD$, ou, à cause de l'équation (1) du §. précédent, $\cos\lambda \frac{dD}{\sqrt{D}}$, dont l'intégrale est $2\cos\lambda\sqrt{D}$; & comme l'intégrale doit être prise depuis $D=1$, jusqu'à $D=\cos^2\lambda$, l'on aura $2\cos\lambda(1-\cos\lambda)$ pour l'expression de la probabilité des différens angles λ. La probabilité du §. 516, en la multipliant par la probabilité des différens angles λ, aura donc pour expression $\frac{\nu}{\alpha}\times\frac{\Delta^2\cos\lambda(1-\cos\lambda)}{1440\,\eta'\sin\lambda}$; & si l'on substitue à $\cos^2\lambda$, sa valeur $1-\sin^2\lambda$, on aura

$$(1)\ \text{Probabilité} = \frac{\nu}{\alpha}\times\frac{\Delta^2(\cos\lambda+\sin^2\lambda-1)}{1440\,\eta'\sin\lambda}.$$

Si l'on multiplie cette derniere expression par $\frac{d\lambda}{\lambda'}$, ainsi que nous l'avons prescrit dans le §. 517, on aura à intégrer une quantité de la forme suivante,

$$\frac{\nu}{\alpha}\times\frac{\Delta^2}{1440\,\eta'\lambda'}\left(\int\frac{\cos\lambda d\lambda}{\sin\lambda}+\sin\lambda d\lambda-\frac{d\lambda}{\sin\lambda}\right).$$

Mais on sait que $\int\frac{\cos\lambda d\lambda}{\sin\lambda}=\log\sin\lambda$; que $\int\sin\lambda d\lambda=-\cos\lambda$, & que $\int\frac{d\lambda}{\sin\lambda}=-\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda=\log\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda}$; d'ailleurs $\log\sin\lambda+\log\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda}=\log\frac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda}$; on aura donc

$$(2)\ \text{Probabilité demandée} = \frac{\nu}{\alpha}\times\frac{\Delta^2}{1440\,\eta'\lambda'}\left(\log\frac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda'}-\cos\lambda+C\right).$$

Mais cette probabilité doit être nulle lorsque $\lambda=0$, & dans ce cas $\log\frac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda}=$ log hyperbolique de $2=0{,}6931$, & $\cos\lambda=1$; donc

$C = 1 - 0,6931 = 0,3069$; donc enfin, en supposant λ' & λ de 90^d,

$$(3)\ \text{Probabilité demandée} = \frac{\nu}{\alpha} \times \frac{0,3069\ \Delta^2}{1440\ \nu'\ \text{arc}\ 90^d}.$$

Application du calcul à la distance de 13000 lieues.

(522) Il est facile d'appliquer le calcul à la formule précédente, en supposant $\Delta = 13000$ lieues. Dans ce cas, il faudra supposer, comme dans les §. 498 & 504, $\nu' = 0,000016894$; $\Delta = 0,00038786$; & l'on aura

$$(1)\ \text{Probabilité} = \frac{\nu}{\alpha} \times \frac{1}{827900}.$$

Je ferai voir, dans l'Article suivant, l'idée qu'on doit se former de cette probabilité

ARTICLE VI.

De la probabilité qu'à un instant quelconque, une Comete sera à une distance de la Terre plus petite que 13000 lieues.

(523) Dès qu'on n'a pu douter que les Cometes ne fussent des corps semblables aux Planetes parcourant en tout sens les différentes régions de notre systême Planétaire, on a pensé que quelques-unes pourroient un jour rencontrer la Terre ; que peut-être même quelques Cometes l'avoient déja rencontrée, & avoient occasionné ces bouleversemens dont on croit découvrir des vestiges. Regardez, a-t-on dit, ces cavités situées entre l'Europe l'Afrique & l'Amérique ; entre l'Amérique & les côtes orientales de l'Asie, & qui sont remplies par la Mer ; qui pourroit douter à cette vue, qu'une Comete, en rasant la Terre, n'ait sillonné ces immenses cavités ? C'est ainsi que les Cometes, après avoir été long-tems des signes de la colere céleste, lorsqu'elles ont été mieux connues, sont devenues aux yeux de quelques Philosophes, les agens dont l'Etre suprème se sert pour changer la face de l'Univers. C'est ainsi que Whiston, célebre Astronome Anglois, a prétendu expliquer le Déluge, par l'inondation de la queue d'une Comete, qu'il croit être la même que la Comete de 1680. Ces imaginations sont sans doute très brillantes. Osons cependant examiner la question, sans nous laisser éblouir par ces brillantes hypotheses ; & portons dans cet examen la rigueur qui convient à un sujet aussi intéressant.

(524) Nous avons vu (§. 522) que la probabilité qu'à un instant quelconque une Comete sera à une distance de la Terre moindre que 13000 lieues, est exprimée par l'équation suivante,

$$(1)\ \text{Probabilité} = \frac{\nu}{\alpha} \times \frac{1}{827900}.$$

Dans cette équation, l'on entend par

ν le nombre des Cometes dont les trajectoires coupent l'orbite de la Terre ;
α la durée moyenne des révolutions des Cometes.

Je pourrois dire d'abord que α eſt un nombre inconnu, qui ne peut être que très-grand; que par conſéquent la probabilité de l'équation (1) devient encore plus petite par cette nouvelle conſidération. Mais on pourroit me répondre, qu'en admettant un nombre infini d'années, l'événement improbable dans un eſpace fini de tems, doit arriver néceſſairement dans une durée infinie. J'abandonne donc cet argument, & je vais m'attacher à prouver que ν eſt rigoureuſement une quantité infiniment petite.

J'obſerverai en premier lieu, que s'il étoit démontré que ν eſt une quantité nulle, on invoqueroit vainement un nombre infini de ſiecles, pour rendre probable la rencontre de la Terre & d'une Comete. Conſidérons en effet, les Planetes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Herſchell, dont les orbites n'ont aucun point commun entr'elles. Imaginons tant de révolutions que l'on voudra, & certainement la rencontre de ces Planetes & de la Terre n'en deviendra pas plus probable.

Cette conſidération exclut toutes les Cometes ſupérieures; c'eſt le nom que je donne aux Cometes dont les diſtances périhélies ſurpaſſent la diſtance de la Terre au Soleil. Nous n'avons donc à conſidérer que les Cometes inférieures; c'eſt-à-dire, celles dont les diſtances périhélies ſont plus petites que la diſtance du Soleil à la Terre. Relativement à ces dernieres Cometes, il eſt certain que, dans deux points de leurs orbites, elles ſe trouvent à une diſtance du Soleil égale à la diſtance de la Terre au Soleil; & que par conſéquent il y a deux points de leurs orbites où elles pourroient rencontrer la Terre. Mais cette derniere circonſtance n'eſt pas la ſeule qui doive avoir lieu pour que les deux trajectoires puiſſent ſe couper; il faut de plus que ces points particuliers de l'orbite de la Comete répondent aux nœuds. Or, comme il y a preſque l'infini à parier contre un, que cette circonſtance n'aura pas lieu, il y a, pour chaque Comete, preſque l'infini à parier contre 1, que ſon orbite ne coupera pas l'orbite de la Terre. Il faudroit donc, pour que ν eût une valeur finie, que le nombre des Cometes inférieures fût infini. je laiſſe aux Aſtronomes à apprécier ce raiſonnement.

(525) On pourroit, peut-être, inſiſter & dire: on ne connoît pas à la vérité, de Cometes dont les orbites coupent la trajectoire de la Terre; mais il y en a pluſieurs, relativement auxquelles un petit changement dans les élémens ameneroit cette condition. Or il eſt aiſé de voir, d'après cette conſidération, que le Problême a une infinité de ſolutions; il y a donc une infinité de circonſtances qui peuvent faire qu'une Comete, qui n'a pas coupé l'orbite de la Terre lors de ſa précédente apparition, coupe cette même orbite, lors de l'apparition ſuivante. L'objection peut paroître ſpécieuſe; il eſt cependant facile d'y répondre. En effet, s'il y a une infinité de combinaiſons qui peuvent amener le réſultat ſuppoſé; par la même raiſon, il y a une infinité d'infinités de circonſtances qui s'y oppoſent. Lors donc que l'on ne connoît point toutes les cauſes qui

ſont dévier une Comete de ſon orbite, & qu'on ne peut pas les ſoumettre au calcul, il y a à parier preſque l'infini contre 1, que les conditions qui feroient couper l'orbite de la Terre par celle de la Comete, ne ſeront pas ſatisfaites; car on ne doit point perdre de vue qu'il y a infiniment loin entre la poſſibilité d'une altération quelconque dans les élémens d'une Comete, & la certitude d'un changement tel qu'il ſatisfaſſe à telle ou telle condition.

On peut conclure de ces recherches, que dans la rigueur géométrique il n'eſt pas phyſiquement impoſſible qu'une Comete rencontre la Terre; mais que la probabilité morale de cet événement eſt abſolument nulle; & l'on peut dire avec un des plus beaux Génies qui ait honoré la France,

Cometes, que l'on craint à l'égal du Tonnerre,
Ceſſez d'épouvanter les Peuples de la Terre.

Et ſans doute M. Halley a trop écouté les terreurs populaires, lorſqu'il diſoit: *Colliſionem verò vel contactum tantorum corporum ac tantâ vi motorum (quod quidem manifeſtum eſt minimè eſſe impoſſibile) avertat Deus optimus maximus.*

ARTICLE VII.

Remarques ſur la Comete de 1680, par laquelle Whiſton a prétendu expliquer le Déluge.

(526) Je ne puis paſſer ſous ſilence les remarques ſuivantes relativement à la Comete de 1680 dont Whiſton s'eſt ſervi pour expliquer le Déluge, ainſi que je l'ai dit dans l'Article précédent. Rien de plus ingénieux que le ſyſtême de ce célebre Aſtronome; rien de plus ſavant que les recherches chronologiques qui l'étayent. En effet, dans ſa Théorie de la Terre, Whiſton fait voir que ſi l'on ſuppoſe à la Comete de 1680, une période d'environ 575 ans, on trouve dans l'hiſtoire du monde, des apparitions formidables de Cometes à chacune de ces périodes. Sous l'année 1106, on lit dans la Chronique Saxone, le paſſage ſuivant. *Anno Chriſti 1106, à primâ ſeptimanâ Quadrageſimæ uſque ad vigiliam Palmarum conſpectus eſt horribilis Cometa.* On trouve une Comete ſemblable en 531, ſous le regne de l'Empereur Juſtinien. *Anno Chriſti 531 imperii Juſtiniani quinto, conſpectus eſt Cometa qui ob radios ſursùm inſtar facis porrectos lampadias dicebatur.* Si l'on retranche 575 de cette derniere époque, on retrouve la Comete qui parut à la mort de Jules Céſar. Enfin la ſeptieme période, en rétrogradant, coïncide avec l'année que l'on dit être celle du Déluge. Voila donc, ſuivant Whiſton, l'influence de la Comete de 1680 ſur le Déluge, démontrée par la Chronologie. Quant à la maniere phyſique dont cette Comete a agi ſur la Terre, il penſe que l'inondation qui a couvert notre Globe à cette époque, a été occaſionnée, ſoit par la proximité de la Comete

qui a pu faire gonfler les eaux de la Mer & de l'intérieur de la Terre, soit par la queue de la Comete dans laquelle notre Globe s'est trouvé engagé.

(527) Sans entrer dans l'examen détaillé de toutes les difficultés que présente ce systême, qu'il me soit permis de présenter rapidement quelques réflexions que mes recherches précédentes ont fait naître. Avec les élémens que l'on a conclus de la derniere apparition de cette Comete, son *minimum* de distance à la Terre n'auroit été que de 151270 lieues. Est-il probable, d'après les remarques du §. 508, qu'à cette distance, la Comete ait occasionné un aussi grand bouleversement dans les eaux de notre Globe ? On peut dire, il est vrai qu'avec des élémens un peu différens, la Comete auroit approché beaucoup plus près de la Terre; mais quelle certitude a-t-on qu'à l'époque du Déluge, les élémens aient été tels que l'exige la théorie, pour qu'il y ait eu une très-grande approximation de notre Globe, D'ailleurs, lors du Déluge, il n'y a point eu de choc de la part de la Comete ; les Historiens sacrés n'en font aucune mention, & certainement un événement aussi remarquable auroit été consigné dans les fastes du monde. Les argumens du §. 508, contre les grandes Marées, me paroissent donc avoir toute leur force.

Quant à la queue de la Comete, j'observerai que la grande proximité de cet Astre à la Terre, n'a lieu que dans la branche de sa trajectoire qu'elle décrit avant son passage par le périhélie, tems auquel cette Comete ne s'étant pas encore approchée du Soleil, sa queue n'a rien de remarquable. Dans la branche, au contraire, que la Comete décrit après son passage par le périhélie, la plus courte distance de cet Astre à l'orbite de la Terre, est de plus de neuf millions de lieues. Est-il naturel de penser que l'atmosphere de la Comete, dont la nature nous est d'ailleurs totalement inconnue, produise un si grand désastre à une telle distance ?

Je finirai cet Article par une remarque sur le sens que l'on doit donner à un passage de M. Halley, rapporté par M. de la Lande. Suivant cet Astronome, le 11 Novembre 1680, la Comete n'étoit guere éloignée que comme la Lune. On pourroit d'abord croire qu'en 1680 cette Comete s'est réellement approchée très-près de la Terre ; mais l'on se tromperoit si l'on donnoit ce sens à ces paroles. Il faut seulement entendre que le 11 Novembre 1680, la Comete n'étoit guere éloignée que comme la Lune, du point correspondant de l'orbite terrestre ; car dans le fait, la Comete de 1680 a toujours été à une distance de la Terre plus grande que seize millions de lieues. On observera aussi que l'époque du 11 Novembre 1680, est comptée suivant le vieux style. Pour la ramener au style actuel, il faut lire le 21 Novembre 1680.

ARTICLE VIII.

Sur la singularité d'un Phénomene relatif aux Planetes principales de notre Systême Planétaire, & à leurs Satellites.

(528) Notre Systême Planétaire présente un Phénomene fort singulier. Nos Planetes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Herschell, & leurs Satellites, circulent dans des plans peu inclinés les uns aux autres ; de sorte que les angles des différens plans des orbites Planétaires avec le plan de l'orbite terrestre, sont tous compris dans un espace d'environ cinq dégrés. Cette singularité n'a point échappé aux Astronomes, & ils ont pensé qu'elle dénotoit, de la maniere la plus évidente, l'action d'une cause particuliere qui a amené ce résultat.

Pour apprécier la singularité du Phénomene, supposons d'abord la Terre circulante autour du Soleil ; supposons ensuite qu'une autre Planete soit lancée au hasard. Il est évident que cette nouvelle Planete décrira une trajectoire autour du Soleil ; mais comme, par la supposition, l'angle du plan de l'orbite de cette Planete avec le plan de l'orbite terrestre est l'effet du hasard, tous les angles depuis 0^d jusqu'à 180^d, sont également probables ; & si l'on nomme

A un certain arc particulier ;

la probabilité que l'angle en question sera compris dans l'arc A, sera exprimée par $\frac{A}{180^d - A}$.

Supposons maintenant qu'une seconde Planete soit pareillement lancée au hasard. Relativement à cette seconde Planete, la probabilité que l'angle sera compris dans l'arc A, aura également pour expression $\frac{A}{180^d - A}$; de sorte que la probabilité que les angles des plans des orbites de ces deux Planetes avec le plan de l'orbite de la Terre, soient tous les deux compris dans l'arc A, sera exprimée par $\frac{A^2}{(180^d - A)^2}$. Et généralement si l'on suppose un nombre n de Planetes lancées au hasard, la probabilité que les angles des plans des orbites de ces Planetes avec le plan de l'orbite de l'une quelconque, seront tous compris dans une certaine limite A, s'exprimera par $\frac{A^{n-1}}{(180^d - A)^{n-1}}$.

Dans notre systême Planétaire $n = 17$; $A = 5^d$; $\frac{A}{180^d - A} = \frac{1}{35}$. La probabilité contre le Phénomene que présente la Nature, est donc comme $35^{16} : 1$. Il y a donc une probabilité de 35^{16} contre 1 que cet effet n'est point dû au hasard, & qu'une cause particuliere a amené le résultat que l'on observe dans notre systême Planétaire.

CHAPITRE SIXIEME.

Des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre; & des changemens que les Cometes qui ont le plus approché de cette orbite, devroient éprouver dans leurs élémens, pour qu'elles pussent couper l'orbite terrestre.

JE me propose d'examiner, dans ce Chapitre, les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre; & les changemens que les Cometes connues qui ont le plus approché de cette orbite, devroient éprouver dans leurs élémens, pour pouvoir couper l'orbite terrestre. Ces recherches serviront à fixer de plus en plus nos idées sur l'excessivement petite probabilité qu'une Comete puisse rencontrer la Terre.

ARTICLE PREMIER.

Des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre.

(529) Pour déterminer quelles conditions doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre, je reprends l'équation générale aux Sections coniques du §. 408 ; & je remarque que si l'on nomme,

- a le demi-grand axe d'une Section Conique;
- E la distance du foyer au centre de la Section;
- P le parametre du grand axe;
- R le rayon vecteur;
- Z l'angle du rayon vecteur avec le grand axe;
- 1 le sinus total;
- D la distance du foyer à l'apside inférieure;

l'on a pour équation générale aux Sections Coniques,

$$(1)\quad 2R\left(\frac{E}{a}\cos Z + 1\right) - P = 0.$$

J'ordonne l'équation (1) par rapport à cos Z, & j'ai

$$(2)\quad \cos Z = \frac{a}{E}\left(\frac{P}{2R} - 1\right).$$

Je remarque que dans le cas dont il s'agit, R doit être égale à la distance du point correspondant de l'orbite terrestre au Soleil; que de plus

l'angle Z est égal à la longitude du nœud moins le lieu du périhélie sur l'orbite.

Soit donc

r la distance du point correspondant de l'orbite terrestre au Soleil ;

on aura

(3) cosinus (longitude du nœud — lieu du périhélie sur l'orbite)
$= \frac{a}{E}\left(\frac{P}{2r} - 1\right)$.

Cette derniere formule, presqu'aussi simple dans le cas de l'orbite elliptique que dans le cas de l'orbite parabolique, résout généralement la question proposée ; mais pour en faire usage il faudroit que les orbites des Cometes eussent été déterminées en les regardant comme elliptiques. Comme ces orbites ont été calculées dans la supposition qu'elles sont paraboliques, il faut prendre le cas de la Parabole, c'est-à-dire, celui de $\frac{a}{E} = 1$, & de $P = 4D$; l'on a alors :

(4) cosinus (longitude du nœud — lieu du périhélie sur l'orbite)
$= \frac{2D}{r} - 1$.

De la distance de la Comete à l'orbite de la Terre, lorsqu'elle traverse le plan de l'Ecliptique.

(530) Pour déterminer la distance d'une Comete à l'orbite de la Terre, lorsqu'elle traverse le plan de l'Ecliptique, je reprends l'équation (1) du §. 529, & je l'ordonne par rapport à R, en observant que dans ce cas R est la distance de la Comete au Soleil, & Z est la longitude du nœud moins le lieu du périhélie sur l'orbite de la Comete ; on a donc

(1) Distance de la Comete au Soleil lorsqu'elle traverse le plan de l'Écliptique $= \frac{P}{2\left(1 + \frac{E}{a}\text{cos}\,(\text{longitude du nœud} - \text{lieu du périhélie})\right)}$;

Ou, dans le cas de la Parabole,

(2) Distance de la Comete au Soleil lorsqu'elle traverse le plan de l'Écliptique $= \frac{2D}{1 + \text{cos}\,(\text{longitude du nœud} - \text{lieu du périhélie})}$.

(3) Distance de la Comete à l'orbite de la Terre lorsqu'elle traverse le plan de l'Écliptique = rayon vecteur de l'orbite terrestre — distance de la Comete au Soleil.

ARTICLE II.

Des changemens que doit éprouver une Comete dans les élémens de ſon orbite, pour pouvoir couper l'orbite de la Terre.

(531) Je ſuppoſe que dans une précédente apparition, une Comete n'ait pas coupé l'orbite de la Terre, on peut demander quel changement elle doit éprouver dans ſes élémens, pour couper cette orbite lors de la ſeconde apparition. On pourroit facilement réſoudre ce Problême dans le cas des orbites elliptiques, & la ſolution ne feroit guere plus compliquée que dans le cas de la Parabole. Comme cependant les orbites des Cometes ont toutes été calculées dans la ſuppoſition de la Parabole, je m'en tiendrai à cette hypotheſe.

Soit

r la diſtance du Soleil au point de l'orbite terreſtre correſpondant au nœud;

D la diſtance périhélie de la Comete lors de la premiere apparition;

dD la variation de cette diſtance dans l'intervalle des deux apparitions;

ζ la longitude du nœud aſcendant lors de la premiere apparition;

β la diſtance du périhélie de la Comete au nœud aſcendant comptée ſur l'orbite de la Comete, lors de la premiere apparition;

$d\zeta$ la variation de la longitude du nœud aſcendant dans l'intervalle des deux apparitions;

$d\beta$ la variation de la diſtance du périhélie ſur l'orbite au nœud aſcendant, dans l'intervalle des deux apparitions.

Il eſt ſenſible que lors de la ſeconde apparition, la diſtance périhélie ſera égale à $D+dD$, & que la longitude du nœud moins le lieu du périhélie ſur l'orbite, ſera égale à $\zeta-\beta+d\zeta-d\beta$. D'ailleurs, pour que la Comete coupe l'orbite de la Terre, on doit avoir

Diſtance de la Comete à la Terre $=r$;

donc

$$(1)\quad r(1+\cos(\zeta-\beta+d\zeta-d\beta))-2(D+dD)=0.$$

Il faut ſatisfaire à cette équation pour que la Comete puiſſe couper l'orbite de la Terre, lors de la ſeconde apparition.

(532) On voit que le Problême précédent eſt un Problême indéterminé qui a une infinité de ſolutions. Il y a donc une infinité de circonſtances qui peuvent faire qu'une Comete qui n'a pas coupé l'orbite de la Terre lors d'une précédente apparition, coupe cette même orbite lors de l'apparition ſuivante; mais par la même raiſon il y a une infinité d'infinités de circonſtances qui s'y oppoſent. Lors donc que l'on ne connoît point toutes les cauſes qui alterent l'orbite d'une Comete, il y a à parier l'infini contre l'unité que l'équation (1) du §. 531 ne ſera

pas ſatisfaite, ainſi que nous l'avons dit ; car on ne doit point perdre de vue qu'il y a infiniment loin entre la poſſibilité d'une altération quelconque dans les élémens d'une Comete, & la certitude d'un changement tel qu'il ſatisfaſſe à l'équation (1) du paragraphe précédent.

ARTICLE III.

Application des théories précédentes, aux Cometes des années 837, 1299, 1596, 1618, 1680, 1683, 1684, 1702, 1739, 1743, 1763, 1764 *&* 1770.

Je vais maintenant appliquer les théories précédentes, aux Cometes des années 837, 1299, 1596, 1618 1680, 1683, 1684, 1702, 1739, 1743, 1763, 1764 & 1770. Parmi ces Cometes, les unes ont approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues ; les autres ont été indiquées comme pouvant couper l'orbite terreſtre, au moyen de quelques légeres variations dans leurs élémens.

Comete de 837.

(533) Nous avons vu (§. 474) que, relativement à cette Comete, l'on avoit les élémens ſuivans,

Nœud aſcendant	$6^s\ 26^d\ 33'$
Lieu du périhélie ſur l'orbite . .	9 19 3
Inclinaiſon de l'orbite	10
Diſtance du périhélie	0,58000
Mouvement rétrograde.	

Pour déterminer quelle condition auroit dû avoir lieu pour que cette Comete eût pu couper l'orbite de la Terre dans le nœud aſcendant, je remarque que la poſition du nœud aſcendant vu du Soleil étant dans $6^s\ 26^d\ 33'$, la diſtance de la Terre au Soleil, dans le point de ſon orbite correſpondant à ce nœud, eſt celle qui répond à la longitude du Soleil de $0^s\ 26^d\ 33'$ vue du Soleil. Cette diſtance eſt de 1,00479. Si dans l'équation (4) du §. 529 l'on ſuppoſe D = 0,58000, & $r = 1,00479$, l'on conclura, longitude du nœud — lieu du périhélie $=\begin{cases} 81^d\ 6'\ 50'' \\ 278\ 53\ 10 \end{cases}$.

Il faudroit donc, pour que la Comete eût pu couper l'orbite terreſtre dans le nœud, que la longitude du nœud moins le lieu du périhélie ſur l'orbite, fût de $278^d\ 53'\ 10''$. Mais cette différence eſt de $277^d\ 30'$; la Comete de 837 n'a donc pas réellement coupé l'orbite de la Terre.

Si l'on vouloit maintenant connoître quelles altérations les élémens de cette Comete devroient ſubir pour que le Phénomene ait lieu, rien

ne feroit si simple que de déterminer ces altérations ; & l'équation (1) du §. 531 donneroit pour condition du Problême,

$$(1)\ 1{,}00479(1+\cos(277^d\,30'\,0''+d\zeta-d\beta)-2(0{,}58000+dD))=0.$$

Si dans cette derniere équation l'on suppose $dD=0$; c'est-à dire, si l'on ne suppose point d'altération dans la distance périhélie, l'on aura $d\zeta-d\beta=1^d\,23'\,10''$. Si l'on suppose au contraire $d\zeta-d\beta=0$, l'on conclura $dD=-0{,}01203$; il faudroit donc dans ce cas, que la distance périhélie de la Comete diminuât d'environ un quarante-huitieme de sa grandeur totale.

Comete de 1299.

(534) Relativement à cette Comete, on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$3^s\,17^d\,8'\,0''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . . .	0 3 20
Inclinaison de l'orbite	68 57
Distance périhélie	0,31790
Mouvement rétrograde.	

Par des calculs entiérement semblables à ceux du paragraphe précédent, on trouvera qu'avec les élémens que nous venons de donner, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans son nœud ascendant, ni dans son nœud descendant. Mais relativement au nœud ascendant, si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete, pour que la rencontre puisse avoir lieu dans ce nœud, on parviendra à l'équation suivante,

$$(1)\ 0{,}98339(1+\cos(103^d\,48'\,0''+d\zeta-d\beta))-2(0{,}31790+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, l'on aura $d\zeta-d\beta=6^d\,54'\,0''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=0{,}05651$.

Comete de 1596.

(535) Cette Comete a été calculée par M. Pingré ; voici ses élémens.

Nœud ascendant	$10^s\,15^d\,36'\,50''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . . .	7 28 30 50
Inclinaison du plan de l'orbite . .	52 9 45
Distance périhélie.	0,54941
Mouvement rétrograde.	

Par des calculs entiérement semblables à ceux des paragraphes précédens, on trouvera qu'avec les élémens ci-dessus, la Comete n'a pu couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant. Si l'on veut déterminer maintenant quelles altérations de-

vroient subir les élémens de la Comete, pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud ascendant, on parviendra à l'équation suivante,

$$(1)\quad 1{,}01333\,(1+\cos(77^d\,6'\,0''+d\zeta-d\beta))-2(0{,}54941+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, l'on aura $d\zeta-d\beta=8^d\,3'\,40''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=0{,}07036$.

Comete de 1618.

(536) Nous avons vu (§. 475) que relativement à cette Comete, on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$2^f\,16^d\,1'\,0''$
Lieu du périhélie sur l'orbite .	0 2 14 0
Inclinaison de l'orbite	37 34 0
Distance périhélie	0,37975
Mouvement direct.	

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud descendant, on parviendra à l'équation suivante,

$$(1)\quad 1{,}01554\,(1+\cos(253^d\,47'\,0''+d\zeta-d\beta)-2(0{,}37975+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, l'on aura $d\zeta-d\beta=1^d\,36'\,50''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=-0{,}1379$.

Comete de 1680.

(537) Nous avons vu (§. 476) que relativement à cette Comete, on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$9^f\,2^d\,2'\,0''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	8 22 39 30
Inclinaison de l'orbite	60 56 0
Distance périhélie.	0,006125
Mouvement direct.	

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete, pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud descendant, on parviendra à l'équation suivante,

$$(1)\quad 0{,}98327\,(1+\cos(189^d\,22'\,30''+d\zeta-d\beta))-2(0{,}006125+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, on aura $d\zeta-d\beta=-0^d\,19'\,15''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=0{,}000438$.

Comete de 1683.

(538) Relativement à cette Comete, on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$5^s\ 23^d\ 23'\ 0''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	2 25 29 30
Inclinaison de l'orbite.	83 11
Distance périhélie	0,56020
Mouvement rétrograde.	

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant ni dans le nœud descendant; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete, pour que la rencontre puisse avoir lieu dans le nœud ascendant, l'on parviendra à l'équation suivante,

(1) $0,99515(1+\cos(87^d\ 53'\ 30''+d\zeta-d\beta))-2(0,56020+dD)=0.$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, on aura $d\zeta-d\beta=-5^d\ 7'\ 20''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=-0,05607$.

Comete de 1684.

(539) Nous avons vu (§. 477) que relativement à cette Comete, l'on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$8^s\ 28^d\ 15'\ 0''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	7 28 52 0
Inclinaison de l'orbite	65 48 40
Distance périhélie	0,96015
Mouvement direct.	

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud ascendant, on parviendra à l'équation suivante,

(1) $1,01650(1+\cos(29^d\ 23'\ 8''+d\zeta-d\beta))-2(0,96015+dD)=0.$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, on aura $d\zeta-d\beta=-2^d\ 8'\ 50''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=-0,00904$.

Comete de 1702.

(540) Nous avons vu (§. 478) que relativement à cette Comete, l'on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$6^s\ 9^d\ 25'\ 15''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	4 18 41 3
Inclinaison de l'orbite	4 30 0
Distance périhélie.	0,64590
Mouvement direct.	

Avec

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete, pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud ascendant, on parviendra à l'équation suivante,

$$(1)\quad 1+\cos(50^d\,44'\,12''+d\zeta-d\beta)-2(0,64590+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, on aura $d\zeta-d\beta=22^d\,17'\,48''$; & si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=0,24122$.

La Comete couperoit également l'orbite de la Terre, si l'on supposoit une diminution de $4^d\,30'$ dans l'inclinaison du plan de l'orbite.

Comete de 1739.

(541) Relativement à la Com[illegible] de 1739, l'on a les élémens suivans,

Nœud ascendant.	$6^s\,27^d\,25'\,14''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite . . .	3 12 38 40.
Inclinaison de l'orbite.	55 42 44.
Distance perihélie.	0,67358.
Mouvement rétrograde.	

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant. Mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Co[illegible] pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud descendant, on [illegible]dra à l'équation suivante,

$$(1)\ [illegible]99449(1+\cos(284^d\,46'\,34''+d\zeta-d\beta))-2(0,6735[illegible]+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD=0$, on aura $d\zeta-d\beta=5^d\,59'\,26''$; et si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, on aura $dD=-0,04950$.

Comete de 1743.

(542) Nous avons vu (§. 479) que relativement à cette Comete, l'on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$2^s\,8^d\,10'\,48''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	3 2 58 4
Inclinaison de l'orbite	2 15 50
Distance périhélie.	0,83840
Mouvement direct.	

Avec les élémens ci-dessus, la Comete ne peut couper l'orbite de la Terre, ni dans le nœud ascendant, ni dans le nœud descendant; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient subir les élémens de la Comete pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud ascendant, on parviendra à l'équation suivante,

$$(1)\ 0,98531(1+\cos(335^d\,12'\,44''+d\zeta-d\beta))-2(0,83840+dD)=0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $dD = 0$, on aura $d\zeta - d\beta = -20^d\ 38'\ 24''$; & si l'on suppose $d\zeta - d\beta = 0$, on aura $dD = 0{,}10302$.

La Comete couperoit également l'orbite de la Terre, si l'on supposoit une diminution de $2^d\ 15'\ 50''$ dans l'inclinaison du plan de l'orbite.

Comete de 1763.

(543) Nous avons vu (§. 480) que relativement à cette Comete l'on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$11^s\ 26^d\ 29'\ 29''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	2 25 0 48
Inclinaison de l'orbite	73 59 29
Distance périhélie	0,49842.
Mouvement direct.	

Avec les élémens précédens, la Comete ne peut point couper l'orbite de la Terre ; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient éprouver les élémens de la Comete pour que la rencontre pût avoir lieu dans les nœuds, on parviendra aux équations suivantes.

Nœud ascendant.

(1) $1{,}00332\,(1 + \cos(271^d\ 28'\ 41'' + d\zeta - d\beta)) - 2\,(0{,}49842 + dD) = 0.$

Nœud descendant.

(2) $0{,}99633\,(1 + \cos(91^d\ 28'\ 41'' + d\zeta - d\beta)) - 2\,(0{,}49842 + dD) = 0.$

Si dans l'équation (1) l'on suppose $dD = 0$, l'on aura $d\zeta - d\beta = -1^d\ 50'\ 53''$; si l'on suppose $d\zeta - d\beta = 0$, l'on aura $dD =$ [illegible]618.

Si dans l'équation (2) l'on suppose $dD = 0$, l'on aura $d\zeta - d\beta = -1^d\ 28'\ 41''$; si l'on suppose $d\zeta - d\beta = 0$, l'on aura $dD = -0{,}01310$.

Comete de 1764.

(544) Relativement à la Comete de 1764, l'on a les élémens suivans,

Nœud ascendant	$3^s\ 19^d\ 20'\ 6''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	0 16 11 48
Inclinaison de l'orbite	43 54 19
Distance périhélie	0,56418
Mouvement rétrograde.	

Avec les élémens précédens la Comete ne peut point couper l'orbite de la Terre ; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient éprouver les élémens de la Comete pour que la rencontre pût avoir lieu dans le nœud descendant, on parviendra à l'équation suivante,

(1) $1{,}01650\,(1 + \cos(273^d\ 8'\ 18'' + d\zeta - d\beta)) - 2\,(0{,}56418 + dD) = 0.$

Si dans cette équation l'on suppose $dD = 0$, on aura $d\zeta - d\beta = 3^d\ 10'\ 44''$; si l'on suppose $d\zeta - d\beta = 0$, on aura $dD = -0{,}02810$.

Comete de 1770.

(545) Nous avons vu (§. 481) que relativement à cette Comete, on a les élémens suivans.

Nœud ascendant	$4^s\,19^d\,39'\,5''$
Lieu du périhélie sur l'orbite . .	11 25 27 16
Inclinaison du plan de l'orbite . .	1 44 30
Distance périhélie	0,63688
Mouvement direct.	

Avec les élémens précédens, la Comete ne peut point couper l'orbite de la Terre; mais si l'on veut déterminer quelles altérations devroient éprouver les élémens de la Comete pour que la rencontre pût avoir lieu dans les nœuds, on parviendra aux équations suivantes.

Nœud ascendant.

$$(1)\quad 0{,}98765\,(1+\cos(144^d\,11'\,49''+d\zeta-d\beta))-2(0{,}63688+dD)=0.$$

Nœud descendant.

$$(2)\quad 1{,}01267\,(1+\cos(324^d\,11'\,49''+d\zeta-d\beta)-2(0{,}63688+dD)=0.$$

Si dans l'équation (1) l'on suppose $dD=0$, l'on aura $d\zeta-d\beta=-71^d\,2'\,9''$; si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=-0{,}54355$.

Si dans l'équation (2) l'on suppose $dD=0$, l'on aura $d\zeta-d\beta=-39^d\,15'\,19''$; si l'on suppose $d\zeta-d\beta=0$, l'on aura $dD=0{,}28012$.

La Comete couperoit également l'orbite de la Terre, si l'on supposoit une diminution de $1^d\,44'\,30''$ dans l'inclinaison du plan de l'orbite.

Nous aurions pu donner plus d'étendue à ces recherches; & il nous auroit été facile d'assigner pour toutes les Cometes, les équations qui eussent exprimé la loi de la variation de leurs élémens, pour que ces Cometes pussent couper l'orbite terrestre dans les nœuds. Mais ces calculs n'auroient conduit à aucune connoissance nouvelle; ils auroient seulement confirmé de plus en plus le fait incontestable, que parmi toutes les Cometes connues, il n'en est aucune dont la trajectoire coupe l'orbite de la Terre.

Table pour vérifier facilement si une Comete peut approcher de l'orbite de la Terre dans les nœuds.

(546) Je terminerai ce Chapitre par une Table, au moyen de laquelle il sera facile de vérifier si une Comete peut approcher de l'orbite de la Terre dans ses nœuds. La premiere colonne renfermera les distances périhélies depuis 0,00000, jusqu'à 1,00000. On trouvera dans les seconde & troisieme colonnes, quelle devroit être la longitude du nœud moins le lieu du périhélie sur l'orbite, pour que la Comete pût

couper l'orbite de la Terre dans les nœuds. J'ai supposé que le rayon de l'orbite terrestre étoit par-tout égal à 1,00000.

DISTANCES PÉRIHÉLIES.	LONGITUDE DU NŒUD MOINS LE LIEU DU PÉRIHÉLIE SUR L'ORBITE.					
	D.	M.	S.	D.	M.	S.
0,00000	180	0	0	180	0	0
0,01000	168	31	20	191	28	40
0,02000	163	44	30	196	15	30
0,03000	160	3	3	199	56	57
0,04000	156	55	30	203	4	30
0,05000	154	9	30	205	50	30
0,10000	143	7	50	216	52	10
0,15000	134	25	30	225	34	30
0,20000	126	52	10	233	7	50
0,25000	120	0	0	240	0	0
0,30000	113	34	40	246	25	20
0,35000	107	27	30	252	32	30
0,40000	101	32	10	258	27	50
0,45000	95	44	30	264	15	30
0,50000	90	0	0	270	0	0
0,55000	84	15	30	275	44	30
0,60000	78	27	50	281	32	10
0,65000	72	32	30	287	27	30
0,70000	66	25	20	293	34	40
0,75000	60	0	0	300	0	0
0,80000	53	7	50	306	52	10
0,85000	45	34	30	314	25	30
0,90000	36	52	10	323	7	50
0,95000	25	50	30	334	9	30
0,96000	23	4	30	336	55	30
0,97000	19	56	57	340	3	3
0,98000	16	15	30	343	44	30
0,99000	11	28	40	348	31	20
1,00000	0	0	0	360	0	0

Rien n'est plus simple que l'usage de cette Table. Soit, par exemple, la Comete de 1769, dont la distance périhélie est de 0,12376; dont la longitude du nœud descendant est de $11^{s}\,25^{d}\,0'\,43''$, & le lieu du périhélie de $4^{s}\,24^{d}\,5'\,54''$. Je conclus d'abord que la longitude du nœud descendant moins le lieu du périhélie sur l'orbite, est de $210^{d}\,54'\,49''$. Je vois, par la Table, que pour une distance périhélie de 0,12376, la longitude du nœud moins le lieu du périhélie devroit être d'environ 220^{d}, pour que la Comete pût couper l'orbite de la Terre dans le nœud; je conclus donc que la longitude du nœud descendant moins le lieu du périhélie sur l'orbite, devroit être d'environ 9^{d} plus grande, pour que la Comete coupât véritablement l'orbite de la Terre. On pourroit également conclure que, pour que le phénomene eût lieu, il faudroit supposer une diminution d'environ 0,05000 dans la distance périhélie.

CHAPITRE SEPTIEME.

De quelques équations indépendantes de la force centrale, & qui ſuppoſent uniquement que les mouvemens des Cometes ou des Planetes ſe paſſent dans un même plan.

(547) IL eſt évident que pour calculer la route d'une Comete ou d'une Planete, il faut ſatisfaire à deux conditions principales; la premiere, que tous les points de ſa trajectoire quelle qu'elle ſoit, puiſſent tous appartenir à un ſeul & même plan dont il s'agit de déterminer la poſition; la ſeconde, que cette trajectoire ſoit une ſection conique. Cette diſtinction ſimple entre la nature des conditions qu'il s'agit de remplir, m'a paru établir un ordre naturel dans les diſcuſſions auxquelles je devois me livrer. J'ai donc partagé les équations en deux claſſes; les unes dépendantes uniquement de la poſition du plan; les autres, au contraire, dépendantes de la nature de la trajectoire. C'eſt d'après ce point de vue que j'ai claſſé mes recherches. Je vais m'occuper dans ce Chapitre, des équations de la premiere eſpece.

ARTICLE PREMIER.

Équations fondamentales relatives aux préſentes recherches.

(548) On ſe rappellera que j'ai démontré que ſi l'on nomme

r le rayon vecteur de la Terre;
R le rayon vecteur de la Planete ou de la Comete;
I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Planete ou de la Comete ſur l'Ecliptique;
Δ la diſtance de la Terre à la Planete ou à la Comete;
A la longitude du Soleil vue de la Terre;
a la longitude de la Terre vue du Soleil;
B la longitude géocentrique de la Planete ou de la Comete;
L la latitude géocentrique de la Planete ou de la Comete;
ζ la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Planete ou de la Comete;
u l'angle du rayon vecteur de la Comete ou de la Planete, avec la ligne des nœuds; cet angle eſt compté ſur le plan de l'orbite de la Comete ou de la Planete, en partant du nœud aſcendant, & en ſuivant le ſens du mouvement de l'Aſtre dans ſon orbite;

l'on a (§. 448 & 453) pour un inſtant quelconque, les équations ſuivantes,

$$(1)\quad R \sin u \sin I - \Delta \sin L = 0;$$

$$(2)\quad \Delta \cos L \sin(B-\zeta) + r \sin(A-\zeta) - R \sin u \cos I = 0;$$

$$(3)\quad \Delta \cos L \sin(B-\zeta) + r \sin(a-\zeta) - R \sin u \cos I = 0;$$

(4) $\text{Tang}\, I\,(\Delta \cos L \sin(B-\zeta) - r \sin(A-\zeta)) - \Delta \sin L = 0$;

(5) $\text{Tang}\, I\,(\Delta \cos L \sin(B-\zeta) + r \sin(a-\zeta)) - \Delta \sin L = 0$;

(6) $\Delta \cos L \cos(B-\zeta) - R \cos u - r \cos(A-\zeta) = 0$;

(7) $\Delta \cos L \cos(B-\zeta) - R \cos u + r \cos(a-\zeta) = 0$;

(8) $\text{Tang}\,(B-\zeta) = \dfrac{R \sin u \cos I + r \sin(A-\zeta)}{R \cos u + r \cos(A-\zeta)}$;

(9) $\text{Tang}\,(B-\zeta) = \dfrac{R \sin u \cos I - r \sin(a-\zeta)}{R \cos u - r \cos(a-\zeta)}$;

(10) $\text{Tang}\, L = \dfrac{R \sin u \sin I \sin(B-\zeta)}{R \sin u \cos I + r \sin(A-\zeta)}$;

(11) $\text{Tang}\, L = \dfrac{R \sin u \sin I \sin(B-\zeta)}{R \sin u \cos I - r \sin(a-\zeta)}$;

(12) $\Delta = \sqrt{(R^2 + r^2 + 2Rr(\cos u \cos(A-\zeta) + \sin u \cos I \sin(A-\zeta)))}$;

(13) $\Delta = \sqrt{(R^2 + r^2 - 2Rr(\cos u \cos(a-\zeta) + \sin u \cos I \sin(a-\zeta)))}$.

Ces équations ont lieu pour une observation quelconque, & elles sont indépendantes de la nature de la trajectoire.

ARTICLE II.

De quelques équations particulieres résultantes de la comparaison des observations prises deux à deux, trois à trois.

Dans les recherches qui vont suivre, je nommerai

r', R', Δ', A', a', B', L', u', les quantités qui appartiennent à la premiere observation;

r'', R'', Δ'', A'', a'', B'', L'', u'', les quantités qui appartiennent à la seconde observation;

r''', R''', Δ''', A''', a''', B''', L''', u''', les quantités qui appartiennent à la troisieme observation.

Détermination de la position du plan de l'orbite, au moyen de deux observations, en supposant d'ailleurs connues les distances de la Comete ou de la Planete à la Terre, à l'instant des deux observations.

(549) Si l'on considere trois observations, il est évident que pour chaque observation, l'on a des équations de la forme de l'équation (4) du §. précédent; l'on a donc, pour trois observations, les équations suivantes,

(1) $\text{Tang}\, I\,(\Delta' \cos L' \sin(B'-\zeta) - r' \sin(A'-\zeta)) - \Delta' \sin L' = 0$;

(2) $\text{Tang}\, I\,(\Delta'' \cos L'' \sin(B''-\zeta) - r'' \sin(A''-\zeta)) - \Delta'' \sin L'' = 0$;

(3) $\text{Tang}\, I\,(\Delta''' \cos L''' \sin(B'''-\zeta)) - r''' \sin(A'''-\zeta) - \Delta''' \sin L''' = 0$.

Ou, ce qui revient au même,

$$(4)\ \mathrm{Tang}\, I\,((\Delta'\cos L' \sin B' - r' \sin A')\cos\zeta - (\Delta' \cos L' \cos B' - r' \cos A')\sin\zeta) - \Delta' \sin L' = 0\,;$$

$$(5)\ \mathrm{Tang}\, I\,((\Delta''\cos L'' \sin B'' - r'' \sin A'')\cos\zeta - (\Delta'' \cos L'' \cos B'' - r'' \cos A'')\sin\zeta) - \Delta'' \sin L'' = 0\,;$$

$$(6)\ \mathrm{Tang}\, I\,((\Delta'''\cos L''' \sin B''' - r''' \sin A''')\cos\zeta - (\Delta''' \cos L''' \cos B''' - r''' \cos A''')\sin\zeta) - \Delta''' \sin L''' = 0.$$

Combinons maintenant ces équations deux à deux ; c'est-à-dire, la quatrieme avec la cinquieme, & cette même quatrieme avec la sixieme ; l'on aura

$$(7)\ \mathrm{Tang}\,\zeta = \frac{\Delta'' \sin L''(\Delta' \cos L' \sin B' - r' \sin A') - \Delta' \sin L'(\Delta'' \cos L'' \sin B'' - r'' \sin A'')}{\Delta'' \sin L''(\Delta' \cos L' \cos B' - r' \cos A') - \Delta' \sin L'(\Delta'' \cos L'' \cos B'' - r'' \cos A'')}\,;$$

$$(8)\ \mathrm{Tang}\,\zeta = \frac{\Delta''' \sin L'''(\Delta' \cos L' \sin B' - r' \sin A') - \Delta' \sin L'(\Delta''' \cos L''' \sin B''' - r''' \sin A''')}{\Delta''' \sin L'''(\Delta' \cos L' \cos B' - r' \cos A') - \Delta' \sin L'(\Delta''' \cos L''' \cos B''' - r''' \cos A''')}.$$

Au moyen des équations précédentes, si l'on connoît d'ailleurs les distances de la Comete ou de la Planete à la Terre, à l'instant de deux observations, l'on déterminera tout de suite la position du plan de son orbite, indépendament de la nature de la trajectoire. En effet, l'une des deux équations (7) ou (8) donnera la position du nœud ascendant ; & l'une des équations (1), (2), (3), donnera l'inclinaison du plan de l'orbite.

Remarque sur la valeur des angles conclus des équations précédentes.

(550) L'espece de l'angle ζ n'est point arbitraire, & cet angle est donné spécifiquement par les équations du §. 549. Il doit être employé tel qu'il est donné par l'analyse ; c'est-à-dire, qu'il est compris entre 0^d & 90^d, si le numérateur & le dénominateur de son expression sont tous deux positifs. Il est compris entre 90^d & 180^d, si le numérateur est positif & le dénominateur négatif ; il est compris entre 180^d & 270^d, si le numérateur & le dénominateur sont tous deux négatifs ; il est compris entre 270^d & 360^d, si le numérateur est négatif & le dénominateur est positif. Cette remarque s'applique généralement à tous les angles donnés par une tangente dont l'expression renferme un numérateur & un dénominateur.

Nous ferons cependant une exception à la regle précédente, relativement à l'inclinaison du plan de l'orbite. En effet, (§. 549 éq. (1), (2), & (3)) cette inclinaison étant déterminée par une équation de l'espece dont nous venons de parler, il s'ensuivroit d'après la regle précédente, que cette inclinaison pourroit avoir toutes les valeurs depuis 0^d jusqu'à 360^d, & la conséquence est exacte. Si cependant l'on fait attention qu'un plan qui fait, par exemple, avec un second plan, un angle de 200^d, n'est

que le prolongement du plan qui fait avec ce même second plan, un angle de 20^d, on pourra, pour se conformer aux usages des Astronomes, ne supposer à l'inclinaison du plan de l'orbite, que des valeurs plus petites que 180^d. Dans ce cas, si tang I est positive, l'inclinaison sera entre 0^d & 90^d, & la Comete sera directe. Si tang I est négative, l'inclinaison sera entre 90^d & 180^d, & la Comete sera rétrograde.

Remarque sur la généralité des solutions du §. 549.

(551) Il est évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ', Δ'', Δ''' qui rendent nulles les équations (7) & (8) du §. 549, puisque ces équations renferment chacune deux variables; & il faudroit avoir deux nouvelles équations pour parvenir à une solution déterminée. On peut donc demander, lorsqu'une fois ces équations sont satisfaites par des valeurs particulieres de Δ', Δ'', Δ''', quelle doit être la relation entre les petites variations de Δ', Δ'', Δ''', pour que les équations demeurent toujours satisfaites. Rien n'est plus simple que la solution de ce Problême. En effet, si l'on différencie les équations dont il s'agit, l'on aura

$$(1)\ (\Delta''\cos L'\sin L''\sin(B'-\zeta)-\Delta''\sin L'\cos L''\sin(B''-\zeta)+r''\sin L'\sin(A''-\zeta))\,d\Delta'$$
$$-(\Delta'\sin L'\cos L''\sin(B''-\zeta)-\Delta'\cos L'\sin L''\sin(B'-\zeta)+r'\sin L''\sin(A'-\zeta))\,d\Delta''=0.$$

$$(2)\ (\Delta'''\cos L'\sin L'''\sin(B'-\zeta)-\Delta'''\sin L'\cos L'''\sin(B'''-\zeta)+r'''\sin L'\sin(A'''-\zeta))\,d\Delta'$$
$$-(\Delta'\sin L'\cos L'''\sin(B'''-\zeta)-\Delta'\cos L'\sin L'''\sin(B'-\zeta)+r'\sin L'''\sin(A'-\zeta))\,d\Delta'''=0.$$

(552) Il n'est pas même nécessaire que les équations (7) & (8) du §. 549 soient rigoureusement satisfaites par la substitution des différentes valeurs de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'on puisse employer des équations de la forme précédente; on peut supposer de plus quelqu'erreur dans la position du nœud. En un mot, si l'on nomme

$d\zeta$ l'erreur sur la position du nœud exprimée en secondes de dégrés;

α ce que devient l'équation (7) du §. 549, par les substitutions des valeurs particulieres de Δ', Δ'', ζ;

α' ce que devient l'équation (8) du §. 549, par les substitutions des valeurs particulieres de Δ', Δ''', ζ;

l'on aura

$$(1)\ (\Delta''\cos L'\sin L''\sin(B'-\zeta)-\Delta''\sin L'\cos L''\sin(B''-\zeta)+r''\sin L'\sin(A''-\zeta))\,d\Delta'$$
$$-(\Delta'\sin L'\cos L''\sin(B''-\zeta)-\Delta'\cos L'\sin L''\sin(B'-\zeta)+r'\sin L''\sin(A'-\zeta))\,d\Delta''$$
$$+(\Delta''r'\sin L''\cos(A'-\zeta)+\Delta'r''\sin L'\cos(A''-\zeta)-\Delta'\Delta''(\cos L'\sin L''\cos(B'-\zeta)$$
$$-\cos L''\sin L'\cos(B''-\zeta)))\,\frac{d\zeta}{206265}-\alpha=0;$$

$$(2)\ (\Delta'''\cos L'\sin L'''\sin(B'-\zeta)-\Delta'''\sin L'\cos L'''\sin(B'''-\zeta)+r'''\sin L'\sin(A'''-\zeta))\,d\Delta'$$
$$-(\Delta'\sin L'\cos L'''\sin(B'''-\zeta)-\Delta'\cos L'\sin L'''\sin(B'-\zeta)+r'\sin L'''\sin(A'-\zeta))\,d\Delta'''$$
$$+(\Delta'''r'\sin L'''\cos(A'-\zeta)-\Delta'r'''\sin L'\cos(A'''-\zeta)-\Delta'\Delta'''(\cos L'\sin L'''\cos(B'-\zeta)$$
$$-\cos L'''\sin L'\cos(B'''-\zeta)))\,\frac{d\zeta}{206265}-\alpha'=0.$$

De

De la relation entre les diſtances de la Comete à la Terre, correſpondantes aux obſervations priſes trois à trois.

(553 Si l'on compare les valeurs de Tang ζ tirées des équations (7) & (8) du §. 549, l'on aura

$$
\begin{aligned}
(1)\ & \Delta' \sin L' (\Delta'' \Delta''' \cos L'' \cos L''' \sin (B'' - B''') - \Delta'' r''' \cos L'' \sin (B'' - A''') \\
& - \Delta''' r'' \cos L''' \sin (A'' - B''') + r'' r''' \sin (A'' - A''')) \\
& + \Delta'' \sin L'' (\Delta' \Delta''' \cos L' \cos L''' \sin (B''' - B') - \Delta' r''' \cos L' \sin (A''' - B') \\
& - \Delta''' r' \cos L''' \sin (B''' - A') + r' r''' \sin (A''' - A')) \\
& + \Delta''' \sin L''' (\Delta' \Delta'' \cos L' \cos L'' \sin (B' - B'') - \Delta' r'' \cos L' \sin (B' - A'') \\
& - \Delta'' r' \cos L'' \sin (A' - B'') + r' r'' \sin (A' - A'')) = 0.
\end{aligned}
$$

Si donc l'on ſuppoſe

$$
\begin{aligned}
C &= \sin L' \cos L'' \cos L''' \sin (B'' - B''') + \sin L'' \cos L' \cos L''' \sin (B''' - B') \\
&\quad + \sin L''' \cos L' \cos L'' \sin (B' - B'');\\
D' &= r''' (\sin L' \cos L'' \sin (B'' - A''') + \sin L'' \cos L' \sin (A''' - B'));\\
E' &= r'' (\sin L' \cos L''' \sin (A'' - B''') + \sin L''' \cos L' \sin (B' - A''));\\
F &= r' (\sin L'' \cos L''' \sin (B''' - A') + \sin L''' \cos L'' \sin (A' - B''));\\
G &= r'' r''' \sin L' \sin (A'' - A''');\\
H &= r' r''' \sin L'' \sin (A''' - A');\\
K &= r' r'' \sin L''' \sin (A' - A'');
\end{aligned}
$$

l'on aura

$$(2)\ C\Delta'\Delta''\Delta''' - D'\Delta'\Delta'' - E'\Delta'\Delta''' - F\Delta''\Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0.$$

Remarque ſur la forme de l'équation précédente.

(554) Il réſulte de l'équation précédente, que l'équation qui réſout le problême des Cometes, pourroit ſe rabaiſſer au ſecond dégré, ſi l'on connoiſſoit d'ailleurs, d'après la théorie des forces centrales, les rapports entre les diſtances de la Comete à la Terre, aux inſtans des obſervations, & que ces rapports fuſſent de nombre à nombre. En effet, on auroit alors des équations de la forme ſuivante,

$$(1)\ \Delta''' - Q\Delta' = 0; \qquad (2)\ \Delta'' - Q'\Delta' = 0;$$

Q & Q' étant des quantités connues; & l'équation (2) du §. 553 deviendroit

$$(3)\ QQ'C\Delta'^2 - (Q'D' + QE' + QQ'F)\Delta' + G + Q'H + QK = 0.$$

De l'uſage de l'équation (2) du §. 553.

(555) L'équation (2) du §. 553 eſt une des plus importantes de cette théorie, & l'on ne doit employer dans le calcul, aucunes diſtances de la Comete ou de la Planete à la Terre, qui ne ſatisferoient pas à cette équation. En effet, une des conditions à remplir eſt que la Comete ou la Planete ſe meuve dans un même plan; or cette condition

n'auroit pas lieu, si les distances ne rendoient pas nulle l'équation dont il s'agit. Comme cette équation est rigoureuse, qu'elle s'applique à toutes les distances, & qu'elle est indépendante de la nature de la trajectoire, il faut constater avant tout, si les distances que l'on emploie, donnent un plan unique pour le plan de l'orbite.

Un second usage non moins utile de l'équation précédente, est la facilité de connoître la distance intermédiaire Δ'', lorsque l'on connoît les distances extrêmes Δ', Δ'''. Les Astronomes qui ont calculé des orbites cométaires, savent combien en général il est utile d'avoir exactement cette seconde distance intermédiaire; or il est évident qu'elle se déduit avec la plus grande facilité de l'équation (2) du §. 553. En effet on tire de cette équation

$$(1)\quad \Delta''=\frac{E'\Delta'\Delta'''-G\Delta'-K\Delta'''}{C\Delta'\Delta'''-D'\Delta'-F\Delta'''+H}.$$

(556) Il est sensible qu'il y a un nombre infini de valeurs de $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ qui rendent nulle l'équation (2) du §. 553; puisque cette équation renfermant trois variables, il faudroit avoir deux nouvelles équations pour parvenir à une équation déterminée. On peut même pousser ses recherches plus loin, & lorsque l'équation (2) du §. 553 est satisfaite, on peut demander quelle doit être la relation entre les variations de $\Delta', \Delta'', \Delta'''$, pour que l'équation demeure toujours satisfaite. Rien n'est plus simple que la solution de ce problême; en effet, si l'on différencie l'equation (2) du §. 553, l'on aura, en entendant par,

α ce que devient l'équation (2) du §. 553 par les substitutions des valeurs particulieres de $\Delta', \Delta'', \Delta'''$;

$$\begin{aligned}(1)\quad &(C\Delta''\Delta'''-E'\Delta'''-D'\Delta''+G)\,d\Delta'\\ &+(C\Delta'\Delta'''-F\Delta'''-D'\Delta'+H)\,d\Delta''\\ &+(C\Delta'\Delta''-E'\Delta'-F\Delta''+K)\,d\Delta'''-\alpha=0.\end{aligned}$$

Remarque sur l'équation (3) *du* §. 554.

(557) Nous avons vu (§. 554) que si l'on connoissoit les rapports des distances de la Comete ou de la Planete à la Terre, lors de trois observations, l'on pourroit déterminer l'une quelconque de ces distances, par une équation du second degré; & nous avons donné cette équation. On peut être curieux maintenant de voir combien les erreurs sur les rapports des distances, peuvent faire varier les résultats.

Pour y parvenir, je différencie l'équation (3) du §. 554, & j'ai, en conservant les définitions des paragraphes précédens,

$$\begin{aligned}(1)\quad &(2QQ'C\Delta'-Q'D'-QE'-QQ'F)\,d\Delta'\\ &+(Q'C\Delta'^2-E'\Delta'-Q'F\Delta'+K)\,dQ+(QC\Delta'^2-D'\Delta'-QF\Delta'+H)\,dQ'=0.\end{aligned}$$

L'on a donc la relation entre les variations des rapports des distances, & la variation de la distance conclue par l'équation (3) du §. 554.

Remarque sur les équations (7) & (8) du §. 549.

(558) Si, par exemple, dans l'équation (8) du §. 549, l'on substitue à Δ''', sa valeur $Q\Delta'$, elle deviendra

(1) $Q\Delta'(\cos L' \sin L''' \sin(B'-\zeta) - \cos L''' \sin L' \sin(B'''-\zeta)) - Qr' \sin L''' \sin(A'-\zeta) + r''' \sin L' \sin(A'''-\zeta) = 0.$

On voit donc que si l'on connoissoit d'avance la position du nœud, & le rapport des distances de la Comete à la Terre correspondantes à deux observations, l'on connoîtroit la distance de la Comete à la Terre, par une simple équation du premier dégré, & abstraction faite de la nature de la trajectoire.

(559) Si l'on différencie cette derniere équation, & que l'on nomme
α ce qu'elle devient par les substitutions des valeurs hypothétiques de Δ', ζ, Q;
$d\zeta$ l'erreur sur la position du nœud, exprimée en secondes de dégré;
$d\Delta'$ l'erreur sur la valeur de Δ';
dQ l'erreur sur le rapport des deux distances Δ', Δ''' de la Comete à la Terre;
l'on aura

(2) $Q(\sin L''' \cos L' \sin(B'-\zeta) - \sin L' \cos L''' \sin(B'''-\zeta))\, d\Delta'$
$+ (\Delta'(\sin L''' \cos L' \sin(B'-\zeta) - \sin L' \cos L''' \sin(B'''-\zeta)) - r' \sin L''' \sin(A'-\zeta))\, dQ$
$- (Q\Delta'(\sin L''' \cos L' \cos(B'-\zeta) - \cos L''' \sin L' \cos(B'''-\zeta)) - Qr' \sin L''' \cos(A'-\zeta)$
$+ r''' \sin L' \cos(A'''-\zeta))\, \frac{d\zeta}{206265} - \alpha = 0.$

Ces équations trouveront leur application dans la suite. J'ai cru ne pouvoir trop les multiplier, attendu leur usage pour faciliter la détermination de la position du plan des orbites.

Détermination des rayons vecteurs R', R'', R''', R'''', &c. correspondans aux distances $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, &c. de la Comete à la Terre.

(560) Lorsque l'on connoît les distances $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, &c. de la Comete à la Terre, il est facile de déterminer les rayons vecteurs correspondans. Soit en effet,

R' le rayon vecteur de la Comete correspondant à la distance Δ';
R'' le rayon vecteur de la Comete correspondant à la distance Δ'';
R''' le rayon vecteur de la Comete correspondant à la distance Δ''';
R'''' le rayon vecteur de la Comete correspondant à la distance Δ'''';

& conservons les définitions précédentes de r', r'', r''', r'''', &c.

Puisque (§. 548) équations (2), (6), (12), l'on a généralement pour une observation quelconque,

(1) $\Delta \cos L \sin(B-\zeta) - r \sin(A-\zeta) - R \sin u \cos I = 0;$

(2) $\Delta \cos L \cos(B-\zeta) - R \cos u - r \cos(A-\zeta) = 0;$

(3) $\Delta^2 - R^2 - r^2 - 2rR \cos u \cos(A-\zeta) - 2rR \sin u \cos I \sin(A-\zeta) = 0;$

Si dans cette derniere équation l'on élimine R cos u, & R sin u cos I, au moyen des équations (1) & (2), l'on aura

$$(4)\ R^2 - \Delta^2 - r^2 + 2r\Delta \cos L \cos(B - A) = 0.$$

Cette expression du rayon vecteur a cela de particulier qu'elle ne renferme que la seule inconnue Δ.

(561) Il suit de cette derniere équation, que l'on a

$$(1)\ R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2r'\Delta' \cos L' \cos(B' - A'))};$$

$$(2)\ R'' = \sqrt{(r''^2 + \Delta''^2 - 2r''\Delta'' \cos L'' \cos(B'' - A''))};$$

$$(3)\ R''' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2r'''\Delta''' \cos L''' \cos(B''' - A'''))};$$

$$(4)\ R'''' = \sqrt{(r''''^2 + \Delta''''^2 - 2r''''\Delta'''' \cos L'''' \cos(B'''' - A''''))}.$$

Maintenant, si l'on différencie ces équations, l'on aura

$$(5)\ R'dR' - (\Delta' - r' \cos L' \cos(B' - A'))\,d\Delta' = 0;$$

$$(6)\ R''dR'' - (\Delta'' - r'' \cos L'' \cos(B'' - A''))\,d\Delta'' = 0;$$

$$(7)\ R'''dR''' - (\Delta''' - r''' \cos L''' \cos(B''' - A'''))\,d\Delta''' = 0;$$

$$(8)\ R''''dR'''' - (\Delta'''' - r'''' \cos L'''' \cos(B'''' - A''''))\,d\Delta'''' = 0.$$

Relation entre l'angle compris sur le plan de la trajectoire entre deux rayons vecteurs extrêmes R', R''', & la corde correspondante.

(562) Si l'on nomme

N l'angle compris sur le plan de la trajectoire entre les rayons vecteurs R', R''';
c la corde qui joint les deux points de la trajectoire;

il suit de l'équation (1) du §. 459, que l'on a généralement,

$$(1)\ R'^2 + R'''^2 - 2R'R''' \cos N - c^2 = 0.$$

Mais puisqu'en général $\cos N = \cos(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N) = \cos^2\frac{1}{2}N - \sin^2\frac{1}{2}N = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}N$, l'équation (1) peut être mise sous la forme suivante,

$$(2)\ R'^2 + R'''^2 - 2R'R''' + 4R'R''' \sin^2\tfrac{1}{2}N - c^2 = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3)\ (R' - R''')^2 - c^2 + 4R'R''' \sin^2\tfrac{1}{2}N = 0.$$

ARTICLE III.

De quelques nouvelles équations dont on peut faire usage dans la détermination des trajectoires des Cometes & des Planetes.

La détermination des trajectoires des Cometes étant un problême difficile & intéressant, dont la solution peut être modifiée par mille circonstances particulieres, on ne peut trop multiplier les équations relatives à cette question, pour y avoir recours suivant les circonstances. Voici donc quelques nouvelles recherches dont on pourra faire usage dans la détermination de ces trajectoires.

D'une propriété des trois coordonnées perpendiculaires correspondantes aux différens points des trajectoires des Planetes ou des Cometes.

(563) Si l'on détermine les différens points des trajectoires des Planetes ou des Cometes, par trois coordonnées perpendiculaires entr'elles partant du Soleil ; dont l'une x, soit prise sur la ligne passant par le premier point d'Ariès ; la seconde y, soit prise sur la perpendiculaire à la ligne précédente ; & la troisieme z, soit perpendiculaire à l'Ecliptique ; ces coordonnées seront telles que l'expression de chacune d'elles ne renfermera que la seule inconnue Δ.

Pour démontrer cette proposition soit ♈ ♋ ♎ ♑ l'Ecliptique rapportée à la sphere des fixes ; S le Soleil ; E e T l'orbite de la Terre ; T le lieu de la Terre dans son orbite ; E e le diametre de l'orbite terrestre passant par le premier point d'Ariès ; Tt' une parallele indéfinie à la ligne Ee ; C le lieu de la Comete dans l'espace ; C' la projection de la Comete sur le plan de l'Ecliptique ; CC' la distance perpendiculaire de la Comete au plan de l'Ecliptique ; T C la distance de la Terre à la Comete. Fig. 10.

De la projection C' de la Comete, abaissons sur la ligne E S e, la droite C'P ; du point T abaissons sur la même ligne, la droite Tp. Nommons

x la distance S P du Soleil au point P ;
y la distance P C' du point P à la projection C' de la Comete ;
z la distance C C' de la Comete au plan de l'Ecliptique ;
Δ la distance T C de la Terre à la Comete ;
A la longitude du Soleil vue de la Terre ;
r la distance T S de la Terre au Soleil ;
B la longitude géocentrique de la Comete ;
L latitude géocentrique de la Comete ;

Dans le triangle STp l'on a $ST:Sp::1:\cos TSp$; mais $ST=r$, & l'angle $TSp=A$; donc $Sp=r\cos A$. Par une raison semblable, $Tp=r\sin A$.

Dans le triangle TCC' rectangle en C', on a $TC:TC'::1:\cos CTC'$; $TC:CC'::1:\sin CTC'$; mais $TC=\Delta$; angle $CTC'=L$; donc $TC'=\Delta\cos L$, $CC'=\Delta\sin L$.

Dans le triangle Tt'C', on a $TC':C't'::1:\sin C'Tt'$; $TC':Tt'::1:\cos C'Tt'$. Mais $TC'=\Delta\cos L$; $C't'=Tp+PC'=r\sin A+y$; $Tt'=SP+Sp=r\cos A+x$; angle $C'Tt'=B$; donc $r\sin A+y=\Delta\cos L\sin B$; $r\cos A+x=\Delta\cos L\cos B$; d'ailleurs $z=CC'=\Delta\sin L$; donc

(1) $x+r\cos A-\Delta\cos L\cos B=0$;
(2) $y+r\sin A-\Delta\cos L\sin B=0$;
(3) $z-\Delta\sin L=0$.

D'où l'on voit que les expressions des trois coordonnées x, y, z, ne renferment que la seule inconnue Δ, ainsi que nous l'avons dit.

(564) Si l'on cherche maintenant l'expression de la distance S C de la Comete au Soleil, & que l'on nomme

R la distance de la Comete au Soleil ;

on aura évidemment $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$; donc

$$(1)\quad R^2 - r^2 - \Delta^2 + 2\Delta r \operatorname{cof} L \operatorname{cof}(B - A) = 0.$$

Nous sommes déja parvenus (§. 560) à cette expression, par une analyse différente.

Expression de la Corde comprise entre les rayons vecteurs R′, R‴.

(565) Considérons maintenant deux observations, & nommons x', y', z', Δ', r', R', A', B', L', les quantités qui appartiennent à la premiere observation ; x''', y''', z''', Δ''', r''', R''', A''', B''', L''', les quantités qui appartiennent à la seconde. On aura pour chacune des observations, des équations semblables à celles que nous venons de démontrer. De plus, si l'on nomme

c la corde comprise entre les rayons vecteurs R', R''' ;

on aura

$$c^2 = (x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'''x' - 2y'''y' - 2z'''z'.$$

Mais $x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = R'''^2$; $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2$; $x''' = \Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof} B''' - r''' \operatorname{cof} A'''$; $y''' = \Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{fin} B''' - r''' \operatorname{fin} A'''$; $z''' = \Delta''' \operatorname{fin} L'''$; $x' = \Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} B' - r' \operatorname{cof} A'$; $y' = \Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{fin} B' - r \operatorname{fin} A'$; $z' = \Delta' \operatorname{fin} L'$; donc

$$(1)\quad c^2 = R'^2 + R'''^2 - 2(\Delta'\Delta''' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - B') - r'\Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A') - r'''\Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A''') + \Delta'\Delta''' \operatorname{fin} L' \operatorname{fin} L''' + r'r''' \operatorname{cof}(A''' - A'))\,;$$

bien entendu que l'on a d'ailleurs

$$(2)\quad R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A'))}\,;$$

$$(3)\quad R''' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta''' r''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A'''))}.$$

Et la question est résolue.

Nous remarquerons que cette expression de la corde ne renferme que deux inconnues Δ', Δ''' ; & que même elle ne dépend que d'une seule inconnue, si l'on suppose qu'il existe entre Δ' & Δ''' des équations de la forme de celles du §. 554.

Détermination de l'angle compris sur le plan de la trajectoire, entre les deux rayons vecteurs R′, R‴.

(566) Si l'on compare l'expression de c^2 que l'on tire de l'équation précédente, avec celle que l'on conclut de l'équation (3) du §. 562, l'on aura

$$(1)\quad 2R'R''' \operatorname{fin}^2 \tfrac{1}{2}N - R'R''' + (\Delta'\Delta''' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - B') - r'\Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A') - r'''\Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A''') + \Delta'\Delta''' \operatorname{fin} L' \operatorname{fin} L''' + r'r''' \operatorname{cof}(A''' - A')) = 0.$$

Cette expression de l'angle compris sur le plan de la trajectoire entre les rayons vecteurs R', R''', ne renferme que deux inconnues Δ', Δ''' ; & même elle ne dépend que d'une seule inconnue, si l'on suppose qu'il existe entre Δ' & Δ''' des équations de la forme de celles du §. 554.

Détermination de la longitude & de la latitude héliocentriques de la Comete ; & du sens du mouvement de cet Astre dans son orbite.

(567) Il est évident, d'après les constructions précédentes, que l'on a

$$\text{Tang. (longitude héliocentrique de la Comete)} = \frac{y}{x}.$$

Si dans cette équation l'on substitue à x & à y, leurs valeurs tirées des équations (1) & (2) du §. 563, l'on aura

$$(1)\ \text{Tang (longit. héliocent. de la Comete)} = \frac{\Delta \operatorname{cof} L \operatorname{fin} B - r \operatorname{fin} A}{\Delta \operatorname{cof} L \operatorname{cof} B - r \operatorname{cof} A}.$$

Cette équation a lieu pour toutes les observations. Si donc l'on a deux observations consécutives de la Comete, & que l'on désigne par Δ', L', B', r', A', les quantités qui appartiennent à la premiere observation ; par Δ''', L''', B''', r''', A''', les quantités qui appartiennent à la seconde observation ; l'on aura

$$(2)\ \text{Tang (longitude héliocentrique de la Comete lors de la premiere observation)} = \frac{\Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{fin} B' - r' \operatorname{fin} A'}{\Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} B' - r' \operatorname{cof} A'};$$

$$(3)\ \text{Tang (longitude héliocentrique de la Comete lors de la seconde observation)} = \frac{\Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{fin} B''' - r''' \operatorname{fin} A'''}{\Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof} B''' - r''' \operatorname{cof} A'''};$$

Il ne s'agit que de vérifier si la derniere équation donne une longitude plus grande ou plus petite que la précédente. Dans le premier cas, la Comete est directe ; dans le second cas elle est rétrograde.

(568) Quant à la latitude héliocentrique de la Comete, il est évident que si l'on considere les triangles SCC', TCC' rectangles en C', on a Fig. 16.
$SC:CC'::1:$ sin latitude héliocentrique ; $TC:CC'::1:$ sin latitude géocentrique ; donc SC sin latitude héliocentrique $= TC$ sin latitude géocentrique ; mais $SC = R$; $TC = \Delta$; sin latitude géocentrique $= L$; donc

$$(1)\ R \text{ fin latitude héliocentrique} - \Delta \operatorname{fin} L = 0.$$

Détermination de la longitude du nœud ascendant de la Comete sur l'Ecliptique.

(569) Nous avons déja donné une méthode pour déterminer la longitude du nœud ascendant de la Comete sur l'Ecliptique ; voici une seconde solution du même problême.

Nous avons vu (§. 548 éq. (4)) que l'on a l'équation suivante,

$$(1)\ \operatorname{Tang} I\,(\Delta \operatorname{cof} L \operatorname{fin}(B - \zeta) - r \operatorname{fin}(A - \zeta)) - \Delta \operatorname{fin} L = 0.$$

Cette équation peut être mise sous la forme suivante,

$$(2)\ \Delta \operatorname{fin} L \operatorname{cotang} I + (r \operatorname{fin} A - \Delta \operatorname{cof} L \operatorname{fin} B) \operatorname{cof} \zeta$$
$$- (r \operatorname{cof} A - \Delta \operatorname{cof} L \operatorname{cof} B) \operatorname{fin} \zeta = 0.$$

Soit

M la longitude héliocentrique de la Planete ;

Il suit du (§. 567) que l'on a

$$(3)\ \text{Tang } M = \frac{\Delta \cos L \sin B - r \sin A}{\Delta \cos L \cos B - r \cos A}.$$

Dans l'équation (2), à $r \cos A - \Delta \cos L \cos B$, substituons sa valeur tirée de l'équation précédente, elle deviendra

$$(4)\ \sin(\zeta - M) = \frac{\Delta \sin L \sin M \text{ cotang. } I}{r \sin A - \Delta \cos L \sin B}.$$

Détermination de l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique, au moyen de deux observations.

(570) Si l'on conservé les définitions de R, Δ, *u*, L, I, du §. 548, que l'on nomme R', Δ', *u'*, L', I, les quantités relatives à la premiere observation ; R''', Δ''', *u'''*, L''', I ; les quantités relatives à la seconde observation, il est évident que l'on aura (§. 548) deux équations de la forme suivante

$$(1)\ R' \sin u' \sin I - \Delta' \sin L' = 0\,;$$

$$(2)\ R''' \sin u''' \sin I - \Delta''' \sin L''' = 0.$$

De ces équations l'on tire,

$$(3)\ \Delta' R''' \sin L' \sin u''' - \Delta''' R' \sin L''' \sin u' = 0.$$

Soit maintenant

N l'angle compris sur le plan de la trajectoire entre les rayons vecteurs R', R''' ;

Il est clair que l'on aura

$$(4)\ u''' = u' + N.$$

Donc

$$(5)\ \Delta' R''' \sin L' \sin(u' + N) - \Delta''' R' \sin L''' \sin u' = 0.$$

Mais $\sin(u' + N) = \sin u' \cos N + \cos u' \sin N$; donc

$$(6)\ \text{Tang } u' = \frac{R''' \Delta' \sin L' \sin N}{R' \Delta''' \sin L''' - R''' \Delta' \sin L' \cos N}.$$

L'on déterminera ensuite l'inclinaison de l'orbite, au moyen d'une des deux équations (1) ou (2).

Nous remarquerons que cette expression de l'inclinaison de l'orbite ne dépend que des deux inconnues Δ', Δ''', puisque l'angle N ne dépend que de ces inconnues.

Nous avons multiplié dans ce Chapitre, les relations entre les différentes quantités que l'on a coutume de considérer dans la détermination des orbites des Planetes & des Cometes, afin de faciliter la solution du Problême dans un très-grand nombre de cas qui peuvent se présenter.

CHAPITRE

CHAPITRE HUITIEME.

Examen de la légitimité de quelques équations tirées de la théorie des forces centrales dont nous ferons uſage dans la ſuite.

(571) Les équations que nous avons conſidérées dans le Chapitre précédent ſont toutes rigoureuſes & indépendantes de la théorie des forces centrales. Elles ſuppoſent uniquement que les mouvemens de la Planete ou de la Comete dont on veut déterminer l'orbite, ſe paſſent dans un même plan. Je me propoſe, dans ce Chapitre, d'examiner la légitimité de quelques autres équations tirées de la théorie des forces centrales, dont je ferai uſage dans la ſuite. Comme ces équations ſont les ſeules qui dans leurs démonſtrations admettent des approximations; que d'ailleurs la méthode pour déterminer les orbites des Cometes eſt fondée ſur la légitimité de ces équations, cette diſcuſſion mérite l'attention du Lecteur.

Article premier.

Queſtions préliminaires à l'examen des équations de la forme de celles du §. 554.

(572) Nous avons dit dans le §. 554, que ſi l'on nomme

Δ', Δ'', Δ''', les diſtances de la Comete à la Terre, correſpondantes à trois obſervations;

l'on a des équations de la forme ſuivante,

$$(1)\ \Delta''' - Q\Delta' = 0; \quad (2)\ \Delta'' - Q'\Delta' = 0; \quad (3)\ \Delta''' - Q''\Delta'' = 0;$$

Q, Q', Q''' étant d'ailleurs des quantités connues. Nous nous propoſons d'examiner la légitimité de cette aſſertion; mais il faut établir auparavant quelques propoſitions préliminaires.

Dans les recherches ſuivantes nous nommerons

t le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la ſeconde obſervation;
t' le nombre de minutes de tems écoulées entre la ſeconde & la troiſieme obſervation;
t'' le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la troiſieme obſervation.

De la relation entre les coordonnées de la trajectoire de la Comete priſes ſur le plan de l'orbite de la Comete, & les coordonnées à cette même trajectoire, priſes ſur le plan de l'Ecliptique & ſur un plan perpendiculaire à l'Ecliptique.

(573) Soit

I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comete ſur l'Ecliptique;
ζ la longitude du nœud aſcendant de la Comete;

Ω l'angle de la ligne des abſciſſes de la trajectoire de la Comete, avec la ligne des nœuds; cette ligne peut être priſe arbitrairement ſur le plan de l'orbite de la Comete;

X l'abſciſſe, Y l'ordonnée { à la trajectoire de la Comete, priſes ſur le plan de l'orbite; ces coordonnées ſont ſuppoſées perpendiculaires entr'elles, & les X ont leur origine au centre du Soleil;

x, y, z les coordonnées perpendiculaires à la trajectoire de la Comete. Ces coordonnées ſont priſes, ſavoir, les x & les y ſur le plan de l'Ecliptique, & les z ſur un plan perpendiculaire à l'Ecliptique; l'origine des x eſt au centre du Soleil, & elles ſont priſes ſur la ligne paſſant par le premier point d'Ariès.

Soit S le Soleil; ♈♋♎♑ le plan de l'Ecliptique; ♈ES♎ la ligne paſſant par le premier point d'Ariès; nSNMn la ligne des nœuds de la Comete, qui fait avec la ligne ♈SE♎ l'angle ζ; C le lieu de la Comete dans ſon orbite; C′ la projection de la Comete ſur l'Ecliptique; SδD la ligne des abſciſſes de l'orbite de la Comete priſe ſur le plan de l'orbite; cette ligne fait avec la ligne nSNMn l'angle Ω. Abaiſſons de la Comete, la perpendiculaire CM ſur la ligne des nœuds; abaiſſons pareillement la perpendiculaire CD ſur la ligne SδD, & cherchons l'équation à l'orbite de la Comete, par rapport à l'abſciſſe SM priſe ſur la ligne des nœuds, & à l'ordonnée perpendiculaire MC. Soit

Fig. 18.

δ le point où l'ordonnée MC rencontre la ligne des abſciſſes SD.

On voit d'abord, que les triangles δSM, δCD, ſont ſemblables; puiſque ces triangles ont les angles en δ oppoſés au ſommet, & que d'ailleurs ils ſont rectangles en D & en M. L'angle DCδ eſt donc égal à l'angle δSM, c'eſt-à-dire, à l'angle Ω; & chacun des angles CδD, SδM eſt le complément de Ω; donc $SM = S\delta \cos\Omega$; mais $S\delta = SD - \delta D$; & $\delta D = DC \tang\Omega$; de plus $SD = X$, & $DC = Y$; donc $S\delta = X - Y \tang\Omega$; donc

$$SM = S\delta \cos\Omega = X\cos\Omega - Y\sin\Omega.$$

De même, à cauſe de $MC = M\delta + \delta C$; que d'ailleurs $M\delta = SM \tang\Omega$, & que $\delta C = \frac{DC}{\cos\Omega}$; on a

$$MC = X\sin\Omega + Y\cos\Omega.$$

Si du lieu C de la Comete, l'on abaiſſe la perpendiculaire CC′ ſur le plan de l'Ecliptique, & que de la projection C′ de la Comete, l'on abaiſſe la perpendiculaire C′M ſur la ligne des nœuds; dans le triangle CMC′ rectangle en C′, on a $CC' = MC\sin I$; on a de plus $MC' = MC \cos I$; d'ailleurs $CC' = z$; donc

$$z = X\sin\Omega\sin I + Y\cos\Omega\sin I;$$

$$MC' = X\sin\Omega\cos I + Y\cos\Omega\cos I.$$

Du point C′ abaiſſons maintenant ſur la ligne qui paſſe par le premier point d'Ariès, la perpendiculaire C′E qui coupe la ligne des nœuds au point N; & conſidérons les triangles ſemblables SEN, NC′M, rectangles en E & en M, & dont les angles ESN, MC′N ſont chacun égaux

à l'angle que nous avons nommé ζ; on aura, par une analyfe femblable à la précédente,

$$x = SM\cos\zeta - MC'\sin\zeta;\ y = SM\sin\zeta + MC'\cos\zeta.$$ Fig. 18.

Subftituant dans ces équations, à SM & à MC', leurs valeurs, on aura

$$x = X(\cos\Omega\cos\zeta - \sin\Omega\cos I\sin\zeta) - Y(\sin\Omega\cos\zeta + \cos\Omega\cos I\sin\zeta),$$
$$y = X(\cos\Omega\sin\zeta + \sin\Omega\cos I\cos\zeta) - Y(\sin\Omega\sin\zeta - \cos\Omega\cos I\cos\zeta),$$
$$z = X\sin\Omega\sin I + Y\cos\Omega\sin I.$$

Si donc l'on fuppofe

$$a = \cos\Omega\cos\zeta - \sin\Omega\cos I\sin\zeta;\ b = -\sin\Omega\cos\zeta - \cos\Omega\cos I\sin\zeta;$$
$$c = \cos\Omega\sin\zeta + \sin\Omega\cos I\cos\zeta;\ e = -\sin\Omega\sin\zeta + \cos\Omega\cos I\cos\zeta;$$
$$f = \sin\Omega\sin I;\ g = \cos\Omega\sin I;$$

l'on aura

$$(1)\ x = aX + bY;\quad (2)\ y = cX + eY;\quad (3)\ z = fX + gY.$$

(574) Il fuit de ces recherches, que pour trois obfervations fucceffives, on aura les neuf équations fuivantes,

$$(1)\ x' = aX' + bY';\quad (2)\ y' = cX' + eY';\quad (3)\ z' = fX' + gY';$$
$$(4)\ x'' = aX'' + bY'';\quad (5)\ y'' = cX'' + eY'';\quad (6)\ z'' = fX'' + gY'';$$
$$(7)\ x''' = aX''' + bY''';\quad (8)\ y''' = cX''' + eY''';\quad (9)\ z''' = fX''' + gY'''.$$

Des relations entre les trois diftances fucceffives de la Comete à la Terre, et les coordonnées à la trajectoire de la Comete prifes fur le plan de l'orbite.

(575) Il faut déterminer maintenant les relations entre les trois diftances fucceffives de la Comete à la Terre, & les coordonnées à la trajectoire de la Comete fur le plan de l'orbite, correfpondantes à ces trois diftances.

Pour déterminer ces relations, éliminons a, b, c, e, f, g, au moyen des équations du §. précédent, on parviendra aux réfultats fuivans.

$$(1)\ (X'''Y'' - X''Y''')x' - (X'''Y' - X'Y''')x'' + (X''Y' - X'Y'')x''' = 0.$$
$$(2)\ (X'''Y'' - X''Y''')y' - (X'''Y' - X'Y''')y'' + (X''Y' - X'Y'')y''' = 0.$$
$$(3)\ (X'''Y'' - X''Y''')z' - (X'''Y' - X'Y''')z'' + (X''Y' - X'Y'')z''' = 0.$$

Maintenant, à caufe des équations (1), (2), (3) du §. 563, l'on a

$$x' = \Delta'\cos L'\cos B' - r'\cos A';\ y' = \Delta'\cos L'\sin B' - r'\sin A';\ z' = \Delta'\sin L';$$
$$x'' = \Delta''\cos L''\cos B'' - r''\cos A'';\ y'' = \Delta''\cos L''\sin B'' - r''\sin A'';\ z'' = \Delta''\sin L'';$$
$$x''' = \Delta'''\cos L'''\cos B''' - r'''\cos A''';\ y''' = \Delta'''\cos L'''\sin B''' - r'''\sin A''';\ z''' = \Delta'''\sin L'''.$$

Subftituant ces valeurs dans les équations (1), (2), (3) du préfent paragraphe, elles deviendront

$$(4)\ (X'''Y'' - X''Y''')r'\cos A' - (X'''Y' - X'Y''')r''\cos A''$$
$$+ (X''Y' - X'Y'')r'''\cos A''' - (X'''Y'' - X''Y''')\Delta'\cos B'\cos L'$$
$$+ (X'''Y' - X'Y''')\Delta''\cos B''\cos L'' - (X''Y' - X'Y'')\Delta'''\cos B'''\cos L''' = 0;$$

(5) $(X'''Y''-X''Y''')\,r'\sin A'-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\sin A''$
$+(X''Y'-X'Y'')\,r'''\sin A'''-(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'\sin B'\cos L'$
$+(X'''Y'-X'Y''')\Delta''\sin B''\cos L''-(X''Y'-X'Y'')\Delta'''\sin B'''\cos L'''=0.$

(6) $(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'\sin L'-(X'''Y'-X'Y''')\,\Delta''\sin L''$
$+(X''Y'-X'Y'')\,\Delta'''\sin L'''=0.$

Il feroit très-aifé de démontrer que les quantités $X'''Y''-X''Y'''$; $X'''Y'-X'Y'''$, $X''Y'-X'Y''$ font refpectivement proportionnelles aux aires rectilignes de la trajectoire de la Comete comprifes entre les rayons vecteurs R''', R''; R''', R'; R'', R'; & les cordes correfpondantes.

(576) Si l'on multiplie l'équation (4) du paragraphe 575 par le facteur $(X'''Y''-X''Y''')r'\sin A'-(X'''Y'-X'Y''')r''\sin A''+(X''Y'-X'Y'')r'''\sin A'''$; que l'on multiplie pareillement l'équation (5) du même paragraphe, par le facteur $(X'''Y''-X''Y''')\,r'\cos A'-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\cos A''$ $+(X''Y'-X'Y'')\,r'''\cos A'''$, & que l'on fouftraie ces deux produits l'un de l'autre; que l'on fuppofe d'ailleurs

$\text{r}'=(X'''Y''-X''Y''')\,r'\sin(B'-A')-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\sin(B'-A'')$
$+(X''Y'-X'Y'')\,r'''\sin(B'-A''')$;

$\text{r}''=(X'''Y''-X''Y''')\,r'\sin(B''-A')-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\sin(B''-A'')$
$+(X''Y'-X'Y'')\,r'''\sin(B''-A''')$;

$\text{r}'''=(X'''Y''-X''Y''')\,r'\sin(B'''-A')-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\sin(B'''-A'')$
$+(X''Y'-X'Y'')\,r'''\sin(B'''-A''')$;

l'on aura

(1) $(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'\text{r}'\cos L'-(X'''Y'-X'Y''')\,\Delta''\,\text{r}''\cos L''$
$+(X''Y'-X'Y'')\,\Delta'''\,\text{r}'''\cos L'''=0.$

(577) Si dans l'équation (1) du §. 576, l'on élimine fucceffivement Δ', Δ'', Δ''', au moyen de l'équation (6) du §. 575, l'on aura

(1) $(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'(\text{r}'''\sin L'\cos L'''-\text{r}'\sin L'''\cos L')$
$-(X'''Y'-X'Y''')\,\Delta''(\text{r}'''\sin L''\cos L'''-\text{r}''\sin L'''\cos L'')=0;$

(2) $(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'(\text{r}''\sin L'\cos L''-\text{r}'\sin L''\cos L')$
$-(X''Y'-X'Y'')\,\Delta'''(\text{r}'''\sin L''\cos L'''-\text{r}''\sin L'''\cos L'')=0;$

(3) $(X'''Y'-X'Y''')\,\Delta''(\text{r}'\sin L''\cos L'-\text{r}''\sin L'\cos L'')$
$-(X''Y'-X'Y'')\,\Delta'''(\text{r}'\sin L'''\cos L'-\text{r}'''\sin L'\cos L''')=0.$

Remarque fur les expreffions de r', r'', r''' du §. précédent, dans le cas où l'on fuppoferoit les obfervations faites dans un petit intervalle de tems.

(578) Les équations du paragraphe précédent font rigoureufes quels que foient les intervalles entre les obfervations; & fi le rapport entre

les quantités $X'''Y''-X''Y'''$, $X'''Y'-X'Y'''$, $X''Y'-X'Y''$ étoit donné par les obſervations, le Problême des Cometes ſeroit complétement réſolu, puiſque l'on auroit des équations de la forme de celles du §. 554. Voici au ſurplus quelque ſimplification que l'on peut donner aux expreſſions de r', r'', r''' du §. 576, dans le cas où l'on ſuppoſeroit les obſervations faites dans un petit intervalle de tems.

Il eſt ſenſible que dans un petit intervalle de tems, l'orbite de la Terre peut être regardée comme circulaire, & décrite d'un mouvement uniforme. Soit donc

1 la moyenne diſtance du Soleil à la Terre;

r', r'', r''' les rayons vecteurs de la Terre correſpondans aux trois obſervations que l'on conſidere;

s l'arc que la Terre décrit autour du Soleil, lors de ſa moyenne diſtance, pendant une minute de tems;

m l'arc décrit par la Terre, pendant une minute, vers les inſtans des obſervations;

t le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la ſeconde obſervation;

t' le nombre de minutes de tems écoulées entre la ſeconde & la troiſieme obſervation;

t'' le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la troiſieme obſervation.

On pourra d'abord ſuppoſer r', r''' égaux à r''; de plus, puiſque les aires ſont proportionnelles aux tems, l'on aura

$$(1)\quad m=\frac{s}{r''^2}.$$

L'on aura enfin

$$A'=A''-mt=A''-\frac{s}{r''^2}t;\quad A'''=A''+mt'=A''+\frac{s}{r''^2}t'.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans les expreſſions de r', r'', r'' du §. 576, elles deviendront

$$\begin{aligned}r'=r''\Big(&(X'''Y''-X''Y''')\sin\Big(B'-A''+\frac{st}{r''^2}\Big)-(X'''Y'-X'Y''')\sin(B'-A'')\\&+(X''Y'-X'Y'')\sin\Big(B'-A''-\frac{st'}{r''^2}\Big)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r''=r''\Big(&(X'''Y''-X''Y''')\sin\Big(B''-A''+\frac{st}{r''^2}\Big)-(X'''Y'-X'Y''')\sin(B''-A'')\\&+(X''Y'-X'Y'')\sin\Big(B''-A''-\frac{st'}{r''^2}\Big)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r'''=r''\Big(&(X'''Y''-X''Y''')\sin\Big(B'''-A''+\frac{st}{r''^2}\Big)-(X'''Y'-X'Y''')\sin(B'''-A'')\\&+(X''Y'-X'Y'')\sin\Big(B'''-A''-\frac{st'}{r''^2}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Dans l'uſage de ces formules, puiſque s eſt l'arc de l'orbite terreſtre décrit pendant une minute de tems, lors des moyennes diſtances, l'on aura $s=0{,}0001946$; $\log s=5{\cdot}0772182$.

ARTICLE II.

Application du principe du §. 442, à la détermination des équations de la forme de celles du §. 554.

(579) J'ai déja remarqué que, si les rapports entre les quantités $X'''Y''-X''Y'''$, $X'''Y'-X'Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, pouvoient se déduire d'une maniere quelconque des observations, le Problême des Cometes seroit rigoureusement résolu. Je me propose, dans cet Article, d'appliquer le principe du §. 442, à la détermination de ces rapports. Voici le développement de ce principe.

Soient

X', X'', X''' les trois abscisses successives de la trajectoire d'une Comete prises sur le plan de son orbite; ces abscisses sont comptées du centre du Soleil & correspondent aux trois observations successives que l'on considere;

Y', Y'', Y''' les ordonnées correspondantes prises pareillement sur le plan de l'orbite de la Comete; l'on suppose que ces ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses;

T le tems écoulé depuis une certaine époque quelconque, jusqu'à l'instant de la seconde observation;

t le tems écoulé entre la premiere observation & la seconde;

t' le tems écoulé entre la seconde observation & la troisieme;

t'' le tems écoulé entre la premiere observation & la troisieme.

Il suit de ce qui a été démontré dans le §. 442, que l'on a

$$X'=X''-\frac{dX''}{dT}t+\frac{1}{2}\frac{d^2X''}{dT^2}t^2-\frac{1}{6}\frac{d^3X''}{dT^3}t^3+\&c.;$$

$$X'''=X''+\frac{dX''}{dT}t'+\frac{1}{2}\frac{d^2X''}{dT^2}t'^2+\frac{1}{6}\frac{d^3X''}{dT^3}t'^3+\&c.;$$

$$Y'=Y''-\frac{dY''}{dT}t+\frac{1}{2}\frac{d^2Y''}{dT^2}t^2-\frac{1}{6}\frac{d^3Y''}{dT^3}t^3+\&c.;$$

$$Y'''=Y''+\frac{dY''}{dT}t'+\frac{1}{2}\frac{d^2Y''}{dT^2}t'^2+\frac{1}{6}\frac{d^3Y''}{dT^3}t'^3+\&c.$$

(580) Soit

1 la moyenne distance de la Terre au Soleil;

F la force centrale du Soleil à la distance 1. Cette force a pour mesure le double de l'espace parcouru d'un mouvement uniforme, en vertu de la vîtesse acquise dans un tems donné. Ainsi, par exemple, si l'on considere le mouvement de la Terre correspondant à une minute de tems, F sera alors le double du sinus verse de l'arc de l'orbite terrestre parcouru pendant une minute; & l'on aura $F = 0{,}0000000001421704$; log. $F = 0\cdot1544324$.

R'' le rayon vecteur de la Comete, lors de la seconde observation.

Nous avons vu (§. 443) que $\frac{d^2X''}{dT^2}=-\frac{FX''}{R''^3}$; que $\frac{d^2Y''}{dT^2}=-\frac{FY''}{R''^3}$.

Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans les expreſſions de X′, X‴, Y′, Y‴ du §. 579, elles deviendront

$$X' = X'' - \frac{dX''}{dT}\,t - \tfrac{1}{2}\,\frac{FX''}{R''^3}\,t^2 - \tfrac{1}{6}\,\frac{d^3X''}{dT^3}\,t^3 + \&c.;$$

$$Y' = Y'' - \frac{dY''}{dT}\,t - \tfrac{1}{2}\,\frac{FY''}{R''^3}\,t^2 - \tfrac{1}{6}\,\frac{d^3Y''}{dT^3}\,t^3 + \&c.;$$

$$X''' = X'' + \frac{dX''}{dT}\,t' - \tfrac{1}{2}\,\frac{FX''}{R''^3}\,t'^2 + \tfrac{1}{6}\,\frac{d^3X''}{dT^3}\,t'^3 + \&c.;$$

$$Y''' = Y'' + \frac{dY''}{dT}\,t' - \tfrac{1}{2}\,\frac{FY''}{R''^3}\,t'^2 + \tfrac{1}{6}\,\frac{d^3Y''}{dT^3}\,t'^3 + \&c.;$$

Nous ferons uſage de ces dernieres valeurs.

Si dans les expreſſions de X‴Y″ — X″Y‴, X″Y′ — X′Y″, X‴Y′ — X′Y‴, l'on élimine X‴, Y‴, X′, Y′, au moyen de leurs valeurs tirées du paragraphe précédent, & que l'on ſuppoſe $t' = t$, l'on aura

$$X'''\,Y'' - X''\,Y''' = \left(\frac{Y''\,dX''}{dT} - \frac{X''\,dY''}{dT}\right) t';$$

$$X''\,Y' - X'\,Y'' = \left(\frac{Y''\,dX''}{dT} - \frac{X''\,dY''}{dT}\right) t;$$

$$X'''\,Y' - X'\,Y''' = \left(\frac{Y''\,dX''}{dT} - \frac{X''\,dY''}{dT}\right) t''\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{F\,t\,t'}{R''^3}\right).$$

Nous examinerons dans la ſuite, la légitimité de ces expreſſions, qui ſont exactes aux infiniment petits près du quatrieme ordre.

Nous avons laiſſé dans les expreſſions précédentes, & dans celles qui vont ſuivre, les quantités t', t''; quoique d'après notre ſuppoſition, $t' = t$, & $t'' = 2t$. Mais comme il n'eſt pas néceſſaire que t' ſoit rigoureuſement égal à t, pour que les réſultats ſoient exacts, pourvu que ces quantités different peu entr'elles, nous avons préféré de laiſſer les quantités t', t'' dans les équations. Nous ajouterons ici que ſi les quantités t, t' différoient ſenſiblement, les expreſſions précédentes ſeroient moins exactes, parce que les infiniment petits du troiſieme ordre, que la ſuppoſition de $t = t'$ a fait diſparoître, pourroient influer ſur les réſultats.

(581) Si l'on ſubſtitue les valeurs précédentes de X‴ Y″ — X″ Y‴, X″Y′ — X′Y″, X‴ Y′ — X′ Y‴, dans les équations du §. 576, l'on aura

$$r' = \left(\frac{Y''dX''}{dT} - \frac{X''dY''}{dT}\right)\left(t'\,r'\,\sin(B'-A') - t''\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{F\,t\,t'}{R''^3}\right) r''\,\sin(B'-A'') + t\,r'''\,\sin(B'-A''')\right);$$

$$r'' = \left(\frac{Y''dX''}{dT} - \frac{X''dY''}{dT}\right)\left(t'\,r'\,\sin(B''-A') - t''\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{F\,t\,t'}{R''^3}\right) r''\,\sin(B''-A'') + t\,r'''\,\sin(B''-A''')\right);$$

$$r''' = \left(\frac{Y''dX''}{dT} - \frac{X''dY''}{dT}\right)\left(t'\,r'\,\sin(B'''-A') - t''\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{F\,t\,t'}{R''^3}\right) r''\,\sin(B'''-A'') + t\,r'''\,\sin(B'''-A''')\right).$$

Et l'équation (1) du §. 576 deviendra

$$(1)\ t'\Delta'\operatorname{cof} L'(t'r'\operatorname{fin}(B'-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B'-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B'-A'''))$$
$$-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)\Delta''\operatorname{cof} L''(t'r'\operatorname{fin}(B''-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B''-A'')$$
$$+tr'''\operatorname{fin}(B''-A'''))$$
$$+t\Delta'''\operatorname{cof} L'''(t'r'\operatorname{fin}(B'''-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B'''-A'')$$
$$+tr'''\operatorname{fin}(B'''-A'''))=0.$$

Soit maintenant

$$a=\operatorname{fin} L'\operatorname{cof} L'''(t'r'\operatorname{fin}(B'''-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B'''-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B'''-A'''))$$
$$-\operatorname{fin} L'''\operatorname{cof} L'(t'r'\operatorname{fin}(B'-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B'-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B'-A'''));$$
$$b=\operatorname{fin} L''\operatorname{cof} L'''(t'r'\operatorname{fin}(B'''-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B'''-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B'''-A'''))$$
$$-\operatorname{fin} L'''\operatorname{cof} L''(t'r'\operatorname{fin}(B''-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B''-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B''-A'''));$$
$$c=\operatorname{fin} L'\operatorname{cof} L''(t'r'\operatorname{fin}(B''-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B''-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B''-A'''))$$
$$-\operatorname{fin} L''\operatorname{cof} L'(t'r'\operatorname{fin}(B'-A')-t''\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\operatorname{fin}(B'-A'')+tr'''\operatorname{fin}(B'-A'''));$$

$$Q=\frac{t'c}{tb};\quad Q'=\frac{t'a}{\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)t''b};\quad Q''=\frac{\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{Ftt'}{R''^3}\right)t''c}{ta};$$

Les équations (1), (2), (3), du §. 577, deviendront

$$(2)\ \Delta'''-Q\Delta'=0;\qquad (3)\ \Delta''-Q'\Delta'=0;\qquad (4)\ \Delta'''-Q''\Delta''=0.$$

Simplification des expressions précédentes, lorsque les intervalles entre les observations ne sont pas trop considérables.

(582) Nous avons déja dit (§. 578) que si l'on suppose de petits intervalles de tems entre les observations, l'on peut faire r', r''' égaux à r'' ; cette supposition introduit une simplification dans les évaluations de a, b, c, Q, Q', Q'', attendu que les différentes distances r', r'', r''' étant alors égales, ces quantités disparoissent dans les expressions de a, b, c, Q, Q', Q''.

Nous avons vu pareillement que $A'=A''-\frac{s}{r''^2}t$; $A'''=A''+\frac{s}{r''^2}t'$; & que par conséquent

$$B'-A'=B'-A''+\frac{s}{r''^2}t;\qquad B'-A'''=B'-A''-\frac{s}{r''^2}t';$$
$$B''-A'=B''-A''+\frac{s}{r''^2}t;\qquad B''-A'''=B''-A''-\frac{s}{r''^2}t';$$
$$B'''-A'=B'''-A''+\frac{s}{r''^2}t;\qquad B'''-A'''=B'''-A''-\frac{s}{r''^2}t'.$$

Mais

Mais en vertu du Théorême de Taylor

$$\sin\left(B' - A'' + \frac{s}{r''^2}t\right) = \sin(B' - A'') + \cos(B' - A'')\frac{s}{r''^2}t$$

$$\sin\left(B'' - A'' + \frac{s}{r''^2}t\right) = \sin(B'' - A'') + \cos(B'' - A'')\frac{s}{r''^2}t$$

$$\sin\left(B''' - A'' + \frac{s}{r''^2}t\right) = \sin(B''' - A'') + \cos(B''' - A'')\frac{s}{r''^2}t$$

$$\sin\left(B' - A'' - \frac{s}{r''^2}t'\right) = \sin(B' - A'') - \cos(B' - A'')\frac{s}{r''^2}t'$$

$$\sin\left(B'' - A'' - \frac{s}{r''^2}t'\right) = \sin(B'' - A'') - \cos(B'' - A'')\frac{s}{r''^2}t'$$

$$\sin\left(B''' - A'' - \frac{s}{r''^2}t'\right) = \sin(B''' - A'') - \cos(B''' - A'')\frac{s}{r''^2}t';$$

d'où l'on conclura, en n'ayant point égard aux multiplicateurs communs aux quantités a, b, c, & qui, par conſéquent, diſparoiſſent dans les expreſſions de Q, Q', Q''; & en ſe rappellant d'ailleurs que $t'' = t + t'$;

$$a = \sin L' \cos L''' \sin(B''' - A'') - \sin L''' \cos L' \sin(B' - A'');$$

$$b = \sin L'' \cos L''' \sin(B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \sin(B'' - A'');$$

$$c = \sin L' \cos L'' \sin(B'' - A'') - \sin L'' \cos L' \sin(B' - A'').$$

$$Q = \frac{t'}{t} \times \frac{\sin L' \cos L'' \sin(B'' - A'') - \sin L'' \cos L' \sin(B' - A'')}{\sin L'' \cos L''' \sin(B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \sin(B'' - A'')};$$

$$Q' = \frac{t'}{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)t''} \times \frac{\sin L' \cos L''' \sin(B''' - A'') - \sin L''' \cos L' \sin(B' - A'')}{\sin L'' \cos L''' \sin(B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \sin(B'' - A'')};$$

$$Q'' = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)t''}{t} \times \frac{\sin L' \cos L'' \sin(B'' - A'') - \sin L'' \cos L' \sin(B' - A'')}{\sin L' \cos L''' \sin(B''' - A'') - \sin L''' \cos L' \sin(B' - A'')}.$$

$$\Delta''' - Q\Delta' = 0; \quad \Delta'' - Q'\Delta' = 0; \quad \Delta''' - Q''\Delta'' = 0.$$

ARTICLE III.

Examen de la théorie précédente, & limitation de cette théorie dans la pratique.

(583) Puiſque (§. 560) relativement à une obſervation quelconque, $R = \sqrt{(\Delta^2 - 2r\Delta \cos L \cos(B - A) + r^2)}$. Il eſt évident que les valeurs de Q, Q', Q'' du §. précédent, n'ont pas préciſément la propriété que nous avons annoncée dans les §. 554 & 572, de ne renfermer que des connues, puiſqu'elles renferment de plus des quantités de la forme ſuivante, $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$. Si l'on fait attention cependant que cette derniere quantité eſt toujours très-petite vis-à-vis de 1, lorſque l'on conſidere des obſervations peu éloignées entr'elles, on ſera tenté de croire qu'il n'eſt pas

impossible de ramener les valeurs de Q, Q′, Q″ à la condition prescrite. En effet, on fera un premier calcul dans lequel on n'aura point égard au petit terme en question; ou, si l'on veut, on lui donnera la valeur que l'on conclura de la Table du §. 585, d'après l'élongation observée de la Comete au Soleil; l'on conclura alors une valeur approchée de Δ'', & par conséquent de R″. L'on portera cette valeur de R″ dans les expressions de a, b, c, Q, Q′, Q″, dans lesquelles on aura égard au petit terme $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$; & l'on parviendra à remplir la condition prescrite. Nous développerons cette théorie, lorsque nous en ferons aux applications.

(584) Nous venons de dire que la quantité $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$ est toujours très-petite vis-à-vis l'unité.

Pour le démontrer, nous remarquerons que R″ est la distance de la Comete au Soleil lors de la seconde observation, 1 étant la distance moyenne de la Terre au Soleil. Supposons un moment $R''=\frac{1}{4}$; nous verrons bientôt que cette supposition est beaucoup au-dessous de la valeur que l'on doit naturellement supposer à R″; l'on aura, dans ce cas particulier, $\frac{1}{R''^3}=\frac{1}{64}$; & comme d'ailleurs (§. 580) log F = 0,1544394; l'on aura $\log\frac{\frac{1}{2}F}{R''^3} = 1{\cdot}65958 94$; $\frac{\frac{1}{2}F}{R''^3} = 0{,}0000000004568$. Supposons maintenant que chacune des valeurs de t, t', réponde à 2880′, ou à deux jours de tems; l'on aura $\log\frac{\frac{1}{2}Ftt'}{R''^3} = 8{\cdot}5783746$; $\frac{\frac{1}{2}Ftt'}{R''^3} = 0{,}03788$;

$$1-\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}=0{\cdot}96212.$$

Il me reste maintenant à faire voir que $\frac{1}{4}$ est au-dessous de la valeur que l'on doit naturellement supposer à R″, lors des observations. Pour s'en convaincre, on se rappellera que R″ est la distance de la Comete au Soleil. Parmi toutes les Cometes dont on a déterminé les orbites, il n'y en a qu'un assez petit nombre, dont les distances périhélies soient plus petites que $\frac{1}{4}$; il est donc d'abord évident que pour toutes ces Cometes, R″ ne peut jamais être supposée plus petite que $\frac{1}{4}$. Quant aux Cometes dont les distances périhélies sont plus petites que $\frac{1}{4}$, quoique vers le périhélie, leurs distances au Soleil puissent être plus petites que $\frac{1}{4}$, il est clair que dans ces circonstances, ces astres sont plongés dans les rayons du Soleil, & ne peuvent être observés de la Terre; puisque quand $R''=\frac{1}{4}$, l'élongation de la Comete au Soleil peut être, tout au plus de $14^d\ 48'$. La supposition que nous avons faite sur la valeur de R″ n'est donc point forcée, & nous aurions pu porter plus loin cette valeur. On peut relire ce que nous avons dit à ce sujet dans le §. 446.

ARTICLE IV.

Réflexions qui tendent à établir de plus en plus la légitimité des suppositions précédentes.

(585) Voici quelques réflexions qui tendent à établir de plus en plus, la légitimité des suppositions précédentes. Je remarque d'abord que les valeurs de $\frac{Ftt'}{R''^3}$ sont d'autant plus petites, que les cubes des distances R″ de la Comete à la Terre sont plus grands. Cette valeur qui, lorsque $R'' = \frac{1}{4}$, étoit de 0,03788, ne sera plus que de 0,00473, si l'on suppose $R'' = \frac{1}{2}$; dans cette circonstance, l'élongation de la Comete au Soleil ne peut surpasser 30^d. On pourra donc, dans tous les cas, prononcer d'après les seules observations, sur l'exactitude de la méthode. La Table suivante donnera une idée de cette exactitude. Je suppose, dans cette Table, que les intervalles entre les observations sont égaux, & de deux jours chacun. Nous entendons par l'élongation de la Comete, sa distance au Soleil prise sur un grand cercle.

Table des plus grandes valeurs de $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, *& des plus grandes élongations de la Comete au Soleil, correspondantes aux différentes valeurs de* R″.

Valeurs de R″.	Plus grandes Valeurs de $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$.	Limite des élongations de la Comete au Soleil.
0,25000.	0,03788.	14^d 40′
0,30000.	0,02192.	17 27
0,40000.	0,00925.	23 35
0,50000.	0,00473.	30 0
0,60000.	0,00274.	36 52
0,70000.	0,00173.	44 25
0,80000.	0,00116.	53 8
0,90000.	0,00082.	64 9
1,00000.	0,00059.	90 0

Au moyen de la Table précédente, on pourra juger, d'après les observations, quelle est la plus grande valeur que puisse avoir la quantité $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$. Par exemple, si l'élongation de la Comete au Soleil est plus grande que 30^d, on pourra affirmer que la valeur de $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$ est certainement au-dessous de 0,00473; & ainsi pour les autres élongations. On ne doit point oublier pareillement que l'inexactitude résultante de l'omission du petit terme $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, dans l'évaluation des quantités a, b, c, Q, Q′, Q″, n'a lieu que dans la pre-

miere approximation, & que nous avons indiqué (§. 583) une méthode pour réparer cette inexactitude. On voit au surplus que les valeurs de $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$ diminuent à mesure que la Comete devient plus observable; de sorte que la méthode acquiert d'autant plus d'exactitude qu'elle est plus dans le cas d'être utile.

Nouvelles considérations sur l'exactitude des équations dont nous avons fait usage.

(586) Nous avons donné (§. 580) les expressions de $X'''Y''-X''Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, $X'''Y'-X'Y'''$. Mais nous n'avons pas dissimulé que ces expressions renferment quelqu'inexactitude, lorsque les intervalles entre les observations ne sont pas égaux. Nous allons faire voir maintenant, par de nouvelles considérations, que si l'on suppose que les observations ont été faites à des intervalles égaux entr'eux, les équations des paragraphes précédens acquierent un grand dégré d'exactitude.

Pour le démontrer, nous supposerons à X', Y', X''', Y''', les valeurs suivantes,

$$X'=X''-\frac{dX''}{dT}t-\frac{1}{2}\frac{FX''}{R''^3}t^2-\frac{1}{6}\frac{d^3X''}{dT^3}t^3+\&c.;$$

$$Y'=Y''-\frac{dY''}{dT}t-\frac{1}{2}\frac{FY''}{R''^3}t^2-\frac{1}{6}\frac{d^3Y''}{dT^3}t^3+\&c.;$$

$$X'''=X''+\frac{dX''}{dT}t'-\frac{1}{2}\frac{FX''}{R''^3}t'^2+\frac{1}{6}\frac{d^3X''}{dT^3}t'^3+\&c.;$$

$$Y'''=Y''+\frac{dY''}{dT}t'-\frac{1}{2}\frac{FY''}{R''^3}t'^2+\frac{1}{6}\frac{d^3Y''}{dT^3}t'^3+\&c.;$$

Si dans les expressions de $X'''Y''-X''Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, $X'''Y'-X'Y'''$, l'on élimine X''', Y''', X', Y', au moyen des valeurs précédentes, & que l'on néglige les termes du quatrieme ordre, l'on aura

$$X'''Y''-X''Y'''=\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)t'+\frac{1}{6}\left(\frac{Y''d^3X''}{dT^3}-\frac{X''d^3Y''}{dT^3}\right)t'^3;$$

$$X''Y'-X'Y''=\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)t+\frac{1}{6}\left(\frac{Y''d^3X''}{dT^3}-\frac{X''d^3Y''}{dT^3}\right)t^3;$$

$$X'''Y'-X'Y'''=\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)(t+t')\left(1-\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)$$
$$+\frac{1}{6}\left(\frac{Y''d^3X''}{dT^3}-\frac{X''d^3Y''}{d^3T}\right)(t^3+t'^3).$$

Ou plutôt, à cause de la petitesse du terme $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$ vis-à-vis de l'unité, surtout lorsqu'il multiplie un infiniment petit du troisieme ordre,

$$X'''Y'-X'Y'''=\left(\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)(t+t')+\frac{1}{6}\left(\frac{Y''d^3X''}{dT^3}-\frac{X''d^3Y''}{dT^3}\right)(t^3+t'^3)\right)$$
$$\times\left(1-\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right).$$

Si l'on ſubſtitue ces dernieres valeurs de $X'''Y''-X''Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, $X'''Y'-X'Y'''$, dans l'équation (1) du §. 576, & dans les expreſſions de r', r'', r''' du §. 576 ou du §. 578 ; l'on retombera dans les valeurs de a, b, c, Q, Q', Q'', du §. 581, ou dans les valeurs de a, b, c, Q, Q', Q'', du §. 582. Nous remarquerons que les valeurs du §. 581 ſont plus exactes, attendu que l'on y a égard à la variation du rayon de l'orbite terreſtre dans l'intervalle des obſervations, & que l'on emploie les vrais lieux du Soleil, lors des trois obſervations, mais elles ſont peut-être moins commodes dans la pratique, que les expreſſions du §. 582. Nous obſerverons enfin que, puiſque nous ſuppoſons égaux les intervalles entre les obſervations ; dans les valeurs de a, b, c, Q, Q', Q'', des §. 581 & 582, l'on aura $t'=t$, $t''=2t=2t'$.

(587) On peut remarquer ici la raiſon pour laquelle il eſt néceſſaire que les intervalles entre les obſervations ſoient égaux, pour que l'on parvienne aux expreſſions de a, b, c, Q, Q', Q'' des §. 581 & 582. En effet, l'on ne peut obtenir ces valeurs, qu'autant que les expreſſions de $X'''Y''-X''Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, $X'''Y'-X'Y'''$ ſont multiples les unes des autres. Cette condition n'a lieu que lorſque les intervalles entre les obſervations ſont égaux. On peut enfin obſerver que l'on retomberoit dans des expreſſions de même forme pour a, b, c, Q, Q', Q'', lorſque les intervalles ſont égaux, lors même que l'on poufferoit l'approximation plus loin ; & il eſt aiſé de ſentir que, dans ce cas, les expreſſions de $X'''Y''-X''Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, $X'''Y'-X'Y'''$ ſont toujours multiples les unes des autres, lorſque ſurtout les intervalles ne ſont pas très-grands.

Nous venons d'impoſer aux obſervations, la condition d'être faites à des intervalles égaux entr'eux ; nous ferons voir par la ſuite, comment au moyen d'obſervations faites à des intervalles inégaux, il eſt poſſible d'en conclure les obſervations qui auroient été faites à des intervalles égaux.

ARTICLE V.

Examen du cas particulier où les latitudes de la Comete ſont très-petites.

(588) Si les latitudes obſervées de la Comete étoient très-petites, les méthodes précédentes ſeroient ſujettes à un inconvénient particulier. En effet, tous les termes des équations par leſquelles on détermine, ſoit les rapports des diſtances de la Comete à la Terre, ſoit les valeurs abſolues de ces diſtances, renfermant les ſinus des latitudes de la Comete, il ſeroit à craindre que la moindre erreur dans les latitudes ne mît la méthode en défaut, puiſque les erreurs ſur les latitudes ſeroient du même ordre que les latitudes. L'objection ſeroit bien plus forte, ſi la Comete ſe mouvoit dans le plan de l'Ecliptique, car alors on n'auroit plus d'équations ; voici le procédé qu'il faudroit ſuivre dans ce cas.

Nous avons vu (§. 575) que pour trois observations que je désigne par $'$, $''$, $'''$, l'on a les deux équations suivantes

$$(1)\ (X'''Y''-X''Y''')\,r'\cos A'-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\cos A'' + (X''Y'-X'Y'')\,r'''\cos A'''-(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'\cos B'\cos L' + (X'''Y'-X'Y''')\,\Delta''\cos B''\cos L''-(X''Y'-X'Y'')\,\Delta'''\cos B'''\cos L'''=0;$$

$$(2)\ (X'''Y''-X''Y''')\,r'\sin A'-(X'''Y'-X'Y''')\,r''\sin A'' + (X''Y'-X'Y'')\,r'''\sin A'''-(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta'\sin B'\cos L' + (X'''Y'-X'Y''')\,\Delta''\sin B''\cos L''-(X''Y'-X'Y'')\,\Delta'''\sin B'''\cos L'''=0.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par $\sin B'''$, que l'on multiplie pareillement l'équation (2) par $\cos B'''$, & que l'on soustraie ces deux nouvelles équations l'une de l'autre, l'on aura

$$(3)\ (X'''Y''-X''Y''')\,(r'\sin(B'''-A')-\Delta'\cos L'\sin(B'''-B')) - (X'''Y'-X'Y''')\,(r''\sin(B'''-A'')-\Delta''\cos L''\sin(B'''-B'')) + (X''Y'-X'Y'')\,r'''\sin(B'''-A''')=0.$$

L'on aura, par une semblable analyse,

$$(4)\ (X'''Y''-X''Y''')\,(r'\sin(B''-A')-\Delta'\cos L'\sin(B''-B')) + (X''Y'-X'Y'')\,(r'''\sin(B''-A''')-\Delta'''\cos L'''\sin(B''-B''')) - (X'''Y'-X'Y''')\,r''\sin(B''-A'')=0;$$

$$(5)\ (X''Y'-X'Y'')\,(r'''\sin(B'-A''')-\Delta'''\cos L'''\sin(B'-B''')) - (X'''Y'-X'Y''')\,(r''\sin(B'-A'')-\Delta''\cos L''\sin(B'-B'')) + (X'''Y''-X''Y''')\,r'\sin(B'-A')=0.$$

Si l'on combine pareillement trois autres observations, dont deux soient communes à l'équation précédente, & que je désigne par $''$, $'''$, $''''$, l'on aura les cinq équations suivantes,

$$(6)\ (X''''Y'''-X'''Y'''')\,r''\cos A''-(X''''Y''-X''Y'''')\,r'''\cos A''' + (X'''Y''-X''Y''')\,r''''\cos A''''-(X''''Y'''-X'''Y'''')\,\Delta''\cos B''\cos L'' + (X''''Y''-X''Y'''')\,\Delta'''\cos B'''\cos L'''-(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta''''\cos B''''\cos L''''=0.$$

$$(7)\ (X''''Y'''-X'''Y'''')\,r''\sin A''-(X''''Y''-X''Y'''')\,r'''\sin A''' + (X'''Y''-X''Y''')\,r''''\sin A''''-(X''''Y'''-X'''Y'''')\,\Delta''\sin B''\cos L'' + (X''''Y''-X''Y'''')\,\Delta'''\sin B'''\cos L'''-(X'''Y''-X''Y''')\,\Delta''''\sin B''''\cos L''''=0.$$

$$(8)\ (X''''Y'''-X'''Y'''')\,(r''\sin(B''''-A'')-\Delta''\cos L''\sin(B''''-B'')) - (X''''Y''-X''Y'''')\,(r'''\sin(B''''-A''')-\Delta'''\cos L'''\sin(B''''-B''')) + (X'''Y''-X''Y''')\,r''''\sin(B''''-A'''')=0.$$

$$(9)\ (X''''Y'''-X'''X'''')\,(r''\sin(B'''-A'')-\Delta''\cos L''\sin(B'''-B'')) + (X'''Y''-X''Y''')\,(r''''\sin(B'''-A'''')-\Delta''''\cos L''''\sin B'''-B'''')) - (X''''Y''-X''Y'''')\,r'''\sin(B'''-A''')=0;$$

$$(10)\ (X'''Y''-X''Y''')\,(r''''\sin(B''-A'''')-\Delta''''\cos L''''\sin(B''-B'''')) - (X''''Y''-X''Y'''')\,(r'''\sin(B''-A''')-\Delta'''\cos L'''\sin(B''-B''')) + (Y''''Y'''-X'''Y'''')\,r''\sin(B''-A'')=0.$$

Et ſi l'on entend par

t le nombre de minutes de tems écoulées entre l'obſervation $'$ & $''$;

t' le nombre de minutes de tems écoulées entre l'obſervation $''$, & $'''$;

t'' le nombre de minutes de tems écoulées entre l'obſervation $'$, & $'''$;

t''' le nombre de minutes de tems écoulées entre l'obſervation $'''$ & $''''$;

t'''' le nombre de minutes de tems écoulées entre l'obſervation $''$ & $''''$,

L'on aura, conformément à ce qui a été dit (§. 581)

$$X'''Y''-X''Y'''=\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)t';$$

$$X''Y'-X'Y''=\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)t;$$

$$X'''Y'-X'Y'''=\left(\frac{Y''dX''}{dT}-\frac{X''dY''}{dT}\right)t''\left(1-\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right);$$

$$X''''Y'''-X'''Y''''=\left(\frac{Y'''dX'''}{dT}-\frac{X'''dY'''}{dT}\right)t''';$$

$$X'''Y''-X''Y'''=\left(\frac{Y'''dX'''}{dT}-\frac{X'''dY'''}{dT}\right)t';$$

$$X''''Y''-X''Y''''=\left(\frac{Y'''dX'''}{dT}-\frac{X'''dY'''}{dT}\right)t''''\left(1-\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}\right).$$

L'on auroit eu des expreſſions encore plus exactes, ſi nous avions fait uſage des équations du §. 586; mais cela eſt inutile pour l'objet que nous nous propoſons, puiſque, d'après la condition que nous impoſerons aux obſervations, les réſultats ſont les mêmes.

Si l'on ſubſtitue ces valeurs de $X'''Y'-X'Y'''$, $X''Y'-X'Y''$, $X'''Y''-X''Y'''$, $X''''Y'''-X'''Y''''$, $X''''Y''-X''Y''''$, dans les équations précédentes, l'on aura ſuffiſamment d'équations pour déterminer les valeurs de Δ', Δ'', Δ''', Δ''''.

On peut donc réſoudre le cas particulier où les latitudes obſervées de la Comete ſeroient très-petites, & même nulles ; il faudra ſeulement faire uſage de quatre obſervations. On pourra ſuppoſer nuls, lors de la premiere approximation, les termes $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$ & $\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$; on aura alors de premieres valeurs approchées de Δ'', Δ''', qui feront connoître les valeurs correſpondantes de R'', R'''. On fera uſage de ces nouvelles valeurs de R'', R''', dans l'évaluation des termes $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, & l'on aura enfin les valeurs rigoureuſes de Δ', Δ'', Δ''', Δ''''. On pourra auſſi relativement à la premiere approximation, avoir recours à la Table du §. 585. Nous remarquerons ici, que pour procurer à la méthode le degré d'exactitude dont il a été queſtion dans les §. 586 & 587, les intervalles entre les obſervations doivent être égaux; l'on a alors $t=t'=t'''$; $t''=t''''=2t=2t'=2t'''$.

ARTICLE VI.

Généralisation de la théorie précédente.

(589) Quoique les déterminations précédentes soient fondées sur des considérations qui supposent des observations peu éloignées entr'elles, il me paroît cependant possible d'employer des observations sensiblement distantes, pourvu toutefois que l'on ait des observations intermédiaires qui lient ces observations plus éloignées.

Pour me faire entendre, on se rappellera que si l'on désigne par $'$, $''$, $'''$, trois observations quelconques, & que l'on nomme

r', r'', r''' les rayons vecteurs de la Terre correspondans aux trois observations;

Δ', Δ'', Δ''', les distances de la Terre à la Comete, correspondantes aux trois observations;

A', A'', A''', les longitudes du Soleil vues de la Terre, correspondantes aux trois observations;

B', B'', B''', les longitudes géocentriques de la Comete, correspondantes aux trois observations;

L', L'', L''', les latitudes géocentriques de la Comete, correspondantes aux trois observations;

Et que l'on suppose d'ailleurs

$$C = \text{sin}\,L'\,\text{cos}\,L''\,\text{cos}\,L'''\,\text{sin}\,(B''-B''') + \text{sin}\,L''\,\text{cos}\,L'\,\text{cos}\,L'''\,\text{sin}\,(B'''-B') + \text{sin}\,L'''\,\text{cos}\,L'\,\text{cos}\,L''\,\text{sin}\,(B'-B'');$$

$$D' = r'''\,(\text{sin}\,L'\,\text{cos}\,L''\,\text{sin}\,(B''-A''') + \text{sin}\,L''\,\text{cos}\,L'\,\text{sin}\,(A'''-B'));$$

$$E' = r''\,(\text{sin}\,L'\,\text{cos}\,L'''\,\text{sin}\,(A''-B''') + \text{sin}\,L'''\,\text{cos}\,L'\,\text{sin}\,(B'-A''));$$

$$F = r'\,(\text{sin}\,L''\,\text{cos}\,L'''\,\text{sin}\,(B'''-A') + \text{sin}\,L'''\,\text{cos}\,L''\,\text{sin}\,(A'-B''));$$

$$G = r''r'''\,\text{sin}\,L'\,\text{sin}\,(A''-A''');$$

$$H = r'r'''\,\text{sin}\,L''\,\text{sin}\,(A'''-A');$$

$$K = r'r''\,\text{sin}\,L'''\,\text{sin}\,(A'-A'');$$

L'on a (§. 553)

$$(1)\quad C\Delta'\Delta''\Delta''' - D'\Delta'\Delta'' - E'\Delta'\Delta''' - F\Delta''\Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0;$$

Et cette équation est rigoureuse, quels que soient les intervalles de tems écoulé entre les observations.

On se rappellera également que si l'on conserve les définitions de t, t', t'', du §. 579, de a', b, c, Q, Q', Q'', du §. 581 ou 582, l'on a

$$(2)\ \Delta''' - Q\Delta' = 0; \quad (3)\ \Delta'' - Q'\Delta' = 0; \quad (4)\ \Delta''' - Q''\Delta'' = 0.$$

Mais ces dernieres équations ne sont point rigoureuses comme l'équation (1); elles exigent que les intervalles entre les observations soient assez courts pour que les conditions qui établissent leur légitimité, puissent être remplies; & même, pour plus grande exactitude, que ces intervalles soient égaux. Si donc les trois observations que je désignerai toujours par $'$, $''$, $'''$, sont trop éloignées entr'elles pour que les conditions prescrites pour la légitimité des équations (2), (3), (4) puissent avoir

avoir lieu, il paroîtroit au premier coup-d'œil, que l'on ne pourroit pas faire usage des recherches précédentes. Examinons cependant si, même dans ce cas, dans la supposition toutefois où les observations éloignées seroient liées entr'elles par des observations intermédiaires dont les intervalles ne seroient pas trop grands, l'on ne pourroit pas étendre les théories précédentes à ces observations.

Pour parvenir à ce but, désignons toujours par $'$, $''$, $'''$, les trois observations même éloignées entr'elles que l'on compare, & supposons qu'elles soient liées par des observations intermédiaires ; de sorte, par exemple, que l'on ait une suite d'observations désignées de la maniere suivante,

$$', 1, 2, 3, 4, 5, \&c. \ldots\ldots '', 1', 2', 3', 4', 5', \&c. \ldots '''$$

Il est évident qu'au moyen des équations de la forme de celles des §. 581 ou 582, l'on aura une relation entre Δ' & $\Delta 2$, que l'on peut exprimer par

$$\Delta 2 - q\,\Delta' = 0.$$

Par la même raison, on aura entre $\Delta 2$ & $\Delta 4$, une équation de la forme

$$\Delta 4 - q'\,\Delta 2 = 0.$$

On aura enfin entre Δ'' & $\Delta 4$, une équation de la forme

$$\Delta'' - q''\,\Delta 4 = 0.$$

On aura pareillement

$$\Delta 2' - q'''\,\Delta'' = 0; \qquad \Delta 4' - q''''\Delta 2' = 0; \qquad \Delta''' - q'''''\,\Delta 4' = 0.$$

D'où l'on conclura

$$(5)\quad \Delta'' = q\,q'\,q''\,\Delta';$$

$$(6)\quad \Delta''' = q\,q'\,q''\,q'''\,q''''\,q'''''\,\Delta'.$$

On voit donc que la théorie précédente peut être généralisée, même pour des observations notamment distantes entr'elles ; pourvu toutefois que ces observations soient liées par des observations intermédiaires peu éloignées entr'elles, & qui aient les conditions prescrites pour l'exactitude des résultats. Nous verrons dans la suite comment l'on peut donner à cette théorie, toute l'exactitude dont elle est susceptible.

ARTICLE VII.

Usage des équations de l'Article V, pour résoudre le Problême des Cometes.

(590) Je vais présenter rapidement quelques réflexions sur l'usage des équations de l'Article V, pour résoudre le Problême des Cometes.

Si l'on exécute les calculs indiqués dans cet Article, & que l'on suppose

$$\alpha = t'r'\sin(B'-A') - t''\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\sin(B'-A'') + tr'''\sin(B'-A''');$$

$$\beta = t'r'\sin(B''-A') - t''\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)r''\sin(B''-A'') + tr'''\sin(B''-A''');$$

$$\gamma = t'''r''\sin(B''''-A'') - t''''\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}\right)r''\sin(B''''-A'') + t'r''''\sin(B''''-A'''');$$

$$\delta = t'''r''\sin(B'''-A'') - t''''\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}\right)r''\sin(B'''-A'') + t'r''''\sin(B'''-A'''');$$

$$\varphi = t''''\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}\right)\alpha\sin(B''''-B''') + t\,\gamma\sin(B'-B''');$$

$$\chi = t'''\,\alpha\sin(B''''-B'') + t''\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)\gamma\sin(B'-B'');$$

$$\psi = tt'''\sin(B'-B''')\sin(B''''-B'')$$
$$-t''t''''\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}\right)\sin(B''''-B''')\sin(B'-B'');$$

L'on aura

$$(1)\quad \Delta' = \frac{\beta\psi - t\chi\sin(B''-B''')}{t'\psi\cos L'\sin(B''-B')};$$

$$(2)\quad \Delta'' = \frac{\phi}{\psi\cos L''};$$

$$(3)\quad \Delta''' = \frac{\chi}{\psi\cos L'''};$$

$$(4)\quad \Delta'''' = \frac{\delta\psi - t'''\phi\sin(B'''-B'')}{t'\psi\cos L''''\sin(B'''-B'''')}.$$

L'on a de plus,

$$(5)\quad R' = \sqrt{(\Delta'^2 + r'^2 - 2r'\Delta'\cos L'\cos(B'-A'))};$$

$$(6)\quad R'' = \sqrt{(\Delta''^2 + r''^2 - 2r''\Delta''\cos L''\cos(B''-A''))};$$

$$(7)\quad R''' = \sqrt{(\Delta'''^2 + r'''^2 - 2r'''\Delta'''\cos L'''\cos(B'''-A'''))};$$

$$(8)\quad R'''' = \sqrt{(\Delta''''^2 + r''''^2 - 2r''''\Delta''''\cos L''''\cos(B''''-A''''))}.$$

Une feule chofe empêche que la folution du Problême des Cometes ne foit ramenée au fecond degré, & que l'on n'ait des équations de la forme de celles du §. 554; c'eft que les expreffions de Q, Q′, Q″, qui entrent dans les équations $\Delta''' - Q\Delta' = 0$, $\Delta'' - Q'\Delta' = 0$, $\Delta''' - Q''\Delta'' = 0$, renferment le facteur $1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$. Pour s'en convaincre, il fuffit de jetter les yeux fur les expreffions de a, b, c, Q, Q′, Q″, des §. 581 & 582. Examinons fi cette difficulté ne peut point être éludée au moyen des équations de l'Article V.

Nous remarquerons d'abord, que dans les facteurs $1-\tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, qui entrent dans les expreffions précédentes de α, β, γ, δ, φ, χ, ψ, Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', les quantités $\tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, font très petites vis-à vis de 1, fur-tout dans les circonftances où l'on peut obferver les Cometes.

Si donc, dans les expreſſions de R″, R‴ qui entrent dans ces très-petits termes, l'on évalue les quantités $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, d'après la Table du §. 585, l'on commettra une très-petite erreur, que l'on peut même regarder comme nulle. On peut donc, dans l'évaluation des quantités $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, faire uſage des expreſſions de R″, R‴, obtenues en employant les valeurs de Δ″, Δ‴ du préſent paragraphe, mais dans leſquelles on aura évalué les quantités $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, d'après les conſidérations de la Table du §. 585. On fera enſuite un nouveau calcul plus exact de Δ″, d'où l'on conclura la valeur correſpondante de R″. Par ce moyen, la quantité $1-\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, qui entre dans les expreſſions de a, b, c, Q, Q′, Q″, des §. 584 & 582, ſera donnée immédiatement par les obſervations; & l'on aura des équations de la forme de celles du §. 554.

On objectera, ſans doute, que pour parvenir à cette ſimplification dans le degré de l'équation qui réſout le Problême des Cometes, l'on eſt obligé d'employer quatre obſervations, ce qui complique les conditions du Problême; mais qu'importe cette complication ſi elle amene réellement une ſolution plus ſimple? Je laiſſe aux Aſtronomes à apprécier ces réflexions. Au reſte, dans une queſtion auſſi importante, il n'eſt pas inutile de multiplier les points de vue ſous leſquels on peut l'enviſager.

(591) Si dans la premiere de toutes les approximations, lorſqu'il s'agit d'évaluer les quantités R″, R‴ qui entrent dans les très-petits termes $\frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}$, $\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}$, l'on veut faire uſage de la ſimplification indiquée dans les §. 578 & 582, l'on aura

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3} \times t''r''\sin(B'-A'');$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3} \times t''r''\sin(B''-A'');$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3} \times t''''r'''\sin(B''''-A''');$$

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3} \times t''''r'''\sin(B'''-A''').$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}Ftt'}{R''^3} \times t''t''''r''\sin(B'-A'')\sin(B''''-B''')$$
$$+\frac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3} \times t\,t''''r'''\sin(B''''-A''')\sin(B'-B''');$$

$$\chi = \tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3} \times t''t'''r''\sin(B'-A'')\sin(B''''-B'')$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3} \times t''t''''r'''\sin(B''''-A''')\sin(B'-B'');$$
$$\psi = tt'''\sin(B'-B''')\sin(B''''-B'')$$
$$-t''t''''\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ftt'}{R''^3}-\tfrac{1}{2}\frac{Ft't'''}{R'''^3}\right)\sin(B''''-B''')\sin(B'-B'');$$
$$\Delta'' = \frac{\phi}{\psi\cos L''};$$
$$\Delta''' = \frac{\chi}{\psi\cos L'''}.$$

L'on n'oubliera point que dans ces équations, ainsi qu'il a été remarqué (§. 588), $t = t' = t'''$; $t'' = t'''' = 2t = 2t' = 2t'''$.

ARTICLE VIII.

Application du principe du §. 444 à la détermination des orbites des Cometes.

(592) Pour compléter les recherches qui nous occupent, je dois appliquer le principe du §. 444, à la détermination des orbites des Cometes.

On peut se rappeller (§. 445) que si l'on nomme

C' la corde d'un arc d'une parabole;

R', R''' les rayons vecteurs correspondans aux extrémités de l'arc de la parabole;

t'' le nombre de minutes que la Comete emploie à parcourir l'arc de la parabole;

1 la moyenne distance de la Terre au Soleil;

F la force centrale du Soleil à la distance 1; nous avons donné (§. 580) l'expression de cette quantité;

l'on a, avec une exactitude suffisante, pour tous les cas où l'on peut observer les Cometes, pourvu toutefois que les intervalles entre les observations extrêmes ne soient pas très-grands,

$$(1)\quad 4Ft''^2 - (R'+R''')C'^2 = 0.$$

Soit maintenant

Δ' la distance de la Terre à la Comete, lorsque la Comete se trouve à l'une des extrémités de l'arc parabolique dont il s'agit;

Δ''' la distance de la Terre à la Comete, lorsque la Comete se trouve à l'autre extrémité de l'arc;

r' le rayon vecteur de la Terre lorsque la Comete se trouve à l'une des extrémités de l'arc;

r''' le rayon vecteur de la Terre, lorsque la Comete se trouve à l'autre extrémité de l'arc;

A' la longitude du Soleil vue de la Terre, lorsque la Comete se trouve à l'une des extrémités de l'arc de la parabole;

A''' la longitude du Soleil vue de la Terre, lorſque la Comete ſe trouve à l'autre extrémité de l'arc ;

B' la longitude géocentrique de la Comete, lorſqu'elle eſt à l'une des extrémités de l'arc ;

B''' la longitude géocentrique de la Comete, lorſqu'elle eſt à l'autre extrémité de l'arc ;

L' la latitude géocentrique de la Comete, lorſqu'elle eſt à l'une des extrémités de l'arc de la parabole ;

L''' la latitude géocentrique de la Comete, lorſqu'elle eſt à l'autre extrémité de l'arc de la parabole.

L'on a vu (§. 565) que l'on a

$$(2)\ C'^2 = R'^2 + R'''^2 - 2(\Delta'\Delta''' \cos L' \cos L''' \cos(B''' - B') - r'\Delta''' \cos L''' \cos(B''' - A') - r'''\Delta' \cos L' \cos(B' - A''') + \Delta'\Delta''' \sin L' \sin L''' + r'r''' \cos(A''' - A')) = 0;$$

$$(3)\ R = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' r' \cos L' \cos(B' - A'))};$$

$$(4)\ R''' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta''' r''' \cos L''' \cos(B''' - A''')}.$$

Si l'on égale les valeurs de C'^2 tirées des équations (1) & (2) l'on aura

$$(5)\ r'^2 + r'''^2 + \Delta'^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta' r' \cos L' \cos(B' - A') - 2\Delta''' r''' \cos L''' \cos(B''' - A''') - 2(\Delta'\Delta''' \cos L' \cos L''' \cos(B''' - B') - r'\Delta''' \cos L''' \cos(B''' - A') - r'''\Delta' \cos L' \cos(B' - A''') + \Delta'\Delta''' \sin L' \sin L''' + r'r''' \cos(A''' - A')) - \frac{4Ft'^2}{R'+R'''} = 0.$$

Ou, ce qui revient au même,

$$(6)\ \Delta'^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta'\Delta'''(\cos L' \cos L''' \cos(B''' - B') + \sin L' \sin L''') + 2\Delta' \cos L'(r''' \cos(B' - A''') - r' \cos(B' - A')) + 2\Delta''' \cos L'''(r' \cos(B''' - A') - r''' \cos(B''' - A''')) + r'^2 + r'''^2 - 2r'r''' \cos(A''' - A') - \frac{4Ft'^2}{R'+R'''} = 0.$$

(593) Suppoſons maintenant que l'on ait une obſervation intermédiaire ; que de plus cette obſervation intermédiaire réponde à l'inſtant milieu de l'intervalle qui ſépare les obſervations extrêmes ; (nous verrons comment on peut obtenir cette condition). Nommons

r'' le rayon vecteur de la Terre ;
R'' le rayon vecteur de la Comete ;
Δ'' la diſtance de la Comete à la Terre ;
A'' la longitude du Soleil vue de la Terre ;
B'' la longitude géocentrique de la Comete ;
L'' la latitude géocentrique de la Comete ;
} lors de l'obſervation intermédiaire.

t le tems écoulé entre la premiere obſervation & l'obſervation intermédiaire ;

Il suit des équations du §. 582, que si l'on suppose

$$b = \sin L'' \cos L''' \left(r' \sin(B''' - A') - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B''' - A'') + r''' \sin(B''' - A''')\right)$$

$$- \sin L''' \cos L'' \left(r' \sin(B'' - A') - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B'' - A'') + r''' \sin(B'' - A''')\right);$$

$$c = \sin L' \cos L'' \left(r' \sin(B'' - A') - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B'' - A'') + r''' \sin(B'' - A''')\right)$$

$$- \sin L'' \cos L' \left(r' \sin(B' - A') - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B' - A'') + r''' \sin(B' - A''')\right);$$

L'on a

$$(1)\quad \Delta''' - \frac{c}{b}\Delta' = 0.$$

Substituant cette valeur de Δ''' dans l'équation (6) du §. précédent, elle deviendra

$$(2)\quad \left(1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{b}\left(\cos L' \cos L''' \cos(B''' - B') + \sin L' \sin L'''\right)\right)\Delta'^2$$

$$+ 2\Delta'\left(\cos L'\left(r''' \cos(B' - A''') - r' \cos(B' - A')\right)\right.$$

$$\left.+ \frac{c}{b}\cos L'''\left(r' \cos(B''' - A') - r''' \cos(B''' - A''')\right)\right) + r'^2 + r'''^2$$

$$- 2 r' r''' \cos(A''' - A') - \frac{4Ft''^2}{R' + R'''} = 0;$$

bien entendu que l'on a d'ailleurs

$$(3)\quad R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' r' \cos L' \cos(B - A))};$$

$$(4)\quad R''' = \sqrt{\left(r'''^2 + \frac{c^2}{b^2}\Delta'^2 - \frac{2c}{b}\Delta' r''' \cos L''' \cos(B''' - A''')\right)}.$$

Si l'on suppose de plus

$$a = \sin L' \cos L''' \left(r' \sin(B''' - A') - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B''' - A'') + r''' \sin(B''' - A''')\right)$$

$$- \sin L''' \cos L' \left(r' \sin(B' - A') - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B' - A'') + r''' \sin(B' - A''')\right);$$

Et que l'on nomme

- Δ' la distance de la Comete à la Terre lorsqu'elle se trouve à l'une des extrêmités de l'arc parabolique;
- Δ'' la distance de la Comete à la Terre lors de l'observation intermédiaire;
- Δ''' la distance de la Comete à la Terre lorsqu'elle se trouve à l'autre extrêmité de l'arc;

L'on aura

$$(5)\quad 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right)\Delta'' - \frac{a}{b}\Delta' = 0;\quad \Delta''' - 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right)\frac{c}{a}\Delta'' = 0.$$

Expressions plus exactes des quantités a, b, c, qui entrent dans les équations précédentes, lorsque les intervalles entre les observations ne sont pas considérables.

(594) On peut avoir des expressions de a, b, c, plus exactes que les

précédentes, lorſque l'intervalle des obſervations n'eſt pas conſidérable. En effet, ſi l'on nomme

dr'' l'accroiſſement du rayon vecteur de la Terre dans l'intervalle de l'obſervation intermédiaire à la derniere obſervation;

dA'' l'accroiſſement de la longitude du Soleil dans le même intervalle;

On aura

$$a = \sin L' \cos L''' \left((r''-dr'')\sin(B'''-A''+dA'') - 2\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B'''-A'') + (r''+dr'')\sin(B'''-A''-dA'') \right)$$
$$- \sin L''' \cos L' \left((r''-dr'')\sin(B'-A''+dA'') - 2\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3}\right) r'' \sin(B'-A'') + (r''+dr'')\sin(B'-A''-dA'') \right);$$

& de même pour b & pour c.

Mais en vertu du Théorême de Taylor,

$$\sin(B'''-A''+dA'') = \sin(B'''-A'') + dA'' \cos(B'''-A'');$$
$$\sin(B'''-A''-dA'') = \sin(B'''-A'') - dA'' \cos(B'''-A'');$$
$$\sin(B'-A''+dA'') = \sin(B'-A'') + dA'' \cos(B'-A'');$$
$$\sin(B'-A''-dA'') = \sin(B'-A'') - dA'' \cos(B'-A'');$$

Donc

$$a = 2\sin L' \cos L''' \left(\tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3} r'' \sin(B'''-A'') - dr'' dA'' \cos(B'''-A'') \right)$$
$$- 2\sin L''' \cos L' \left(\tfrac{1}{2}\frac{Ft^2}{R''^3} r'' \sin(B'-A'') - dr'' dA'' \cos(B'-A'') \right).$$

Maintenant, à cauſe de l'équation à l'orbite de la Terre, ſi l'on nomme

1 le demi-grand axe de l'orbite de la Terre;

Z la longitude du Soleil moins la longitude du périgée, correſpondante à l'obſervation intermédiaire;

l'on a

$$dr''(0{,}01680 \cos Z + 1) - 0{,}01680\, r'' \sin Z\, dA'' = 0;$$

donc $dr''\,dA'' = \dfrac{0{,}01680\, r'' \sin Z\, dA''^2}{0{,}01680 \cos Z + 1} = \dfrac{0{,}01680\, r'' \sin Z\, t^2 m^2}{0{,}01680 \cos Z + 1}$, en nommant d'ailleurs

m l'arc de l'orbite terreſtre décrit dans une minute de tems.

Et ſi l'on entend par

s l'arc décrit par la Terre dans une minute de tems lors des moyennes diſtances;

Comme $m = \dfrac{s}{r''^2}$; l'expreſſion de $dA''\,dr''$ deviendra

$$dr''\,dA'' = \frac{0{,}01680 \sin Z\, t^2 s^2}{r''^3(0{,}01680 \cos Z + 1)}.$$

Nous remarquerons que puiſque l'on entend par

F la force centrale du Soleil à la diſtance 1; c'eſt-à-dire le double du ſinus verſe de l'arc de l'orbite de la Terre parcouru pendant une minute, lorſque la Terre eſt dans ſes moyennes diſtances;

l'on a $s^2 = F$; & par conséquent $dr''dA'' = \frac{0,01680\, F t^2 \sin Z}{r''^3 (0,01680 \cos Z + 1)}$;

Mais relativement à l'orbite de la Terre, $(0,01680 \cos Z + 1) = 0,9997^2 \frac{1}{r''}$;

donc $dr''dA'' = \frac{0,016805\, F t^2 \sin Z}{r''^2}$; donc enfin, en n'ayant point égard au coefficient $\frac{2 F t^2}{r''^2 R''^3}$ qui, multipliant tous les termes, disparoît dans les équations,

$$a = \sin L' \cos L''' \left(\tfrac{1}{2} r''^3 \sin(B'''-A'') - 0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B'''-A'')\right) - \sin L''' \cos L' \left(\tfrac{1}{2} r''^3 \sin(B'-A'') - 0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B'-A'')\right);$$

$$b = \sin L'' \cos L''' \left(\tfrac{1}{2} r''^3 \sin(B'''-A'') - 0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B'''-A'')\right) - \sin L''' \cos L'' \left(\tfrac{1}{2} r''^3 \sin(B''-A'') - 0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B''-A'')\right);$$

$$c = \sin L' \cos L'' \left(\tfrac{1}{2} r''^3 \sin(B''-A'') - 0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B''-A'')\right) - \sin L'' \cos L' \left(\tfrac{1}{2} r''^3 \sin(B'-A'') - 0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B'-A'')\right).$$

Remarques sur les équations du §. 593.

(595) Les expressions précédentes de a, b, c, renferment chacune un petit terme multiplié par R''^3 ; ce qui paroît nécessiter la connoissance de la distance de la Comete au Soleil, lors de l'observation intermédiaire. Mais il est évident que ces termes étant multipliés par l'excentricité de l'orbite terrestre, sont très-petits vis-à-vis des termes multipliés par le rayon vecteur. Il ne reste donc véritablement à connoître que le terme $\frac{4 F t^2}{R' + R'''}$. On pourra, relativement à ce terme, faire usage des remarques que nous avons indiquées précédemment; c'est-à-dire, ou le négliger lors de la premiere approximation ; ou plutôt l'évaluer en concluant des observations les valeurs probables de R', R''', au moyen de la Table du §. 485. Au reste, dans les expressions de a, b, c, l'on pourra même évaluer les très-petits termes de la forme $-0,016805\, R''^3 \sin Z \cos(B'''-A'')$ d'après les considérations que nous venons de présenter. Nous remarquerons enfin que si l'on néglige ces termes, on retombe dans les expressions de a, b, c, du §. 582.

Nous venons de développer les équations dont nous ferons usage dans la détermination des trajectoires des Corps Célestes. Ces équations ont toute la généralité possible ; presque toutes sont rigoureusement démontrées ; & si quelques-unes ne sont que des relations approchées, j'ai fait voir que, dans les circonstances où l'on en fait usage, ces relations ont toute l'exactitude nécessaire pour la pratique. Je ne doute donc point que si leur usage découvroit quelqu'inexactitude dans les résultats, on ne doive l'attribuer à l'inexactitude des observations. Je vais maintenant passer à l'application de cette théorie ; mais je dois auparavant développer quelques considérations préliminaires.

CHAPITRE

CH PITRE NEUVIEME

De quelques conſidérations préliminaires au calcul des orbites des Corps Céleſtes.

IL eſt aiſé de ſentir, d'après ce que nous avons dit, que les obſervations qui ſervent à calculer les orbites des Corps Céleſtes exigent des préparations, avant d'être ſoumiſes au calcul. La méthode la plus générale parmi les Aſtronomes, pour déterminer les poſitions apparentes des Cometes, conſiſtant à obſerver les différences d'Aſcenſion droite & de Déclinaiſon de la Comete & d'une Etoile bien connue, il faut pouvoir conclure la Longitude & la Latitude de la Comete, de ſon Aſcenſion droite & de ſa Déclinaiſon obſervées; car, d'après les théories précédentes, c'eſt à l'Ecliptique que nous avons rapporté les mouvemens des Cometes. De plus, les obſervations ſont elles-mêmes compliquées d'illuſions dont il faut les dépouiller, lorſqu'on veut les rapporter à un plan immuable. D'ailleurs nous avons preſcrit d'avoir, autant qu'il eſt poſſible, des obſervations faites à des intervalles de tems égaux; & cette condition n'eſt pas toujours le réſultat immédiat des obſervations. C'eſt à obtenir toutes ces conditions que nous allons employer ce Chapitre.

ARTICLE PREMIER.

De quelques propoſitions trigonométriques dont nous ferons uſage dans la ſuite.

Quoique les Propoſitions que je me propoſe de démontrer ici, ſoient uniquement du reſſort de la trigonométrie ſphérique, & que, par conſéquent j'euſſe pu me diſpenſer d'en donner la démonſtration; j'ai cru cependant, attendu le grand uſage de ces propoſitions, que l'on me pardonneroit cette digreſſion.

Détermination du troiſieme côté d'un triangle ſphérique, lorſque l'on connoît les deux autres côtés du triangle, & l'angle compris entre ces côtés.

(596) Soient,

A, B, les côtés donnés d'un triangle ſphérique;
a l'angle compris entre les côtés A, B;
C le côté oppoſé à l'angle a;

Soit de plus

$$\Omega \text{ un angle tel que } \operatorname{cof} \Omega = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B)}}{\operatorname{fin} \frac{1}{2} (A + B)};$$

L'on a

$$(1)\ \sin\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\Omega.$$

Fig. 19. Pour démontrer cette propoſition, ſuppoſons une ſphere dont S eſt le centre, & ſur laquelle on a tracé le triangle ſphérique AaB. Dans ce triangle ſphérique, les côtés Aa, Ba ſont connus; ce ſont ceux que nous avons nommés A, B; l'angle a eſt pareillement connu; & l'on cherche à déterminer le côté AB, que nous avons nommé C.

Je ſuppoſe l'angle a au Zénith de la ſphere; je mene le rayon Sa. Par le centre S de la ſphere, j'éleve perpendiculairement au rayon Sa, un plan mSn; je prolonge les arcs aA, aB du triangle ſphérique AaB, juſqu'à ce qu'ils rencontrent le plan dont il vient d'être queſtion, en m & n. Par les points m & n, j'éleve perpendiculairement au plan mSn, un plan $mA'nB'$; je prolonge les rayons SA, SB de la ſphere, juſqu'à ce qu'ils rencontrent le plan $mA'nB'$ aux points A' & B', & je nomme 1 le rayon de la ſphere.

D'après cette conſtruction, il eſt évident que l'angle ASm eſt le complément du côté A; que l'angle BSn eſt le complément du côté B; que par conſéquent $mA' = \text{cotang.}\,A$; $nB' = \text{cotang.}\,B$; $SA' = \text{coſéc.}\,A = \frac{1}{\sin A}$; $SB' = \text{coſec.}\,B = \frac{1}{\sin B}$. De plus l'angle mSn eſt égal à l'angle a; le côté mn eſt égal à la corde qui ſoutend l'arc a, & par conſéquent il eſt égal à $2\sin\frac{1}{2}a$. D'ailleurs le côté AB du triangle ſphérique, que nous avons nommé C, a pour meſure l'angle en S du triangle rectiligne $A'SB'$; il ne s'agit donc que de déterminer ce dernier angle.

Dans le triangle rectiligne $A'SB'$, l'on a (trigonométrie rectiligne) $A'S^2 + B'S^2 - A'B'^2 - 2A'S \times B'S\cos A'SB' = 0$. De plus $A'B'$ eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectiligne dont les côtés ſont mn & $nB' - mA'$; donc

$$\cos A'SB' = \frac{A'S^2 + B'S^2 - mn^2 - (nB' - mA')^2}{2A'S \times B'S};\ \text{mais}\ A'S = \frac{1}{\sin A};\ B'S = \frac{1}{\sin B};$$

$$mn = 2\sin\tfrac{1}{2}a;\ nB' = \text{cotang}\,B = \frac{\cos B}{\sin B};\ mA' = \text{cotang}\,A = \frac{\cos A}{\sin A};$$

$$nB' - mA' = \frac{\sin A\cos B - \sin B\cos A}{\sin A\sin B};\ \text{donc}$$

$$\cos A'SB' = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B - 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2\frac{1}{2}a - (\sin A\cos B - \sin B\cos A)^2}{2\sin A\sin B}$$

$$= \frac{2 - \cos^2 A - \cos^2 B - 4\sin^2 A\sin^2 B + 4\sin^2 A\sin^2 B\cos^2\frac{1}{2}a - (\sin A\cos B - \sin B\cos A)^2}{2\sin A\sin B};$$

donc

$$(2)\ \cos A'SB' = \cos A\cos B - \sin A\sin B + 2\sin A\sin B\cos^2\tfrac{1}{2}a.$$

D'ailleurs (trigonométrie rectiligne) $\cos A'SB' = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A'SB'$; $\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B) = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(A+B)$; donc $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A'SB' = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(A+B) + 2\sin A\sin B\cos^2\frac{1}{2}a$; donc enfin

$$(3)\ \sin\tfrac{1}{2}A'SB' = \sqrt{\left(\sin^2\tfrac{1}{2}(A+B) - \sin A\sin B\cos^2\tfrac{1}{2}a\right)}.$$

Soit maintenant

Ω un angle tel que $\operatorname{cof}\Omega = \frac{\sqrt{(\operatorname{cof}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B)}}{\operatorname{fin} \frac{1}{2}(A+B)}$;

l'équation précédente deviendra

$$\operatorname{fin} \tfrac{1}{2} A'SB' = \operatorname{fin} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{fin} \Omega;$$

Ou enfin, en ſubſtituant à l'angle A'SB' ſa valeur C,

$$(4)\ \operatorname{fin} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{fin} \tfrac{1}{2}(A+B) \operatorname{fin} \Omega.$$

Application des formules précédentes à la détermination d'un angle quelconque d'un triangle ſphérique, lorſque l'on connoît les trois côtés de ce triangle.

(597) Les équations que nous venons de développer dans le paragraphe précédent, peuvent ſervir à réſoudre un cas aſſez compliqué de la trigonométrie ſphérique; c'eſt celui où étant donnés les trois côtés d'un triangle ſphérique, on cherche un des angles quelconques.

Soient

A, B, C les trois côtés du triangle ſphérique;
a l'angle cherché que je ſuppoſe oppoſé au côté C.

Il ſuit de l'équation (2) du §. précédent, que l'on a

$$(1)\ \operatorname{cof} C - \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B + \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B - 2 \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B \operatorname{cof}^2 \tfrac{1}{2} a = 0.$$

Mais $\operatorname{cof} A \operatorname{cof} B - \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B = \operatorname{cof}(A+B)$, donc

$$(2)\ \operatorname{cof} C - \operatorname{cof}(A+B) - 2 \operatorname{fin} A \operatorname{fin} B \operatorname{cof}^2 \tfrac{1}{2} a = 0.$$

De plus (trigonométrie rectiligne) $\operatorname{cof} C - \operatorname{cof}(A+B) = 2 \operatorname{fin} \frac{1}{2}(A+B+C) \times \operatorname{fin} \frac{1}{2}(A+B-C)$ donc enfin

$$(3)\ \operatorname{cof} \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{(\operatorname{fin} \frac{1}{2}(A+B+C) \operatorname{fin} \frac{1}{2}(A+B-C))}}{\sqrt{(\operatorname{fin} A \operatorname{fin} B)}}.$$

Application des théories précédentes à la détermination de l'angle adjacent à l'un des côtés d'un triangle ſphérique, lorſque l'on connoît deux des côtés de ce triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés.

(598) Les équations précédentes peuvent également ſervir à réſoudre un autre cas aſſez compliqué de la trigonométrie ſphérique; c'eſt celui où étant donnés deux des côtés d'un triangle ſphérique, & l'angle compris entre ces deux côtés, l'on cherche l'angle adjacent à l'un quelconque des côtés. Soient

A, B les côtés donnés du triangle ſphérique;
a l'angle connu compris entre les côtés A; B;
C le troiſieme côté inconnu du triangle ſphérique;
b l'angle adjacent cherché que je ſuppoſe oppoſé au côté B.

Puiſque l'angle *b* eſt oppoſé au côté B, & qu'il eſt compris entre les côtés A & C, il ſuit de l'équation (2) du §. 597, que l'on a

$$\operatorname{cof} B - \operatorname{cof}(A+C) - 2 \operatorname{fin} A \operatorname{fin} C \operatorname{cof}^2 \tfrac{1}{2} b = 0.$$

Mais (trigonométrie rectiligne) $2\cos^2\frac{1}{2}b = 1 + \cos b$; de plus $\cos(A+C) = \cos A \cos C - \sin A \sin C$; donc $\cos B - \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b = 0$. Dans le triangle dont il s'agit, l'on a $\sin C : \sin a :: \sin B : \sin b$; donc $\cos B - \cos A \cos C - \sin A \sin B \sin a \cot b = 0$; mais il suit de l'éq. (1) du §. 597 que $\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B + 2 \sin A \sin B \cos^2 \frac{1}{2} a = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos a$, puisque d'ailleurs (trigonométrie rectiligne) $\cos^2 \frac{1}{2} a = 1 + \cos a$; donc enfin

$$(1)\quad \text{cotang}\, b = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B \cos a}{\sin B \sin a}.$$

Puisque généralement $\sin 45^d \sqrt{2} = \cos 45^d \sqrt{2} = 1$, on a l'équation suivante,

$$\sin B \sin a \,\text{cotang}\, b - \sin A \cos B \sin 45^d \sqrt{2} + \cos A \sin B \cos a \cos 45^d \sqrt{2} = 0;$$

Soit maintenant

Ω un angle tel que $\text{Tang}\,\Omega = \text{cotang}\, A \,\text{tang}\, B \cos a$;

l'équation (1) deviendra

$$(2)\quad \text{cotang}\, b = \frac{\sin A \,\text{cotang}\, B \sin(45^d - \Omega)\sqrt{2}}{\sin a \cos \Omega}.$$

$$(3)\quad \text{Tang}\, b = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sin a \,\text{tang}\, B \cos\Omega}{\sin A \sin(45^d - \Omega)}.$$

J'ai donné quelqu'étendue aux propositions précédentes, parce qu'elles résolvent les cas les plus compliqués de la trigonométrie sphérique.

ARTICLE II.

De la relation entre la Longitude, la Latitude, la Déclinaison & l'Ascension droite d'une Planete.

(599) Je me propose de déterminer, dans cet Article, la relation entre la Longitude, la Latitude, la Déclinaison & l'Ascension droite d'une Planete.

Pour faire voir comment la Longitude & la Latitude d'une Planete se déduisent de la Déclinaison & de l'Ascension droite qui sont immédiatement données par l'observation; par l'Astre menons deux grands cercles qui se terminent l'un au pole de l'Équateur, & l'autre au pole de l'Ecliptique. Il est clair que l'on aura un triangle sphérique, dont les trois côtés seront; le premier, la distance de l'Astre au pole de l'Equateur; le second, la distance de l'Astre au pole de l'Ecliptique; & le troisieme sera égal à l'Obliquité de l'Ecliptique. Dans ce triangle, l'angle au pole de l'Équateur est égal à l'Ascension droite de l'Astre augmentée de 90^d; puisque le grand cercle de la sphere qui passe par les poles de l'Equateur & de l'Ecliptique, répond au Solstice d'Hyver, c'est-à-dire, à 270^d d'Ascension droite.

Par la même raison, l'angle au pole de l'Ecliptique est égal à la Longitude de l'Astre augmentée de 90^d.

Il ſuit de cette conſtruction, que comme l'angle au pole de l'Ecliptique eſt oppoſé au côté qui meſure la diſtançe de l'Aſtre au pole de l'Equateur, & que l'angle au pole de l'Equateur eſt oppoſé au côté qui meſure la diſtance de l'Aſtre au pole de l'Ecliptique, l'on a ſin (diſtance de l'Aſtre au pole de l'Equateur) eſt à ſin (longitude de l'Aſtre $+ 90^d$) comme ſin (diſt. de l'Aſtre au pole de l'Ecliptique) eſt à ſin (Aſcenſion droite $+ 90^d$); mais ſin (diſt. de l'Aſtre au pole de l'Equat.) $=$ coſ (Déclinaiſon de l'Aſtre); ſin (diſtance de l'Aſtre au pole de l'Ecliptique) $=$ coſ (Latitude de l'Aſtre); ſin (Longitude de l'Aſtre $+ 90^d$) $=$ coſ (Longitude de l'Aſtre); ſin (Aſcenſion droite de l'Aſtre $+ 90^d$) $=$ coſ (Aſcenſion droite de l'Aſtre); donc d'abord

$$(1)\ \text{coſ (Latitude de l'Aſtre) coſ (Longitude de l'Aſtre)} - \text{coſ (Déclinaiſon de l'Aſtre) coſ (Aſcenſion droite)} = 0.$$

On connoîtra donc la Longitude de l'Aſtre, lorſque l'on aura déterminé ſa Latitude.

(*600*) Pour déterminer ce dernier élément, on remarquera que l'arc qui meſure la Latitude de l'Aſtre, ou plutôt ſa diſtance au pole boréal de l'Ecliptique, eſt le troiſieme côté du triangle ſphérique que nous venons de conſidérer, dont on connoît deux côtés & l'angle compris entre ces deux côtés; c'eſt-à-dire, l'arc égal à l'Obliquité de l'Ecliptique, la diſtance de l'Aſtre au pole de l'Equateur & l'Aſcenſion droite de l'aſtre augmentée de 90^d. Si donc, d'après ce qui a été démontré dans le §. 596 l'on ſuppoſe

$$\text{coſ}\,\Omega = \frac{\sqrt{(\text{coſ}^2 \tfrac{1}{2}(90^d + \text{aſcenſion droite}) \text{ſin(obliquité de l'Écl.) ſin(diſt. de l'aſtre au pole bor. de l'Eq.)})}}{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{obliquité de l'Ecliptique} + \text{diſtance de l'aſtre au pole boréal de l'Equateur})}$$

L'on aura

$$(1)\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{diſtance de l'Aſtre au pole boreal de l'Ecliptique}) = \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{obliquité de l'Ecliptique} + \text{diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Equateur})\ \text{ſin}\,\Omega.$$

(*601*) Par des raiſonnemens analogues, ſi l'on vouloit conclure la diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Equateur d'après la connoiſſance de ſa Longitude & de ſa Latitude, l'on auroit, en ſuppoſant

$$\text{coſ}\,\Omega = \frac{\sqrt{(\text{coſ}^2 \tfrac{1}{2}(90^d + \text{longit. de l'aſtre}) \text{ſin (obliquité de l'Eclipt.) ſin (diſt. aſtre au pole bor. de l'Ecl.)})}}{\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{obliquité de l'Ecliptique} + \text{diſtance de l'aſtre au pole boréal de l'Ecliptique})}.$$

$$(1)\ \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Equateur}) = \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{obliquité de l'Ecliptique} + \text{diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Ecliptique})\ \text{ſin}\,\Omega.$$

E X E M P L E.

(*602*) L'on ſuppoſe qu'un Aſtre ait 30^d d'Aſcenſion droite, 20^d de Déclinaiſon boréale, & que l'Obliquité de l'Ecliptique ſoit de $23^d\ 28'$, l'on demande la Latitude & la Longitude de cet Aſtre.

Solution. Puiſque l'Aſcenſion droite eſt ſuppoſée de 30^d; $\tfrac{1}{2}$ ($90^d +$ aſcenſion droite) $= 60^d$. D'ailleurs puiſque la Déclinaiſon de l'Aſtre eſt ſuppoſée de 20^d boréale, ſa diſtance au pole boréal de l'Equateur eſt de 70^d;

& comme de plus l'Obliquité de l'Ecliptique est de $23^d\ 28'$, $\frac{1}{2}$ (Obliquité de l'Ecliptique + dist. de l'Astre au pole boréal de l'Equateur) = $46^d\ 44'$.

Type du Calcul.

Ω

19·3979400..... log cos² 60ᵈ
9·6001181..... log sin 23ᵈ 28′
9·9729858..... log sin 70ᵈ
38·9710439
2
19·4855219
0·1377662.. compl. log. sin 46ᵈ 44′
9·6232881 ...log. cos Ω
Ω = 65ᵈ 9′ 50″

Distance de l'Astre au pole boréal de l'Ecliptique.

9·8622338....log. sin 46ᵈ 44′
9·9578528.....log. sin Ω
9·8200866.. log. sin ½ dist. astre au pole bor.
½ distance astre = 41ᵈ 43′ 40″
Distance de l'Astre = 82ᵈ 43′ 20″
Latitude de l'Astre = 7 16 40

Longitude.

9·9729858 .... log. cos Déclinaison
9·9375306 .... log. cos Ascension droite
0·0035130 .... compl. log. cos Latitude
9·9140294 .... log. cos Longitude
Longitude de l'Astre = 55ᵈ 7′ 30″.

Article III.

De la Précession & de la Nutation.

(603) Lorsque l'on observe une Planete, les observations sont affectées de différentes illusions dont il faut les dépouiller, lorsqu'on veut mettre une grande précision dans le calcul, & les rapporter à un même plan. Les sources de ces illusions peuvent se réduire à quatre principales; la Précession, la Nutation, l'Aberration & la Parallaxe. Je vais, dans cet Article, m'occuper des deux premieres sources d'erreur.

La précession est un changement annuel d'environ 50″,25 que l'on observe dans la Longitude du premier point d'Ariés. Ce changement est produit en partie par l'action du Soleil & de la Lune sur l'Equateur terrestre, & en partie par l'action des Planetes sur l'orbite terrestre. L'action réunie de ces Astres fait rétrograder l'intersection de l'orbite terrestre avec l'Equateur, en altérant tant soit peu l'angle formé par ces deux plans.

Comme ce changement est dû principalement à l'action de la Lune sur l'Equateur terrestre, & que les nœuds de l'orbite lunaire parcourent dans une période d'environ 19 ans, tous les points de l'Ecliptique, la Précession n'est point une quantité constante; il y a une petite variation dans cette Précession, qui dépend de la position du nœud ascendant de l'orbite lunaire.

La même cauſe fait également varier, d'une petite quantité périodique, l'Obliquité de l'Écliptique. Ce ſont ces petits mouvemens dus à l'action de la Lune diverſement modifiée par la poſition du nœud de ſon orbite, que l'on appelle la Nutation.

(604) Si l'on n'avoit égard qu'à l'action du Soleil & de la Lune; comme cette action ne s'exerce que ſur l'Equateur, le plan de l'orbite terreſtre ſeroit immuable; & les Latitudes des Etoiles ne ſeroient point affectées de la Préceſſion & de la Nutation. Les Latitudes des Etoiles devroient donc être les mêmes dans tous les ſiecles. La comparaiſon des obſervations anciennes avec les modernes a cependant fait voir qu'il eſt impoſſible de ne pas reconnoître un changement réel dans les Latitudes des Etoiles; on a donc été obligé d'avoir recours à l'action des Planetes ſur l'orbite terreſtre, & principalement à celle de Jupiter & de Vénus. Cette action des Planetes fait tant ſoit peu varier la poſition du plan de l'orbite terreſtre; & tandis que le Soleil & la Lune agiſſent ſur l'Equateur, l'action des autres Planetes ſe fait ſentir ſur le plan de l'orbite.

Je n'entreprendrai point d'expliquer le méchaniſme de ces perturbations. Cette théorie appartient à l'Aſtronomie-Phyſique. Je partirai donc des réſultats donnés par la théorie des forces centrales, comme d'élémens; & j'en conclurai les formules trigonométriques relatives à mon objet.

(605) Si l'on vouloit réſoudre le Problême dans ſa généralité, & embraſſer toute la ſuite des ſiecles, la ſolution ſeroit compliquée. Il faudroit alors diſtinguer les différentes actions des Corps céleſtes, les unes ſur l'Equateur, les autres ſur l'orbite terreſtre. Il faudroit ne point oublier que l'action du Soleil & de la Lune n'affecte que l'Equateur terreſtre dont elle fait rétrograder les nœuds ſur le plan de l'orbite de la Terre, en donnant d'ailleurs un petit mouvement d'oſcillation au plan de l'Equateur. Il faudroit également ne point oublier que l'action des Planetes ſur la Terre, & ſur-tout celle de Jupiter & de Vénus, s'exerce ſur le plan de l'orbite terreſtre qu'elle déplace; de ſorte que de ces actions combinées il réſulte un effet total ſur la poſition reſpective de l'Equateur & de l'Ecliptique.

Pour décompoſer ces effets, on imagineroit un plan immobile dans le Ciel, celui, par exemple, de l'orbite de la Terre à une certaine époque déterminée. On calculeroit, relativement à ce plan, la poſition de l'orbite terreſtre correſpondante à une autre certaine époque quelconque; c'eſt-à-dire, l'angle de la nouvelle orbite avec le plan immuable dont nous venons de parler, ainſi que la poſition des nœuds de ces deux plans. On calculeroit pareillement, relativement au plan immuable, la variation de poſition de l'Equateur terreſtre; & l'on concluroit de tous ces réſultats, la poſition relative de l'orbite terreſtre & de l'Equateur de la Terre, pour une certaine époque quelconque.

On doit ſentir que le Problême pris dans toute cette généralité,

ne pourroit manquer de conduire à des résultats compliqués. On a donc cherché à résoudre la question d'une maniere plus simple. Je vais donner une idée de cette théorie. Au reste les équations que je donnerai, pourront servir pendant un tems considérable, c'est-à-dire, pendant plus d'un siecle avant & après l'époque dont on sera parti; & après ce tems, il suffira de changer tant soit peu les coefficiens des équations, pour les rendre applicables à l'époque suivante.

De la variation de la distance d'une Etoile au pole boréal de l'Ecliptique, & de la variation de sa longitude, déduites de la théorie des forces centrales.

(606) Voici, en peu de mots, la maniere dont on a déduit de la théorie des forces centrales, la variation de la distance d'une Etoile quelconque au pole boréal de l'Ecliptique, & la variation de sa Longitude. Je me contenterai d'emprunter de la théorie de la Gravitation, le fait certain que la Précession des équinoxes est d'environ 50″,25 par Année, & la diminution de l'Obliquité de l'Ecliptique, de 0″,5. Je dois cependant prévenir que ce dernier résultat, relatif à la diminution de l'Obliquité de l'Ecliptique n'est pas exempt de toute incertitude; & qu'il dépend de la masse encore inconnue de Vénus.

Expression de la variation de la distance d'une Etoile, au pole boréal de l'Ecliptique.

(607) Pour avoir l'expression de la variation de la distance d'une Etoile au pole boréal de l'Ecliptique, je reprends l'équation (1) du §. 597, que je mets sous la forme suivante, attendu que $2\cos^2 \frac{1}{2}a = 1 + \cos a$,

$$(1)\quad \cos C - \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos a = 0.$$

Je différencie cette équation, & j'ai

$$(2)\quad \sin C\, dC - (\sin A \cos B - \cos A \sin B \cos a)\, dA$$
$$- (\sin B \cos A - \sin A \cos B \cos a)\, dB - \sin A \sin B \sin a\, da = 0.$$

L'équation (1) est à un triangle sphérique, dont les côtés sont A, B, C; & dont le côté C est opposé à l'angle a. Imaginons que le côté A soit très-petit; & cherchons la variation du côté C, en supposant que le côté B soit constant, que le côté A, ainsi que l'angle a, varient d'une petite quantité, & que les côtés C & B different assez peu pour que sin C & sin B puissent être regardés comme égaux. L'on aura alors, attendu que $dB = 0$, que les termes multipliés par sin A sont infiniment petits vis-à-vis de ceux multipliés par cos A, que $\cos A = 1$; l'on aura, dis-je,

$$(3)\quad dC + \cos a\, dA - \sin A \sin a\, da = 0.$$

Or

Or il eſt ſenſible que ſi d'une Etoile quelconque, on mene au pole de l'Ecliptique correſpondant à une certaine époque, un grand cercle, & que l'on ſuppoſe que le pole de l'Ecliptique ait un petit mouvement qui lui ſoit propre, de ſorte que dA ſoit la diſtance des deux poles correſpondans aux deux époques; que de plus da repréſente le mouvement de Préceſſion du premier point d'Ariès; dC repréſentera la variation de la diſtance de l'Etoile au pole boréal de l'Ecliptique; & l'on aura

$$\text{cof } a = \text{cof (longitude Etoile} + 90^d) = -\text{ſin (longitude Etoile)};$$

$$\text{ſin } a = \text{ſin (longitude Etoile} + 90^d) = \text{cof (longitude Etoile)}.$$

On conclura donc pour une Année, attendu que dans ce cas, $dA = -0'',5$; ſin $A = -$ ſin $0'',5$; $da = 50'',25$,

$$(4)\ d(\text{diſtance de l'Etoile au pole boréal de l'Ecliptique}) = -0'',5 \text{ ſin (longitude Etoile)} - 0'',00012 \text{ cof (longitude de l'Etoile)}.$$

Telle eſt l'expreſſion de la variation de la diſtance de l'Etoile au Pole boréal de l'Ecliptique, pour une Année.

Nous remarquerons que dans l'équation (4) le terme qui eſt multiplié par le ſinus de la longitude de l'Etoile, croît dans le rapport des tems; mais qu'il n'en eſt pas de même du ſecond terme de l'équation. Et en effet, ce ſecond terme étant multiplié par ſin A & par dA qui varient chacun dans la raiſon des tems, le produit croît comme le quarré des tems.

Si donc l'on nomme

n le nombre des Années écoulées depuis l'époque dont on part;

l'on aura

$$(5)\ d(\text{diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Ecliptique}) = -n \times 0'',5 \text{ ſin (longitude Etoile)} - n^2 \times 0'',00012 \text{ cof (longitude Etoile)}.$$

Au ſurplus, comme le terme $n^2 \times 0'',00012$ cof (longitude de l'Etoile) eſt un terme infiniment petit, on peut, ſans erreur ſenſible, même pour une longue ſuite d'Années, réduire l'équation (5) à la ſuivante,

$$(6)\ d(\text{diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Ecliptique}) = -n \times 0'',5 \text{ ſin (longitude Etoile)}.$$

Expreſſion de la variation de la longitude d'une Etoile.

(608) Pour déterminer l'expreſſion de la variation de la longitude de l'Etoile, conſidérons de nouveau le triangle dont les côtés ſont A, B, C, & cherchons la variation de l'angle b oppoſé au côté B que nous avons regardé comme conſtant. Dans ce triangle, l'on a ſin b : ſin B :: ſin a : ſin C; & par conſéquent ſin b ſin C — ſin a ſin B = 0; d'où l'on tire ſin C cof $b\,db$ + ſin b cof C dC — ſin B cof $a\,da$ = 0. Donc, attendu que l'on peut ſuppoſer ſin C = ſin B, cof b = cof a, ſin b = ſin a,

$$(1)\ db = da - \frac{\text{tang } a}{\text{tang C}} dC.$$

Mais tang $C = \frac{1}{\text{tang (latit. Aftre)}}$; tang $a = -\frac{}{\text{tang (longitude Aftre)}}$;
$dC = d$(diftance de l'Aftre au pole boréal de l'Ecliptique). Si donc l'on veut calculer la variation de la longitude pour une Année, attendu qu'alors $da = 50'',25$, l'on aura

$$(2)\ d(\text{longitude Etoile}) = 50'',25 - 0'',5 \text{ tang (latitude Etoile) cof (longit. Etoile)}.$$

Telle eft l'expreffion de la variation de la Longitude pour une Année; & fi l'on confidere un nombre n d'Années, l'on aura

$$(3)\ d(\text{longitude de l'Etoile}) = n \times 50'',25 - n \times 0'',5 \text{ tang (latitude Etoile) cof (longit. Etoile)}.$$

Les expreffions que nous venons de donner ne font que des expreffions moyennes; & fi l'on veut parvenir à des réfultats très-précis, il eft néceffaire de confidérer un nouvel élément qui dépend de la pofition du nœud-afcendant de l'orbite de la Lune, & qui fait varier tant foit peu l'expreffion de d(obliquité de l'Ecliptique), d(longitude de l'Etoile). Comme cette variation eft due uniquement à l'action de la Lune fur l'Equateur terreftre, la diftance de l'Etoile au pole boréal de l'Ecliptique n'en eft point affectée. Quant à la quantité dont elle affecte les grandeurs d(obliquité de l'Ecliptique), d(longitude de l'Etoile), voici les réfultats que l'on tire de la théorie des forces centrales.

$$(4)\ dd(\text{obliquité de l'Ecliptique}) = 9'' \text{cof (longitude du nœud afcendant de l'orbite lunaire)};$$

$$(5)\ dd(\text{longitude de l'Etoile}) = 23'' \text{fin (longitude du nœud afcendant de l'orbite lunaire)}.$$

(*609*) Il eft aifé de fentir l'ufage que l'on doit faire des équations précédentes, lorfque l'on calcule les obfervations d'un Aftre, & qu'on veut ramener ces obfervations à celles qui auroient été faites à une certaine époque déterminée. Suppofons en effet que l'on ait comparé l'Aftre, à une Etoile dont on connoît l'Afcenfion droite & la Déclinaifon actuelles, & qui, par conféquent, font affectées de la Nutation & de la Préceffion, relativement à l'époque dont il s'agit. On calculera, d'après les obfervations, la Latitude & la Longitude de l'Aftre qui feront alors affectées de la Nutation & de la Préceffion. On dépouillera cette Latitude & cette Longitude calculées, de la Nutation & de la Préceffion, au moyen des équations précédentes; & l'on aura les Longitudes & les Latitudes telles qu'elles auroient été obfervées à l'époque ancienne. Au refte, on doit fentir que l'exactitude des réfultats dépend principalement de l'exactitude des obfervations, & de l'exactitude de la pofition des Etoiles; il eft donc très-important d'avoir des catalogues précis, ou du moins, de bien vérifier la pofition des Etoiles auxquelles on compare les Cometes.

Généraliſation des équations précédentes.

(610) Il eſt facile de généraliſer les expreſſions précédentes, & d'avoir d'après nos recherches, l'expreſſion complete de l'obliquité de l'Ecliptique, de la diſtance d'une Etoile au pole boréal de l'Ecliptique, & de la Longitude de cette Etoile, pour un inſtant quelconque. Soit en effet

n le nombre des Années écoulées depuis l'époque dont on eſt parti;

L'on aura

(1) Obliquité de l'Ecliptique $=$ Obliquité de l'Ecliptique à l'époque dont on eſt parti $- n \times 0'',5 - 9''$ coſ (longitude du nœud aſcendant de l'orbite lunaire à l'époque dont on eſt parti) $+ 9''$ coſ (longitude du nœud aſcendant de l'orbite lunaire à l'inſtant pour lequel on calcule);

(2) Diſtance de l'Etoile au pole boréal de l'Ecliptique $=$ Diſtance de l'Etoile à l'époque dont on eſt parti $- n \times 0'',5$ ſin (longit. Etoile) $- n^2 \times 0'',00012$ coſ (longitude de l'Etoile);

(3) Longitude de l'Etoile $=$ Longitude de l'Etoile à l'époque dont on eſt parti $+ n \times 50'',25 - 23''$ ſin (longitude du nœud aſcendant de l'orbite lunaire à l'époque dont on eſt parti) $+ 23''$ ſin (longitude du nœud aſcendant de l'orbite lunaire à l'inſtant pour lequel on calcule) $- n \times 0'',5$ tang (Latitude de l'Etoile) coſ (Longitude de l'Etoile).

On doit ſentir maintenant la raiſon pour laquelle, lorſque l'époque dont on eſt parti commence à s'éloigner, il faut changer, les coefficiens des équations (2) & (3). En effet, quand cet intervalle devient conſidérable, les changemens en Latitude & en Longitude deviennent aſſez ſenſibles pour qu'il ſoit néceſſaire de ſubſtituer dans les coefficiens, les Longitudes & les Latitudes actuelles, aux anciennes Longitudes & Latitudes.

(611) Il n'eſt pas inutile de donner un nouveau développement au principe ſur lequel ſont fondées les équations des paragraphes précédens. En général cette théorie a pour baſe la conſidération ſuivante.

Les obſervations & les calculs tirés des forces centrales, démontrent également que le pole de l'Ecliptique répond ſenſiblement aux mêmes Etoiles; de ſorte que tandis que le Pole de l'Equateur, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune ſur l'Equateur terreſtre, décrit autour du pole de l'Ecliptique, un cercle d'environ 23° 28', en vingt-ſix mille ans, le pole de l'Ecliptique eſt ſenſiblement immobile, ou au moins, il décrit un très-petit cercle autour d'un point fixe qui n'eſt pas encore bien déterminé. Comme le rayon de ce dernier cercle eſt très petit; lorſque l'on conſidere un petit intervalle de tems, relativement à la période de la Préceſſion, l'on confond le centre de ce cercle avec le lieu du pole de l'Ecliptique correſpondant au commencement de l'époque; & l'on imagine que le pole de l'Ecliptique, pendant l'intervalle dont il s'agit, ſe meut autour du pole primitif, d'un mouve-

ment angulaire égal au mouvement de Préceſſion ; tandis qu'il a un ſecond mouvement par lequel il s'éloigne du même pole, d'une quantité égale à la variation de l'Obliquité de l'Ecliptique. Ces baſes de calcul évidemment adoptées par les Aſtronomes & les Géometres, retombent généralement dans nos conſtructions.

Remarque ſur la Nutation & la Préceſſion en Aſcenſion droite & en Déclinaiſon.

(612) Je devrois naturellement parler ici de la Nutation & de la Préceſſion en Aſcenſion droite & en Déclinaiſon; car il eſt aiſé de ſentir que l'effet de la Nutation & de la Préceſſion doit affecter l'Aſcenſion droite & la Déclinaiſon des Aſtres. Je ne ſais cependant ſi ces conſidérations ſont bien utiles. En général, il m'a paru que l'on pouvoit ſuppléer à cette théorie, au moyen des formules précédentes. Au lieu donc d'employer de nouvelles formules, je penſerois qu'il eſt auſſi expédient dans la pratique, lorſque l'on veut calculer la Déclinaiſon & l'Aſcenſion droite d'une Etoile pour une certaine époque, de dépouiller les Longitudes & les Latitudes, de la Nutation & de la Préceſſion, par les formules des paragraphes précédens, & de conclure enſuite la Déclinaiſon & l'Aſcenſion droite, au moyen des équations de l'Article II.

ARTICLE IV.

De la Parallaxe.

(613) Je vais m'occuper, dans cet Article, de la Parallaxe. Ce que j'ai à dire ſur ce ſujet, ſe réduit à peu de choſe. Lorſqu'une Comete ou un Aſtre s'approchent aſſez près de la Terre pour que l'effet des Parallaxes devienne ſenſible, les lieux obſervés ſont affectés de ces Parallaxes, & l'on doit chercher à les dépouiller de cette ſource d'erreur. Je n'entrerai dans aucun détail ſur la maniere de dépouiller les obſervations, de l'effet des Parallaxes. Je ne pourrois que répéter ce que j'ai dit à ce ſujet dans mon premier Volume. Lors donc que de premiers calculs auront fait connoître que la diſtance de la Comete à la Terre eſt aſſez petite pour que les Parallaxes ſoient ſenſibles, tout ſe réduira à conclure de la diſtance de la Comete à la Terre, ſa Parallaxe horizontale polaire, au moyen de l'équation

$$(1)\ \text{ſin (Parallaxe horizontale polaire)} = \frac{\text{demi-petit axe de la Terre}}{\text{diſtance de la Comete à la Terre}}.$$

L'on dépouillera enſuite, par les méthodes de mon premier volume, la Déclinaiſon & l'Aſcenſion droite obſervées, de l'effet de la Parallaxe. L'on aura alors l'Aſcenſion droite & la Déclinaiſon de l'Aſtre dépouillées de la Parallaxe ; d'où l'on conclura la Longitude & la Latitude, également dépouillées de la Parallaxe.

Remarque sur les formules des §. 539 & 551 du premier Volume.

(614) Soit

1 le demi-petit axe de la Terre;
ρ le demi-grand axe;
l latitude corrigée de l'Observateur;
π la parallaxe horizontale polaire de l'Astre;
δ sa déclinaison apparente;
h son angle horaire apparent;
$R = \cos\delta \sin l - \rho \sin\delta \cos l \cos h$;
$S = \rho \cos l \sin h$.

Nous avons vu (§. 539) que l'on a les équations suivantes

(1) Déclinaison vraie de l'Astre = Déclinaison apparente + $R\pi$;

(2) Distance vraie de l'Astre au pole boréal de l'Equateur = Distance apparente — $R\pi$;

(3) Angle horaire vrai de l'Astre = Angle horaire apparent — $\frac{S\pi}{\cos\delta}$;

(4) Ascension droite vraie de l'Astre = Ascension droite apparente + $\frac{S\pi}{\cos\delta}$.

Soit de plus

δ' la déclinaison vraie de l'Astre;
h' son angle horaire vrai;
$R' = \cos\delta' \sin l - \rho \sin\delta' \cos l \cos h'$;
$S' = \rho \cos l \sin h'$;
α un angle tel que $\text{Tang}\,\alpha = \sin\pi(\sin\delta' \sin l + \rho \cos\delta' \cos h' \cos l)$;

Nous avons vu (§. 551) que l'on a

(5) Déclinaison apparente = Déclinaison vraie — $\frac{R'\pi \cos 45^d \cos\alpha}{\sin(45^d - \alpha)}$;

(6) Angle horaire apparent = Angle horaire vrai + $\frac{S'\pi \cos 45^d \cos\alpha}{\sin(45^d - \alpha)}$.

Nous avons changé les signes des derniers termes des équations (3), (4) & (6), attendu l'erreur qui s'est glissée dans le premier Volume, relativement aux signes de ces termes.

(615) Ces équations, qui sont celles que l'on a coutume de donner en Astronomie, renferment une petite inexactitude résultante de la maniere dont on a composé les expressions précédentes. En effet, pour avoir ces expressions, on a ajouté ou soustrait des quantités sujettes à la Parallaxe, les Parallaxes de ces quantités; ce qui est en général suffisamment exact, vu la petitesse de ces Parallaxes. Si l'on veut cependant éviter cette inexactitude, on y parviendra en considérant les Parallaxes, comme de petits arcs dont les calculs déterminent les sinus; & en calculant les sinus & les cosinus des quantités totales, par les formules trigonométriques. On parviendra par là aux résultats suivans.

Soit

A un angle tel que $\sin A = S \sin \pi$;

B un angle tel que $\sin B = R \sin \pi$;

L'on aura

(1) cos(Distance vraie de l'Astre au pole boréal de l'Equateur) = cos(distance apparente — B) cos A.

Soit

$$C \text{ un angle tel que } \sin C = \frac{\sin A}{\sin(\text{Distance vraie de l'Astre au pole bor. de l'Equat.})}.$$

L'on aura

(2) Angle horaire vrai = Angle horaire apparent — C;

(3) Ascension droite vraie = Ascension droite apparente + C.

Soit pareillement, en conservant la valeur de α du §. précédent,

$$B' \text{ un angle tel que tang } B' = \frac{R' \sin \pi \cos \alpha \cos 45^d}{\sin(45^d - \alpha)};$$

$$A' \text{ un angle tel que Tang } A' = \frac{S' \sin \pi \cos \alpha \cos 45^d}{\sin(45^d - \alpha)};$$

L'on aura

(4) cos (distance apparente de l'Astre au pole boréal de l'Equateur) = cos(distance vraie + B') cos A';

Soit enfin

$$C' \text{ un angle tel que } \sin C' = \frac{\sin A'}{\sin(\text{distance appar. Astre au pole bor. de l'Equateur})}$$

L'on aura

(5) Angle horaire apparent = angle horaire vrai + C';

(6) Ascension droite apparente = ascension droite vraie — C'.

Pour rendre ces réflexions plus sensibles, considérons le premier cas dont nous venons de parler dans ce paragraphe; celui où l'on a conclu la distance vraie de l'Astre au pole boréal de l'Equateur, ainsi que son angle horaire vrai, de sa distance & de son angle horaire apparens. Imaginons le cercle horaire vrai & le cercle horaire apparent de l'Astre; ces cercles ne sont autre chose que des cercles de Déclinaison. Mettons P au pole, E au lieu vrai de l'Astre, E' au lieu apparent; & du lieu vrai E menons l'arc E'e perpendiculaire au cercle horaire apparent. Il est évident que l'on aura deux triangles sphériques PEE', PEe; que dans le triangle sphérique PEE', le côté PE sera la distance vraie de l'Astre au pole boréal; le côté PE' sa distance apparente; que l'Angle en P sera la différence entre l'Angle horaire vrai & l'Angle horaire apparent; que d'après nos constructions, le côté Pe a pour sinus S sin π, (c'est l'arc que nous avons nommé A); que l'arc E'e a pour sinus R sin π (c'est celui que nous avons nommé B); & comme la distance vraie de l'Astre au

pole boréal, est l'hypothénuse du triangle rectangle PE*e* dont les côtés sont respectivement A, & la distance apparente au pole boréal — B ; l'équation (1) est démontrée.

Il est également évident que dans le triangle sphérique PE*e* rectangle en *e*, l'on a sin angle en P : sin E*e* :: 1 : sin PE ; mais l'angle en P est la différence des angles horaires vrais apparens, (c'est celui que nous avons nommé C) ; donc

$$\sin C = \frac{\sin A}{\sin(\text{Distance vraie de l'Astre au pole bor. de l'Equateur})};$$

& les équations (2) & (3) sont démontrées.

La même Analyse s'applique aux équations (4), (5) & (6).

ARTICLE V.

De l'Aberration.

Principe fondamental du calcul de l'Aberration.

(616) L'Aberration est un des Phénomenes dont la découverte ait le plus fait d'honneur à l'Astronomie moderne. Cette découverte est due à M. Bradley ; voici en quoi consiste cette théorie.

Sans entrer dans aucun détail sur l'examen des preuves qui établissent que la lumiere se transmet à la maniere des projectiles ; de sorte que l'on peut regarder un rayon quelconque émané d'un corps lumineux, comme une suite de globules qui viennent frapper notre œil avec une très-grande vîtesse ; sans discuter les objections que l'on a proposées contre ce systême, & les réponses que l'on a faites à ces objections ; il me suffit de dire qu'incontestablement les phénomenes de la lumiere s'expliquent tous dans l'hypothese que nous venons de présenter. Nous partirons donc de cette hypothese, que nous regarderons presque comme une vérité démontrée.

Non-seulement le systême de l'émission de la lumiere à la maniere des projectiles, explique d'une maniere satisfaisante, tous les phénomenes observés, on a même déterminé le rapport de la vîtesse de la lumiere, à celle de la Terre dans son orbite ; voici les élémens de cette détermination.

Supposons que l'on observe une suite d'Eclipses de Satellites de Jupiter, dans les différentes positions de cette Planete relativement à la Terre ; il est évident que si la lumiere se transmet à la maniere des projectiles, comme les distances de Jupiter à la Terre varient suivant les différentes positions de cette Planete, il y aura nécessairement dans les observations, une accélération & un retardement périodiques, dus à la variation des distances. Et si, par exemple, l'on part de la distance moyenne de Jupiter à la Terre ; les observations des Eclipses des Satel-

lites paroîtront accélérées, lors de l'opposition de Jupiter, de tout le tems employé par la lumiere à parcourir l'espace dont la distance de Jupiter aura varié, c'est-à-dire, le rayon de l'orbite de la Terre. Ce sera le contraire, lors de la conjonction de Jupiter avec le Soleil. Il y aura donc, de l'opposition à la conjonction, une variation dans les observations, égale au tems employé par la lumiere à parcourir le diametre de l'orbite terrestre. Or c'est ce que les observations ont démontré; & l'on a trouvé que la lumiere emploie 16′ 15″ à parcourir le diametre de l'orbite terrestre, de sorte que sa vitesse est à celle de la Terre dans ses moyennes distances, comme 10313 est à 1.

Examinons ce qui suit de cette théorie. La lumiere émanée d'un corps lumineux, par exemple, du Soleil ou d'une Etoile, vient frapper l'œil de l'Observateur avec une vîtesse égale à 10313, dans la direction de la ligne qui joint l'Astre & l'Observateur. Mais l'Observateur a lui-même, dans son orbite, une vîtesse égale à 1. Il résulte donc, en vertu de la décomposition des forces, une impression contre l'œil de l'Observateur, égale à celle qui seroit produite par un corps dont la vîtesse seroit de 10313 dans le sens de la droite qui joint l'Astre & la Terre, & qui de plus auroit une vîtesse $= 1$, dans la direction opposée à celle de l'Observateur. Le corps lumineux sera vu par l'Observateur; non dans sa direction vraie, mais dans une direction moyenne, diagonale du parallélogramme dont les côtés seront respectivement comme 10313 à 1, & qui feront entr'eux un angle égal à l'angle que fait la direction du mouvement de la Terre dans son orbite, avec la ligne qui joint l'Astre & la Terre.

De l'Aberration du Soleil.

Fig. 20. (617) Pour déterminer l'Aberration du Soleil, soit T la Terre, S le Soleil, ♈♎♋♑ le plan de l'Ecliptique. Menons de la Terre, la ligne ST au centre du Soleil; menons pareillement par la Terre, la ligne TD qui représente la direction du mouvement de la Terre, & qui par conséquent est sensiblement perpendiculaire à la ligne ST; menons enfin la ligne T*t* parallele à la droite passant par le Soleil & par le premier point d'Ariès. Il est évident que la lumiere du Soleil arrive à l'Observateur, suivant la direction de la droite ST qui joint les centres du Soleil & de la Terre; & que l'œil de l'Observateur est frappé dans cette direction, avec une vîtesse $= 10313$, tandis qu'en vertu du mouvement de l'Observateur dans son orbite, l'œil est frappé dans la direction DT avec une vîtesse $= 1$. La lumiere paroîtra donc à l'Observateur, venir dans la direction σTt, de sorte que le Soleil paroîtra moins avancé, dans son orbite, de tout l'angle $ST\sigma$, qui a pour expression de sa tangente $\frac{1}{10313}$ $= 0,000097189$; c'est-à-dire, qu'il paroîtra moins avancé d'environ 20″ qu'il ne l'est réellement, puisque $0,000097189 = \text{tang } 20''$.

Telle est l'expression de l'Aberration du Soleil. Cette Aberration est

sensiblement

ſenſiblement conſtante, puiſque la vîteſſe de la lumiere eſt conſtante; & que la vîteſſe de la Terre dans ſon orbite eſt ſenſiblement la même pour tous les points de l'orbite. Dans la rigueur géométrique, on devroit admettre une petite différence dans l'Aberration, dépendante de la poſition de la Terre; car, rigoureuſement parlant, le rapport de la vîteſſe de la lumiere à la vîteſſe de la Terre dans ſon orbite, n'eſt pas le même pour tous les points de l'orbite; mais on n'a point égard à cette légere inexactitude. Comme l'Aberration du Soleil eſt une quantité ſenſiblement conſtante pour tous les points de l'orbite, & qu'elle affecte de la même maniere les différens lieux du Soleil, on a negligé juſqu'ici cette correction commune à tous les lieux ſolaires.

De l'Aberration des Etoiles.

(618) Pour déterminer l'aberration des Etoiles, ſoit T la Terre; S le Soleil; ♈♋♎♑ le plan de l'Ecliptique; E une Etoile; ET la droite qui joint l'Etoile & le centre de la Terre; E′ la projection de l'Etoile ſur le plan de l'Ecliptique; E′T la droite qui joint la Terre & la projection de l'Etoile ſur le plan de l'Ecliptique; T*t* la droite menée par la Terre parallélement à la droite paſſant par le Soleil & par le premier point d'Ariès; TD la direction du mouvement de la Terre. Il eſt ſenſible que l'angle ETE′ repréſente la latitude géocentrique de l'Etoile; que l'angle E′T*t* repréſente ſa longitude géocentrique; que de plus l'œil de l'Obſervateur eſt frappé dans la direction ET, avec une vîteſſe = 10313, tandis qu'il eſt frappé dans la direction DT, avec une vîteſſe = 1. Fig. 21.

Décompoſons d'abord la vîteſſe, ſuivant la direction ET. Il eſt ſenſible que la vîteſſe avec laquelle l'œil de l'Obſervateur eſt frappé ſuivant cette direction, ſe décompoſe ſuivant les directions EE′, E′T; de ſorte que l'œil de l'Obſervateur eſt frappé ſuivant la direction EE′, avec une vîteſſe = 10313 ſin (latitude de l'Etoile); & ſuivant la direction E′T, avec une vîteſſe = 10313 coſ (latitude de l'Etoile).

Décompoſons pareillement la vîteſſe DT = 1, ſuivant la ligne TE′, & ſuivant la perpendiculaire à cette ligne menée ſur le plan de l'Ecliptique. Il eſt ſenſible que la vîteſſe DT ſe décompoſera ſuivant les lignes Dδ, δT; de ſorte qu'en vertu du mouvement de l'Obſervateur dans ſon orbite, l'œil ſera frappé ſuivant la direction Dδ, avec une vîteſſe = ſin DTδ; & ſuivant la direction δT, avec une vîteſſe = coſ DTδ. Mais puiſque la droite DT fait un angle de 270^d avec le prolongement du rayon vecteur du Soleil; que le rayon vecteur du Soleil fait avec la droite T*t* menée parallélement à la droite paſſant par le Soleil & par le premier point d'Ariès, un angle égal à la longitude du Soleil; que de plus TE′ fait avec la même droite T*t*, un angle égal à la longitude géocentrique de l'Etoile; l'angle DTδ eſt évidemment égal à la

longitude du Soleil vue de la Terre + 270^d — la longitude de l'Etoile. L'œil de l'obſervateur ſera donc frappé ſuivant la direction Dδ, avec une vîteſſe = ſin (longitude du Soleil + 270^d — longitude Etoile) ; & ſuivant la direction δT, avec une vîteſſe = coſ (longitude du Soleil + 270^d — longitude Etoile). Voyons ce qui va réſulter de ces décompoſitions.

Expreſſion de l'Aberration en longitude.

(619) Puiſque l'œil de l'Obſervateur eſt frappé ſuivant la direction E'Tδ, avec une vîteſſe égale à 10313 coſ(latitude de l'Etoile) ; & ſuivant la direction Dδ, avec une viteſſe = ſin (longitude du Soleil + 270^d — longitude Etoile) ; l'Etoile paroîtra plus avancée en longitude, d'un angle qui a pour expreſſion $\frac{\text{ſin (longitude du Soleil} + 270^d - \text{longitude Etoile)}}{10313 \text{ coſ (latitude de l'Etoile)}}$ $= \frac{20'' \text{ ſin (longitude du Soleil} + 270^d - \text{longitude Etoile)}}{\text{coſ (latitude de l'Etoile)}}$.

Si donc l'on nomme

$$\alpha \text{ un angle} = \frac{20'' \text{ſin (longitude du Soleil} + 270^d - \text{longitude Etoile)}}{\text{coſ (latitude de l'Etoile)}};$$

on aura

(1) Longitude apparente de l'Etoile — longitude vraie de l'Etoile — $\alpha = 0$.

Nous remarquerons ici que cette concluſion s'accorde avec ce que nous avons dit (§. 617) ſur l'Aberration du Soleil. En effet, dans le cas du Soleil, puiſque l'Etoile ſe confond avec le Soleil, l'on a longitude du Soleil = longitude de l'Etoile; coſ(latitude de l'Etoile) = 1 ; donc $\alpha = -20''$; donc

Longitude apparente du Soleil = Longit. vraie — 20″.

Dans ces recherches, nous avons confondu la tangente de 20″, avec l'arc.

Expreſſion de l'Aberration en latitude.

(620) Puiſque l'œil de l'Obſervateur eſt frappé ſuivant la direction EE', avec une vîteſſe égale à 10313 ſin (latitude de l'Etoile), & ſuivant la direction δT, avec une vîteſſe = coſ (longitude du Soleil + 270^d — longit. Etoile); que d'ailleurs ſin (latitude de l'Etoile) = coſ (diſtance Etoile au pole boréal de l'Ecliptique), l'Etoile paroîtra plus éloignée du pole boréal de l'Ecliptique qu'elle ne l'eſt réellement, d'un angle qui a pour expreſſion $\frac{20'' \text{ coſ (longitude du Soleil} + 270^d - \text{longitude de l'Etoile)}}{\text{coſ (diſtance Etoile au pole boréal de l'Ecliptique)}}$.

Si donc l'on nomme

$$\beta \text{ un angle} = \frac{20'' \text{coſ(longit. du Soleil} + 270^d - \text{longit. Etoile)}}{\text{coſ(diſtance Etoile au pole boréal de l'Ecliptique)}};$$

L'on aura

(1) (Diſtance apparente de l'Etoile au pole boréal de l'Ecliptique) — diſtance vraie — $\beta = 0$.

Au moyen des équations précédentes, on démontrera facilement les différens théorêmes que l'on a multipliés sur l'Aberration ; ces théorêmes ne sont que des cas particuliers des équations précédentes.

De l'Aberration des Planetes & des Cometes.

(621) Il me reste à parler maintenant de l'Aberration des Planetes & des Cometes. La solution de cette question ne differe de celle relative aux Etoiles, qu'en ce que les Planetes ne sont pas toujours à une même distance par rapport à la Terre. On calculera donc l'Aberration des Planetes & des Cometes, par les formules qui servent à calculer l'Aberration des Etoiles. Il faudra seulement ne point oublier que, lorsque l'on aura dépouillé les latitudes & les longitudes observées de l'effet de l'Aberration, on n'aura pas la latitude & la longitude géocentriques de la Planete ou de la Comete pour l'instant précis de l'observation, mais pour un instant qui précede celui de l'observation, de tout le tems que la lumiere a employé à parvenir de la Planete ou de la Comete à la Terre.

Soit donc

1 la distance moyenne de la Terre au Soleil;

L'on aura

(1) Instant où la Planete avoit la latitude & la longitude géocentriques observées, dépouillées de l'Aberration = instant de l'observation — $8' 7'',5 \times$ distance de la Planete à la Terre.

(622) Cette derniere équation est utile lorsque l'on compare des observations d'une même Planete, faites dans des circonstances où ses distances à la Terre sont différentes, & l'on doit y avoir égard pour réduire ces observations à une même distance.

Dans cette équation, les distances de la Planete à la Terre doivent être évaluées en expression de la moyenne distance de la Terre au Soleil, que nous avons supposée = 1.

Sur une question rélative aux passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil.

(623) Lors des passages de Mercure & de Vénus sur le disque du Soleil, il est évident que si l'on considere, par exemple, un contact des limbes, l'instant où ce contact est observé sur la Terre, n'est pas celui où il a véritablement lieu. En effet, le moment du contact relativement à l'Observateur, est celui où il cesse d'arriver à son œil, des rayons émanés du limbe occulté. L'Observateur voit encore ce limbe, pendant tout le tems que le dernier globule de la lumiere non-intercepté par Mer-

cure ou Vénus, emploie à parcourir la distance de Mercure ou de Vénus à la Terre. L'on a donc, en nommant 1 la moyenne distance de la Terre au Soleil,

(1) Instant vrai du phénomene = Instant de l'observation
— 8′ 7″,5 distance de la Planete occultante à la Terre.

Cette équation a précisément la même forme que l'équation (1) du §. 621. D'où l'on voit, 1°. que l'on doit appliquer à l'instant vrai de l'observation des Phénomenes relatifs aux passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, la même correction qu'aux observations directes de ces Planetes, lors de leurs conjonctions inférieures; 2°. que pour les passages de Vénus, l'instant physique des Contacts précede de 2′ 42″ l'instant de l'observation faite sur la Terre, puisque la distance de Vénus à la Terre est alors $= \frac{1}{3}$; 3°. que le lieu du nœud, déduit de ces passages, est affecté de l'Aberration du lieu du Soleil; 4°. que pour les passages de Mercure, l'instant physique des contacts précede de 4′ 58″ l'instant de l'observation faite sur la Terre; & que le lieu du nœud, déduit de ces passages, est pareillement affecté de l'aberration du lieu du Soleil.

Ces remarques peuvent avoir leur application, lorsque l'on compare des observations faites à différentes époques, pour les ramener à une même hypothese de calcul.

ARTICLE VI.

Méthode pour conclure des observations faites à des intervalles de tems inégaux, celles qui auroient eu lieu à des intervalles égaux.

Nous avons prescrit dans les Chapitres précédens, d'avoir, autant qu'il est possible, des observations faites à des intervalles de tems égaux. Comme cette condition n'est pas toujours donnée immédiatement par les observations, nous nous proposons de donner une méthode, pour conclure des observations faites à des intervalles de tems inégaux, celles qui auroient véritablement eu lieu à des intervalles égaux.

Principe de la Méthode.

(624) Soit en general une équation quelconque de la forme suivante.

(1) $y =$ fonction de x.

Nous supposons que x étant donnée dans l'équation (1), on connoît toujours, par un moyen quelconque, la valeur de y correspondante.

Soient a, a', a'', a''' &c. les valeurs successives de x; a, a', a'', a''', &c.

les valeurs correspondantes de y. Cela posé, on formera la premiere suite

$$\frac{\alpha'-\alpha}{a'-a};\ \frac{\alpha''-\alpha'}{a''-a'};\ \frac{\alpha'''-\alpha''}{a'''-a''};\ \&c.$$

Soit $\beta=\frac{\alpha'-\alpha}{a'-a}$; $\beta'=\frac{\alpha''-\alpha'}{a''-a'}$; $\beta''=\frac{\alpha'''-\alpha''}{a'''-a''}$; $\beta'''=\frac{\alpha''''-\alpha'''}{a''''-a'''}$;

on formera la seconde suite

$$\frac{\beta'-\beta}{a''-a};\ \frac{\beta''-\beta'}{a'''-a'};\ \frac{\beta'''-\beta''}{a''''-a''};\ \&c.$$

Soit

$$\gamma=\frac{\beta'-\beta}{a''-a};\ \gamma'=\frac{\beta''-\beta'}{a'''-a'};\ \gamma''=\frac{\beta'''-\beta''}{a''''-a''};\ \&c.$$

on formera la troisieme suite

$$\frac{\gamma'-\gamma}{a'''-a};\ \frac{\gamma''-\gamma'}{a''''-a'};\ \&c.$$

Soit $\delta=\frac{\gamma'-\gamma}{a'''-a}$; $\delta'=\frac{\gamma''-\gamma'}{a''''-a'}$; &c.

on formera la quatrieme suite

$$\frac{\delta'-\delta}{a''''-a};\ \&c.$$

Soit enfin

$$\epsilon=\frac{\delta'-\delta}{a''''-a};\ \&c.$$

Et ainsi de suite; l'on aura, en entendant par

Y la valeur particuliere de y relativement à laquelle nous cherchons la valeur correspondante de x;

$$(2)\quad x=\alpha+(Y-a)\beta+(Y-a)(Y-a')\gamma+(Y-a)(Y-a')(Y-a'')\delta$$
$$+(Y-a)(Y-a')(Y-a'')(Y-a''')\epsilon+\&c.$$

Cette équation est fondée sur les propriétés des Différences finies.

Application de la méthode à la détermination des lieux des Planetes & des Cometes.

(625) Rien n'est plus simple que d'appliquer la méthode précédente aux cas particuliers que l'on considere. Supposons en effet qu'il soit question de déterminer par cette méthode, un lieu quelconque d'un Astre à un instant quelconque, pris toutefois dans les limites de la méthode. L'on entendra par $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, les différens lieux observés de l'Astre correspondans aux différens instans successifs; soit que ces lieux soient des longitudes géocentriques, des distances de l'Astre au pole boréal de l'Ecliptique, ou tout ce que l'on voudra.

α sera le premier lieu observé;

α' le second lieu observé;

α'' le troisieme lieu observé;

α''' le quatrieme lieu observé;

Et ainſi de ſuite.

$a' - a$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la ſeconde obſervation ;

$a'' - a'$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la ſeconde & la troiſieme obſervation ;

$a''' - a''$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la troiſieme & la quatrieme obſervation ;

$a'''' - a'''$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la quatrieme & la cinquieme obſervation ;

Et ainſi de ſuite.

$a'' - a$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la troiſieme obſervation ;

$a''' - a'$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la ſeconde & la quatrieme obſervation ;

$a'''' - a''$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la troiſieme & la cinquieme obſervation ;

Et ainſi de ſuite.

$a''' - a$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la quatrieme obſervation ;

$a'''' - a'$ ſera le nombre de minutes de tems écoulées entre la ſeconde & la cinquieme obſervation ;

Et ainſi de ſuite.

On aura donc les valeurs de $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ &c. $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ &c. $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ &c. $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$, &c. qui entrent dans l'équation (2) du §. précédent.

Si l'on déſigne maintenant par

Y les différens inſtans pour leſquels on veut calculer ;

x les différentes obſervations correſpondantes aux inſtans Y ;

l'on conclura les valeurs de x qui répondent aux différentes valeurs de Y, en remarquant que dans l'équation (2)

$Y - a$ eſt le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere obſervation & l'inſtant Y pour lequel on calcule ;

$Y - a'$ eſt le nombre de minutes de tems écoulées entre la ſeconde obſervation & l'inſtant Y pour lequel on calcule ;

$Y - a''$ eſt le nombre de minutes de tems écoulées entre la troiſieme obſervation & l'inſtant Y pour lequel on calcule ;

$Y - a'''$ eſt le nombre de minutes de tems écoulées entre la troiſieme obſervation & l'inſtant Y ;

Et ainſi de ſuite.

Tout eſt donc connu dans l'équation (2) du §. précédent.

Il eſt ſenſible que puiſque Y peut être quelconque, ſi l'on partage en

intervalles égaux, l'eſpace de tems écoulé entre les obſervations extrêmes, & que l'on donne ſucceſſivement à Y des valeurs relatives à cette hypotheſe, on aura les obſervations correſpondantes à des intervalles de tems égaux; & l'on aura ſatisfait à une des conditions principales exigées dans l'uſage de nos méthodes.

EXEMPLE.

(626) On ſuppoſe que l'on ait les obſervations ſuivantes; ce ſont celles de la ſeconde Comete découverte par M. Méchain en 1781.

		Longitudes géocentriques.	*Diſtances au pole boréal.*
14 Novembre 1781...	$8^h 29' 44''$ tems moyen...	$307^d 14' 45''$....	$34^d 42' 51''$.
17 Novembre 1781...	8 29 44..........	306 57 32....	45 42 48.
19 Novembre 1781...	8 29 44..........	306 51 26....	50 45 12.
22 Novembre 1781...	8 29 44..........	306 44 53....	56 10 59.
25 Novembre 1781...	8 29 44..........	306 41 37....	60 1 17.

On demande les équations aux longitudes géocentriques de la Comete, & à ſes diſtances au pole boréal, pour les différens inſtans compris entre le 14 Novembre 1781 $8^h 29' 44''$ tems moyen, & le 25 Novembre 1781 $8^h 29' 44''$ tems moyen

Solution. Cherchons d'abord l'équation aux diſtances de l'Aſtre au pole boréal.

Je remarque que dans la queſtion dont il s'agit, $\alpha = 34^d 42' 51''$; $\alpha' = 45^d 42' 48''$; $\alpha'' = 50^d 45' 12''$; $\alpha''' = 56^d 10' 59''$; $\alpha'''' = 60^d 1' 17''$; $a' - a = 4320'$; $a'' - a' = 2880'$; $a''' - a'' = 4320'$; $a'''' - a''' = 4320'$; $a'' - a = 7200'$; $a''' - a' = 7200'$; $a'''' - a'' = 8640'$; $a''' - a = 11520'$; $a'''' - a' = 11520'$; $a'''' - a = 15840'$; $\alpha' - \alpha = 10^d 59' 57''$; $\alpha'' - \alpha' = 5^d 2' 24''$; $\alpha''' - \alpha'' = 5^d 25' 47''$; $\alpha'''' - \alpha''' = 3^d 50' 18''$; donc $\beta = 9'',16597$; $\beta' = 6'',30000$; $\beta'' = 4'',52477$; $\beta''' = 3'',19861$; $\gamma = -0'',000398052$; $\gamma' = -0'',00024656$; $\gamma'' = -0'',00015349$; $\delta = 0'',0000000013150$; $\varepsilon = 0$; donc

(1) Diſtance de l'Aſtre au pole boréal $= 34^d 42' 51'' + 9'',16597 (Y - a)$
$- 0'',000398052 (Y - a)(Y - a')$
$+ 0'',0000000013150 (Y - a)(Y - a')(Y - a'')$.

Si l'on appliquoit la même analyſe à la détermination des longitudes géocentriques, on parviendroit au réſultat ſuivant

(2) Longitude géocentrique $= 307^d 14' 45'' - 0'',23912 (Y - a)$
$+ 0'',000015561 (Y - a)(Y - a')$
$- 0'',00000000091545 (Y - a)(Y - a')(Y - a'')$.

CHAPITRE DIXIEME.

Application des équations des Chapitres précédens, à la détermination des orbites des Planetes & des Cometes.

JE me propose, dans ce Chapitre, d'appliquer les équations des Chapitres précédens, à la détermination des orbites des Planetes & des Cometes. De ces orbites les unes sont fort alongées & approchent beaucoup de la Parabole ; les autres, au contraire, sont des Ellipses peu excentriques. Cette division donnée par la Nature, sera celle que je suivrai dans cette discussion. Je résoudrai pareillement les Problêmes accessoires aux questions principales.

ARTICLE PREMIER.

Détermination des orbites paraboliques.

(627) Je vais m'occuper, dans cet Article, des orbites fort alongées & qui se confondent sensiblement dans la partie que l'on considere, avec des arcs paraboliques. Ces orbites sont celles qu'en général les Cometes paroissent décrire lors de leurs apparitions. Si l'on réfléchit cependant que le mouvement dans la Parabole, résulte d'une combinaison unique entre les directions du mouvement & les vîtesses du projectile, tandis que l'Ellipse peut être engendrée par un nombre infini de combinaisons différentes, on sera pleinement convaincu que la théorie parabolique ne doit être considérée que comme une approximation ; puisqu'il est contre toute probabilité qu'une Comete décrive réellement une Parabole. Quoi qu'il en soit, comme la théorie du mouvement dans la Parabole sert au moins à approcher des véritables élémens des orbites des Cometes, je vais m'occuper d'abord de cette théorie.

Application des principes démontrés dans les Chapitres précédens, à la détermination de l'orbite de la seconde Comete découverte par M. Méchain en 1781.

(628) Comme il feroit difficile de faire entendre les préceptes, si l'on ne mettoit en même tems sous les yeux du Lecteur, l'application de ces préceptes à un exemple particulier, je vais m'occuper de la détermination de l'orbite de la seconde Comete découverte par M. Méchain en 1781. Voici les observations dont je partirai, & que je suppose dépouillées de toutes les erreurs dont nous avons parlé dans le Chapitre précédent.

Observations

Obſervations réduites.

	Tems moyen.	*Longitudes géocentriques.*	*Diſtances au pole boréal.*
14 Novembre 1781. . .	$8^h\ 29'\ 44''$.	$307^d\ 14'\ 45''$.	$34^d\ 42'\ 51''$.
17 Novembre	8 29 44.	306 37 32.	45 42 48.
19 Novembre	8 29 44.	306 51 26.	50 45 12.
22 Novembre	8 29 44.	306 44 53.	56 10 59.
25 Novembre	8 29 44.	306 41 37.	60 1 17.

De ces obſervations, l'on fera réſulter par la méthode du §. 625, des obſervations moyennes diſtantes entr'elles de deux jours, ou de 2880′; & qui répondront par conſéquent, aux 14 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$; 16 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$, & 18 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$, tems moyen.

TYPE du Calcul pour le 18 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$.

(629) Nous avons vu §. 626 que l'on a les équations ſuivantes.

(1) Diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Ecliptique $= 34^d\ 42'\ 51''$ $+ 9'',16597\ (Y - a) - 0'',000398052\ (Y - a)\ (Y - a')$ $+ 0'',000000013150\ (Y - a)\ (Y - a')\ (Y - a'')$.

(2) Longitude géocentrique $= 307^d\ 14'\ 45'' - 0'',23912\ (Y - a)$ $+ 0'',000015561\ (Y - a)\ (Y - a')$ $- 0'',0000000091545\ (Y - a)\ (Y - a')\ (Y - a'')$.

Si donc l'on calcule pour le 18 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$; comme $Y - a$ repréſente le nombre de minutes horaires écoulées entre l'inſtant Y & la premiere obſervation du 14 Novembre; que $Y - a'$ repréſente le nombre de minutes horaires écoulées entre l'inſtant Y & l'obſervation du 17 Novembre; que $Y - a''$ repréſente le nombre de minutes horaires écoulées entre l'inſtant Y & l'obſervation du 19 Novembre; l'on a $Y - a = 5760'$; $Y - a' = 1440'$; $Y - a'' = - 1440'$.

Diſtance de l'Aſtre au pole boréal de l'Equateur $= (1) + (2) - (3) - (4)$.		*Longitude géocentrique de l'Aſtre* $= (1) - (2) + (3) + (4)$.	
(1)	$34^d\ 42'\ 51''$	(1)	$307^d\ 14'\ 45''$
0·9621783. . . . log $9'',16597$		9·3786159 . . . . log $0'',23912$	
3·7604225. . . . log $(Y - a)$		3·7604225 . . . . log $(Y - a)$	
(2) 4·7226008.	+ 14 39 56	(2) 3·1390384	− 0 22 57
6·5999398. . . . log $0'',000398052$		5·1920375 . . . . log $0'',000015561$	
3·7604225. . . . log $(Y - a)$		3·7604225 . . . . log $(Y - a)$	
3·1583625. . . . log $(Y - a')$		3·1583625 . . . . log $(Y - a')$	
(3) 3·5187248.	− 0 55 2	(3) 2,1108225	+ 0 2 9

2·1189258. . . .	log 0″,00000000013150	0·9616346 . .	log 0″,0000000000091545
3·7604225. . . .	log (Y — a)	3·7604225 . .	log (Y — a)
5·1583625. . . .	log (Y — a')	3·1583625 . .	log (Y — a')
3·1583625 . . .	log (Y — a'')	3·1583625 . .	log (Y — a'')
(4) 2·1960733.	— 0 2 37	(4) 1·0387821	+ 0 0 11

Diſtance au pole boréal = . . 48^d 25′ 8″ Longitude géocentrique = 306^d 54′ 8″.

Obſervations moyennes réſultantes des obſervations du §. 628.

(630) Au moyen de ſemblables calculs, on fera réſulter des obſervations du §. 628, les obſervations moyennes ſuivantes

	Tems moyen.	Longitudes géocentriques.	Diſtances au pole boréal de l'Ecliptique.
14 Novembre 1781. .	8^h 29′ 44″. . . .	307^d 14′ 45″	34^d 42′ 51″.
16 Novembre	8 29 44	307 1 55.	42 34 14.
18 Novembre	8 29 44	306 54 8.	48 25 8.

Application des formules des §. 592, 593 & 594, aux obſervations moyennes du §. précédent.

(631) Si l'on conſidere trois obſervations faites à des intervalles de tems égaux, & que l'on nomme

L′, L″, L‴ les latitudes géocentriques de l'Aſtre, correſpondantes à ces trois obſervations ;

B′, B″, B‴ les longitudes géocentriques de l'Aſtre, correſpondantes à ces trois obſervations ;

r', r'', r''' les rayons vecteurs de la Terre, correſpondans à ces obſervations;

A′, A″, A‴ les longitudes du Soleil vues de la Terre, lors de ces trois obſervations;

R′, R″, R‴ les rayons vecteurs de l'Aſtre, lors de ces trois obſervations ;

Δ′, Δ″, Δ‴ les diſtances de l'Aſtre à la Terre correſpondantes aux trois obſervations ;

t le nombre de minutes de tems écoulées entre la premiere & la ſeconde obſervation ; entre la ſeconde & la troiſieme obſervation ;

F la force centrale du Soleil à la diſtance 1 ; cette force a pour meſure le double de l'eſpace parcouru d'un mouvement uniforme, en vertu de la viteſſe acquiſe dans un tems donné ; ainſi, par exemple, ſi l'on conſidere le mouvement de la Terre correſpondant à une minute de tems, F ſera le double du ſinus verſe de l'arc de l'orbite de la Terre parcouru pendant une minute ; & l'on aura F = 0,00000000014270 ; log. F = 0·1544396.

Z = A″ — la longitude du périgée du Soleil ;

Il ſuit de ce qui a été démontré dans le §. 594, que ſi l'on ſuppoſe

$\gamma = \frac{1}{2} r''^3 \sin(B' - A'') - 0{,}01680\, R''^3 \sin Z \cos(B' - A'')$;

$\gamma' = \frac{1}{2} r''^3 \sin(B' - A'') - 0{,}01680\, R''^3 \sin Z \cos(B'' - A'')$;

$\gamma'' = \frac{1}{2} r''^3 \sin(B''' - A'') - 0{,}01680\, R''^3 \sin Z \cos(B''' - A'')$;

$a = \gamma'' \sin L' \cos L''' - \gamma \sin L''' \cos L'$;

$b = \gamma'' \sin L'' \cos L''' - \gamma' \sin L''' \cos L'$;

$c = \gamma' \sin L' \cos L'' - \gamma \sin L'' \cos L'$;

L'on aura

$$\Delta''' - 2\left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right)\frac{c}{a}\Delta'' = 0;\ \Delta''' - \frac{c}{b}\Delta' = 0;\ 2\left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right)\Delta'' - \frac{a}{b}\Delta' = 0.$$

(632) Si l'on applique le calcul aux obſervations moyennes des 14, 16 & 18 Novembre 1781, $8^h\, 29'\, 44''$ tems moyen, l'on aura

$A' = 232^d\ 51'\ 30''$;	log	$\sin L' = 9{\cdot}9148736$;
$A'' = 234\ 52\ 40$;		$\sin L'' = 9{\cdot}8671396$;
$A''' = 236\ 53\ 59$;		$\sin L''' = 9{\cdot}8219568$;
$Z = 320\ 0\ 0$;		$\cos L' = 9{\cdot}7554806$;
$B' = 307\ 14\ 45$;		$\cos L'' = 9{\cdot}8302680$;
$B'' = 307\ 1\ 55$;		$\cos L''' = 9{\cdot}8739115$;
$B''' = 306\ 54\ 8$;		$\sin(B' - A'') = 9{\cdot}9791033$;
$L' = 55\ 17\ 9$;		$\sin(B'' - A'') = 9{\cdot}9785840$;
$L'' = 47\ 25\ 46$;		$\sin(B''' - A'') = 9{\cdot}9782665$;
$L''' = 41\ 34\ 52$;		$\cos(B' - A'') = 9{\cdot}4812960$;
$B' - A' = 74^d\ 23'\ 15''$;		$\cos(B'' - A'') = 9{\cdot}4863790$;
$B' - A'' = 72\ 22\ 5$;		$\cos(B''' - A'') = 9{\cdot}4893987$;
$B' - A''' = 70\ 20\ 46$;		$r' = 9{\cdot}9948860$;
$B'' - A' = 74\ 10\ 25$;		$r'' = 9{\cdot}9947060$;
$B'' - A'' = 72\ 9\ 15$;		$r''' = 9{\cdot}9945260$;
$B'' - A''' = 70\ 7\ 56$;		$t = 3{\cdot}4593925$;
$B''' - A' = 74\ 2\ 38$;		$\sin Z = 9{\cdot}8080675$;
$B''' - A'' = 72\ 1\ 28$;		
$B''' - A''' = 70\ 0\ 9$,		
$r' = 0{,}98829$;		
$r'' = 0{,}98789$;		
$r''' = 0{,}98748$;		
$t = 2880'$;		

Remarque ſur les expreſſions précédentes.

(633) Il eſt aiſé de voir que les expreſſions de γ, γ', γ'', a, b, c, ainſi que les rapports de Δ', Δ'', Δ''', ſuppoſent que l'on connoît la valeur de R'', qui eſt elle-même une fonction de la diſtance Δ'' de la Comete à la Terre lors de la ſeconde obſervation, puiſque l'on a

$$(1)\quad R'' = \sqrt{(r''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta'' r'' \cos L'' \cos(B'' - A''))}.$$

La ſolution du Problême ſuppoſe donc le Problême déja réſolu. Si l'on fait attention cependant que la quantité R'' n'entre que dans des termes multipliés par le petit coefficient 0,01680, ou par $\frac{1}{2} F t^2$, on

ſera tenté de conclure que dans preſque tous les cas, une erreur même aſſez grande ſur la véritable valeur de R'', ne peut produire qu'une petite erreur ſur le réſultat. Voici, au ſurplus, comment on peut ſe guider dans les valeurs que l'on donnera à R''.

Imaginons que lors de la ſeconde obſervation, l'on mene de la Terre au Soleil, de la Terre à la Comete, & de la Comete au Soleil, trois lignes droites; ces lignes formeront un triangle rectiligne. Dans ce triangle, la diſtance de la Terre au Soleil eſt la quantité que nous avons nommée r''; la diſtance de la Terre à la Comete eſt la quantité Δ''; & la diſtance de la Comete au Soleil eſt la quantité R''. Or il eſt aiſé de ſentir que dans ce triangle rectiligne, dans lequel on connoît le côté r'' & l'angle à la Terre formé par les droites menées de la Terre au Soleil & de la Terre à la Comete, la plus petite valeur que l'on puiſſe ſuppoſer à R'', eſt celle qui auroit lieu pour le triangle particulier dans lequel l'angle à la Comete feroit droit; puiſque c'eſt la plus courte des lignes que l'on puiſſe mener du Soleil, ſur le rayon viſuel mené de la Terre à la Comete. On aura donc la plus petite valeur préſumable de R'', en ſuppoſant droit dans le triangle rectiligne en queſtion, l'angle formé au centre de la Comete, par le rayon viſuel mené de la Terre à la Comete & par le rayon vecteur de la Comete. Cette ſuppoſition donne pour valeur de R'',

$$(2)\quad R'' = r'' \text{ ſin (élongation apparente de la Comete au Soleil)}.$$

C'eſt d'après de ſemblables conſidérations que nous avons calculé la Table du §. 586 à laquelle on pourra recourir.

Quant à l'élongation apparente de la Comete au Soleil, comme elle eſt l'hypothénuſe d'un triangle ſphérique rectangle dont les côtés ſont $B'' - A''$ & L'', l'on a, pour déterminer cette diſtance,

$$(3)\quad \text{coſ (élongation appar. de la Comete au Soleil)} = \text{coſ}\, L'' \,\text{coſ}\,(B'' - A'').$$

Dans le cas que nous conſidérons, l'on avoit $B'' - A'' = 72^d\, 9'\, 15''$; $L'' = 47^d\, 25'\, 46''$; donc l'élongation apparente de la Comete au Soleil étoit de $78^d\, 2'\, 4''$; & comme l'on avoit $r'' = 0{,}98789$, l'on conclura $R'' = 0{,}96642$. Nous ſuppoſerons donc, dans les premiers calculs, $R'' = 0{,}96642$; $\log R'' = 9{\cdot}9851640$; & nous conclurons $\frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3} = 0{,}00065570$; $2 \times \left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right) = 1{,}9986886$; $\log 2 \times \left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right) = 0{\cdot}3007476$.

TYPE du Calcul pour déterminer les rapports des diſtances de la Comete à la Terre.

(634) Dans les calculs ſuivans, nous ſuppoſerons, d'après les hypotheſes précédentes, $\log \frac{1}{2} r''^3 = 9{\cdot}6830880$; $\log 0{,}01680\, R''^3 \text{ ſin } Z = 7{\cdot}9889980$.

$\gamma = (1) + (2)$

9·6830880 . . . $\log \frac{1}{2} r''^3$
9·9791033 . . . $\log \sin (B' - A'')$
(1) 9·6621913 . . . . $+ 0{,}459400$

7·9889980 . . . $\log 0{,}01680\, R''^3 \sin Z$
9·4812960 . . . $\log \cos (B' - A'')$
(2) 7·4702940 . . . . $+ 0{,}002953$

$\gamma = \ldots\ldots + 0{,}462353$

$\text{Log}\, \gamma = 9{\cdot}6649738$

$\gamma'' = (1) + (2)$

9·6830880 . . . $\log \frac{1}{2} r''^3$
9·9782665 . . . $\log \sin (B''' - A'')$
(1) 9·6613545 . . . . $+ 0{,}458516$

7·9889980 . . . $\log 0{,}01680\, R''^3 \sin Z$
9·4893987 . . . $\log \cos (B''' - A'')$
(2) 7·4783967 . . . . $+ 0{,}003009$

$\gamma'' = \ldots\ldots + 0{,}461526$

$\text{Log}\, \gamma'' = 9{\cdot}6641953$

$b = (1) - (2)$

9·8671396 . . . $\log \sin L''$
9·8739115 . . . $\log \cos L'''$
9·6641953 . . . $\log \gamma''$
(1) 9·4052464 . . . . $+ 0{,}254242$

9·8219568 . . . $\log \sin L'''$
9·8302680 . . . $\log \cos L''$
9·6644905 . . . $\log \gamma'$
(2) 9·3167153 . . . . $- 0{,}207356$

$b = \ldots\ldots + 0{,}046886$

$\text{Log}\, b = 8{\cdot}6710432$

8·7987592 . . . $\log c$
1·3289568 . . . compl. $\log b$

0·1277110 . . . $\log \frac{c}{b}$

9·0375540 . . . $\log a$
1·3289568 . . . compl. $\log b$
9·6992524 . . . compl. $\log 2\left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right)$

0·0657632 . . . $\log \frac{1}{2\left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right)} \times \frac{a}{b}$

$\gamma' = (1) + (2)$

9·6830880 . . . $\log \frac{1}{2} r''^3$
9·9785840 . . . $\log \sin (B'' - A'')$
(1) 9·6616720 . . . . $+ 0{,}458851$

7·9889980 . . . $\log 0{,}01680\, R''^3 \sin Z$
9·4863790 . . . $\log \cos (B'' - A'')$
(2) 7·4753770 . . . . $+ 0{,}002988$

$\gamma' = \ldots\ldots + 0{,}461839$

$\text{Log}\, \gamma' = 9{\cdot}6644905$

$a = (1) - (2)$

9·9148736 . . . $\log \sin L'$
9·8739115 . . . $\log \cos L'''$
9·6641953 . . . $\log \gamma''$
(1) 9·4529804 . . . . $+ 0{,}283779$

9·8219568 . . . $\log \sin L'''$
9·7554806 . . . $\log \cos L'$
9·6649738 . . . $\log \gamma$
(2) 9·2424112 . . . . $- 0{,}174747$

$a = \ldots\ldots + 0{,}109032$

$\text{Log}\, a = 9{\cdot}0375540.$

$c = (1) - (2)$

9·9148739 . . . $\log \sin L'$
9·8302686 . . . $\log \cos L''$
9·6644905 . . . $\log \gamma'$
(1) 9·4096321 . . . . $+ 0{,}256822$

9·8671396 . . . $\log \sin L''$
9·7554806 . . . $\log \cos L'$
9·6649738 . . . $\log \gamma$
(2) 9·2875940 . . . . $- 0{,}193907$

$c = \ldots\ldots + 0{,}062915$

$\text{Log}\, c = 8{\cdot}7987542$

8·7987542 . . . $\log c$
0·3007476 . . . $\log 2\left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right)$
0·9624460 . . . compl. $\log a$

0·0619478 . . . $\log 2\left(1 - \frac{\frac{1}{2} F t^2}{R''^3}\right) \frac{c}{a}$

$\Delta''' = 1{,}34187\, \Delta'$;
$\Delta''' = 1{,}15331\, \Delta''$;
$\Delta'' = 1{,}16349\, \Delta'$;

Nous avons donc les rapports entre Δ', Δ'', Δ'''.

Application des équations (2), (3) & (4) *du* §. 593 & 594 *au cas dont il s'agit.*

(635) Si l'on conserve les définitions de a, b, c des §. précédens, & que l'on suppose

$$M = 1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{b}(\operatorname{cof} L' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - B') + \operatorname{fin} L' \operatorname{fin} L''')$$

$$N = \operatorname{cof} L' (r''' \operatorname{cof}(B' - A''') - r' \operatorname{cof}(B' - A'))$$
$$+ \frac{c}{b} \operatorname{cof} L''' (r' \operatorname{cof}(B''' - A') - r''' \operatorname{cof}(B''' - A'''));$$

$$Q = r'^2 + r'''^2 - 2r'r''' \operatorname{cof}(A''' - A') - \frac{16Ft^2}{R' + R'''};$$

Il suit de ce qui a été dit dans le §. 593, que l'on a, avec une exactitude suffisante,

$$(1)\quad \Delta'^2 + 2\frac{N}{M}\Delta' + \frac{Q}{M} = 0.$$

Bien entendu que l'on a d'ailleurs

$$(2)\quad R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A'))};$$

$$(3)\quad R''' = \sqrt{(r'''^2 + \frac{c^2}{b^2}\Delta'^2 - \frac{2c}{b}\Delta' r''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A'''))};$$

Ces équations vont déterminer la valeur de Δ'.

On peut faire sur l'équation (1), des remarques analogues à celles du §. 633. En effet, puisque cette équation renferme les quantités a, b, c, R', R''', il est évident qu'elle n'est, qu'en apparence, du second degré. On verra cependant qu'il est assez facile de traiter cette équation, comme une équation du second degré; & de tomber rapidement sur la véritable valeur de l'inconnue; les exemples développeront cette idée. Nous remarquerons seulement, que lors de la premiere approximation on pourra évaluer R', R''' au moyen des équations

(4) $R' = r'$ fin (élongation apparente de la Comete au Soleil);

(5) $R''' = r'''$ fin (élongation apparente de la Comete au Soleil).

L'on n'oubliera point pareillement, que relativement à la premiere & à la troisieme observation, l'on a

(6) cof (élongation appar. de la Comete au Soleil) $= \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A')$;

(7) cof (élongation appar. de la Comete au Soleil) $= \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A''')$;

E X E M P L E.

(636) On demande, d'après les théories précédentes, quelle étoit la distance de la Comete à la Terre le 14 Novembre 1781, $8^h\, 29'\, 44''$ tems moyen.

Solution. Dans le cas dont il s'agit, l'on avoit

$B' = 307^d\, 14'\, 45''$; $B''' = 306^d\, 54'\, 8''$; $B''' - B' = -0^d\, 20'\, 37''$; $L' = 55^d\, 17'\, 9''$; $L''' = 41^d\, 34'\, 52''$; $L''' - L = -13^d\, 42'\, 17''$; $A' = 232^d\, 51'\, 30''$; $A''' = 236^d\, 53'\, 59''$; $A''' - A' = 4^d\, 2'\, 29''$; $B' - A' = 74^d\, 23'\, 15''$; $B' - A''' = 70^d\, 20'\, 46''$; $B''' - A' = 74^d\, 2'\, 38''$; $B''' - A''' = 70^d\, 0'\, 9''$; $r' = 0{,}98829$; $r''' = 0{,}98748$; $t = 2880'$.

L'on ſuppoſera d'ailleurs $R' + R''' = 1{,}93284$; $\frac{c}{b} = 1{,}34187$; & comme le coſinus de $0^d\ 20'\ 37''$ ne differe pas ſenſiblement du rayon; l'on a, dans le cas particulier dont il s'agit, $M = 1 + \frac{c^2}{b^2} - 2\frac{c}{b}\operatorname{cof}(L''' - L')$.

TYPE du Calcul pour déterminer les diſtances abſolues de la Comete à la Terre.

$M = (1) + (2) - (3)$

(1) . . . . + 1,00000

0·1277110 . . . log $\frac{c}{b}$
2

(2) 0·2554220 . . . . + 1,80062

0·1277110 . . . log $\frac{c}{b}$
9·9874545 . . . log coſ $(L''' - L')$
0·3010300 . . . log 2

(3) 0·4161955 . . . . — 2,60733

M = ... + 0,19329
Log M = 9·2862094

$Q = (1) + (2) - (3) - (4)$

(1) 9·9897720 . . log r'^2 . . . + 0,976725
(2) 9·9890520 . . log r'''^2 . . . + 0,975107

9·9948860 . . . . log r'
9·9945260 . . . . log r'''
9·9989186 . . . log coſ $(A''' - A')$
0·3010300

(3) 0·2893606 . . . . — 1,946970

0·1544396 . . . log F
6·9187850 . . . log t^2
0·9179260 . . . log $\frac{16}{R' + R'''}$

(4) 7·9911506 . . . . — 0,009798

Q = ... — 0,004936
Log Q = 7·6933752

$\frac{Q}{M} = -\ 0{,}025537$; log $\frac{Q}{M} = 8{\cdot}4071658$.

$N = (1) - (2) + (3) - (4)$

9·9945260 . . . log r'''
9·5267816 . . . log coſ $(B' - A''')$
9·7554806 . . . log coſ L'

(1) 9·2767882 . . . . + 0,189143

9·9948860 . . . log r'
9·4299601 . . . log coſ $(B' - A')$
9·7554806 . . . log coſ L'

(2) 9·1803267 . . . . — 0,151470

9·9948860 . . . log r'
9·4391745 . . . log coſ $(B''' - A')$
0·0016225 . . . log $\frac{c}{b}$ coſ L'''

(3) 9·4356830 . . . . + 0,272699

9·9945260 . . . log r'''
9·5339593 . . . log coſ $(B''' - A''')$
0·0016225 . . . log $\frac{c}{b}$ coſ L'''

(4) 9·5301478 . . . . — 0,338960

N = ... — 0,028588
Log N = 8·4561838

$\frac{N}{M} = -\ 0{,}147902$; log $\frac{N}{M} = 9{\cdot}1699744$

On a donc, pour équation du Problême,

$$(1)\quad \Delta'^2 - 2 \times 0{,}147902\ \Delta' - 0{,}025537 = 0.$$

Si l'on réſout cette équation par la méthode preſcrite dans les §. 130, 131 & 132 du premier Volume, l'on aura

$$\begin{array}{ll} 9{\cdot}2035829 \ldots & \log \sqrt{\frac{Q}{M}} \\ 0{\cdot}8300256 \ldots & \text{compl. } \log \frac{N}{M} \\ \hline 0{\cdot}0336085 \ldots & \log \text{ tang} \begin{cases} 132^d\ 47'\ 6''; \\ 312\ \ 47\ \ 6; \end{cases} \end{array}$$

$132^d\ 47'\ 6''$	$312^d\ 47'\ 6''$
$66\ \ 23\ \ 33$	$156\ \ 23\ \ 33$
$10{\cdot}3594800 \ldots\ldots \log \text{ tang } 66^d\ 23'\ 33''$	$9{\cdot}6405200 \ldots \log \text{ tang } 156^d\ 23'\ 33''$
$9{\cdot}2035829 \ldots\ldots \log \sqrt{\frac{Q}{M}}$	$9{\cdot}2035829 \ldots\ldots \log \sqrt{\frac{Q}{M}}$
$9{\cdot}5630629 \ldots\ldots \log \Delta'$	$8{\cdot}8441029 \ldots\ldots \log \Delta'$
$\Delta' = 0{,}36565$	$\Delta' = -0{,}06984$

(637) La réſolution de l'équation (1) du §. précédent donne deux valeurs de Δ'; $\Delta = 0{,}36565$; $\Delta' = -0{,}06984$. Il eſt aiſé de voir que la valeur négative de Δ' ne ſatisfait point à la queſtion aſtronomique. En effet, imaginons le triangle rectiligne formé par la diſtance de la Terre au Soleil, la diſtance de la Terre à la Comete, & la diſtance de la Comete au Soleil. Nommons

r' la diſtance de la Terre au Soleil;
Δ' la diſtance de la Terre à la Comete;
R' la diſtance de la Comete au Soleil;
ν' l'angle formé à la Terre par les droites menées de la Terre au Soleil & à la Comete;

Si l'on cherche dans ce triangle rectiligne, la relation entre R', r', Δ', ν', & que l'on ſuppoſe toujours coſ ν' poſitif, l'on parviendra à une équation de la forme ſuivante

$$(1)\ R'^2 - r'^2 - \Delta'^2 \mp 2 r' \Delta' \operatorname{cof} \nu' = 0.$$

La premiere ſuite de ſignes a lieu, lorſque l'angle à la Terre eſt obtus, la ſeconde ſuite a lieu lorſque l'angle à la Terre eſt aigu.

Appliquons ce principe à l'équation (2) du §. 635. Nous ſavons que lors de l'obſervation du 14 Novembre, l'angle à la Terre étoit aigu; il faut donc, d'après notre principe, que la valeur de R' ait la forme ſuivante

$$R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} (B' - A'))};$$

Donc la ſeule valeur de Δ' qui ſatisfait à la queſtion aſtronomique eſt poſitive.

Nous remarquerons également qu'il eſt facile de déterminer les valeurs de Δ', Δ'', Δ''', correſpondantes aux obſervations des 14, 16 & 18 Novembre. En effet, puiſque (§. 634) $\Delta'' = 1{,}16349\,\Delta'$, que $\Delta''' = 1{,}34187\,\Delta'$;

&

& que (§. 636) $\Delta' = 0,36565$; l'on a $\Delta' = 0,36565$; $\Delta'' = 0,42543$; $\Delta''' = 0,49065$.

Remarque sur la solution précédente.

(638) Nous venons de voir que l'on a $\Delta' = 0,36565$, $\Delta'' = 0,42543$, $\Delta''' = 0,49065$. Si l'on cherche les valeurs correspondantes de R', R'', R''', au moyen des équations

$$(1)\ R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' r' \cos L' \cos(B' - A')};$$
$$(2)\ R'' = \sqrt{(r''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta'' r'' \cos L'' \cos(B'' - A''))};$$
$$(3)\ R''' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta''' r''' \cos L''' \cos(B''' - A'''))},$$

l'on aura le résultat suivant, $R' + R''' = 1,98104$; $R'' = 0,99128$; mais dans nos calculs nous avons supposé (§. 633 & 636), $R'' = 0,96642$; $R' + R''' = 1,93284$; nous n'avons donc pas une véritable solution, puisque nous parvenons à des valeurs différentes de R'', R' + R'''; il conviendra donc de recommencer les calculs, en faisant usage des nouvelles valeurs de R'', R' + R'''; & l'on n'aura la véritable solution du Problême, que quand les valeurs de Δ', Δ'', Δ''', déduites des calculs du §. 636, & substituées dans les équations (1), (2) & (3) du présent paragraphe, feront trouver les valeurs de R'', R' + R''' que l'on aura supposées. Si l'on fait les nouveaux calculs que nous venons d'indiquer, l'on parviendra aux nouveaux résultats suivans

$$\gamma = 0,462587;\ \gamma' = 0,462076;\ \gamma'' = 0,461763;$$
$$a = 0,109089;\ b = 0,046911;\ c = 0,062949;$$
$$\Delta'' = 1,16348\,\Delta';\ \Delta''' = 1,34188\,\Delta';$$
$$\Delta'^2 - 2 \times 0147902\,\Delta' - 0,024264 = 0,$$

d'où l'on conclura

$$\Delta' = 0,36270;\ \Delta'' = 0,42199;\ \Delta''' = 0,48670;$$
$$R' = 0,99943;\ R'' = 0,99054;\ R''' = 0,982905;$$

Et l'on aura une approximation aussi exacte qu'on peut le desirer.

Détermination de l'angle compris sur le plan de la trajectoire de la Comete, entre les rayons vecteurs correspondans aux deux observations extrêmes.

(639) Je dois maintenant déterminer la distance périhélie, le lieu du périhélie sur l'orbite de la Comete, & l'instant du passage de la Comete par son périhélie; mais avant de résoudre ces questions, il faut connoître l'angle compris sur le plan de la trajectoire de la Comete, entre les rayons vecteurs correspondans aux deux observations extrêmes.

Pour résoudre cette question, on se rappellera que nous avons démontré (§. 566) que si l'on nomme

N' l'angle compris entre les deux rayons vecteurs extrêmes dont il s'agit;

R', R''' ces deux rayons vecteurs ;

Δ', Δ''' les distances correspondantes de la Terre à la Comete ;

r', r''' les rayons vecteurs correspondans de la Terre ;

A', A''' les longitudes correspondantes du Soleil ;

B', B''' les longitudes géocentriques de la Comete correspondantes aux deux observations extrêmes ;

L', L''' les latitudes géocentriques de la Comete correspondantes aux deux observations ;

Et que l'on suppose

$$K = \Delta'\Delta''' \cos L' \cos L''' \cos(B'''-B') + \Delta'\Delta''' \sin L' \sin L''' - r'\Delta''' \cos L''' \cos(B'''-A') - r'''\Delta' \cos L' \cos(B'-A''') + r'r''' \cos(A'''-A'),$$

L'on a

$$(1)\ \sin\tfrac{1}{2}N' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1-\frac{1}{R'R'''}K'\right)};$$

Il est donc facile de résoudre la question.

(640) Dans le cas particulier que nous discutons ici, si l'on veut faire usage des observations des 14 & 18 Novembre, l'on aura

$r' = 0{,}98829$;	log	$r' = 9\cdot9948860$;
$r''' = 0{,}98748$;		$r''' = 9\cdot9945260$;
$\Delta' = 0{,}36270$;		$\Delta' = 9\cdot5595476$;
$\Delta''' = 0{,}48670$;		$\Delta''' = 9\cdot6872613$;
$R' = 0{,}999430$;		$R' = 9\cdot9997524$;
$R''' = 0{,}982905$;		$R''' = 9\cdot9925116$;
$A' = 232^d\,51'\,30''$;		$\sin L' = 9\cdot9148736$;
$A''' = 236^d\,53'\,59''$;		$\cos L' = 9\cdot7554806$;
$A'''-A' = 4^d\,2'\,29''$;		$\sin L''' = 9\cdot8219568$;
$B' = 307^d\,14'\,45''$;		$\cos L''' = 9\cdot8739115$;
$B''' = 306^d\,54'\,8''$;		$\cos(B'''-B') = 9\cdot9999927$;
$B'''-B' = -0^d\,20'\,37''$;		$\cos(B'-A''') = 9\cdot5267816$;
$B'-A''' = 70^d\,20'\,46''$;		$\cos(B'''-A') = 9\cdot4391743$;
$B'''-A' = 74^d\,2'\,38''$;		$\cos(A'''-A') = 9\cdot9989186$;
$L' = 55^d\,17'\,9''$;		
$L''' = 41^d\,34'\,52''$;		

Type du Calcul.

$$K' = (1) + (2) - (3) - (4) + (5)$$

9·5595476 . . . log Δ'
9 6·72613 . . . log Δ'''
9 7554805 . . . log cos L'
9 8739115 . . . log cos L'''
9 9999927 . . . log cos$(B'''-B')$

(1) 8·8761936 . . . . . . + 0,075196

9·2468089 ... log $\Delta'\Delta'''$
9·9148736 ... log ſin L′
9·8219568 ... log ſin L‴

(2) 8·9336393 . . . . . . + 0,096303

9·5611728 ... log Δ''' coſ L‴
9·9948860 ... log r'
9·4391743 ... log coſ(B‴ — A′)

(3) 8·9952331 . . . . — 0,098908

9·3150281 ... log Δ' coſ L′
9·9945260 ... log r'''
9·5267816 ... log coſ(B′ — A‴)

(4) 8·8363357 . . . . . . — 0,068602

9·9948860 ... log r'
9·9945260 ... log r'''
9·9989186 ... log coſ (A‴ — A′)

(5) 9·9883306 . . . . + 0,973489

K′ = ... + 0,977478

9·9901070 ... log K′
0·0077360 ... compl. log R′R‴

19·9978430 / 2

9·9989215 ... log coſ d'un angle dont le ſinus $=\sqrt{\left(1-\frac{1}{R'R'''}K'\right)}$

8·8474812 ... log $\sqrt{\left(1-\frac{1}{R'R'''}K'\right)}$
9·8494850 ... compl. log $\sqrt{2}$

8·6969662 ... log ſin ½ N′

½ N′ = 2ᵈ 51′ 10″
N′ = 5 42 20

Log {ſin N′ = 8·9974573; coſ N′ = 9·9978431}

Détermination de l'anomalie de la Comete, lors de la premiere obſervation.

(641) Je dois déterminer encore l'anomalie de la Comete lors de la premiere obſervation, ainſi que ſa diſtance périhélie. Je ſuppoſerai dans ces ſolutions, que la trajectoire de la Comete eſt une Parabole.

Pour réſoudre ces queſtions, ſoit

R′, R‴ les rayons vecteurs de la Comete lors des deux obſervations extrêmes,
Z′ l'anomalie de la Comete lors de la premiere obſervation;
N′ l'angle traverſé par la Comete dans ſa trajectoire dans l'intervalle des deux obſervations;
D la diſtance périhélie de la Comete.

Il eſt évident que, relativement à la premiere obſervation, l'on a l'équation ſuivante,

$$(1)\quad R'(1+\cos Z')-2D=0;$$

Et que, pour la ſeconde obſervation, l'on a

$$(2)\quad R'''(1+\cos(Z'+N'))-2D=0.$$

De ces deux équations l'on tire

$$(3)\quad R'(1+\cos Z')-R'''(1+\cos(Z'+N'))=0;$$

Mais $\cos(Z'+N')=\cos Z'\cos N'-\sin Z'\sin N'$; donc

$$(4)\quad R'''\sin Z'\sin N'+(R'-R'''\cos N')\cos Z'+R'-R'''=0.$$

Cette équation déterminera l'anomalie de la Comete correſpondante à la premiere obſervation.

(642) Soit

Ω un angle tel que $\text{Tang}\,\Omega = \frac{R' - R''' \text{cof} N'}{R''' \text{fin} N'}$;

L'équation (4) du §. précédent deviendra

$$(1)\ \text{fin}\,(Z' + \Omega) = \frac{(R''' - R')\,\text{cof}\,\Omega}{R''' \text{fin} N'}.$$

Cette forme eſt plus commode que celle du §. précédent

L'eſpece de l'angle Ω n'eſt point arbitraire, & cet angle eſt ſpécifiquement déterminé par l'équation $\text{Tang}\,\Omega = \frac{R' - R''' \text{cof} N'}{R''' \text{fin} N'}$; il doit être employé tel qu'il eſt donné par l'analyſe. Il eſt compris entre 0^d & 90^d, ſi le numérateur & le dénominateur de la fraction ſont tous deux poſitifs ; l'angle eſt compris entre 90^d & 180^d, ſi le numérateur de la fraction eſt poſitif & le dénominateur négatif ; l'angle eſt entre 180^d & 270^d, ſi le numérateur & le dénominateur ſont tous deux négatifs ; & enfin l'angle eſt compris entre 270^d & 360^d, ſi le numérateur eſt négatif & le dénominateur poſitif.

Dans l'équation (1), l'expreſſion de ſin $(Z' + \Omega)$ appartient également à deux angles. Géométriquement parlant, il n'y a aucune raiſon pour exclure l'un de ces angles; toutes les deux anomalies commencent deux arcs terminés par des rayons vecteurs de même longueur, & éloignés entr'eux d'un même angle N'. Ces deux ſuppoſitions donnent à la vérité des diſtances périhélies différentes, & par conſéquent des Paraboles différentes. Mais quoique les deux Paraboles ſatisfaſſent géométriquement aux deux conditions d'où l'on a déduit l'anomalie, il n'eſt pourtant pas exact de dire qu'elles ſatisfont aſtronomiquement au Problême. En effet, des deux anomalies données par l'équation du ſecond degré, l'une eſt toujours telle que l'angle Z' étant moindre que 180^d, l'angle $Z' + N'$ eſt plus grand que 180^d. Il faudroit donc, pour que cette ſolution eût lieu, que dans l'intervalle des obſervations, la Comete pût paſſer d'une branche de la Parabole à l'autre branche, par l'aphélie, ce qui eſt impoſſible.

Détermination de la diſtance périhélie.

(643) La détermination de la diſtance périhélie ne préſente plus maintenant aucune difficulté. En effet, puiſque l'on connoît le rayon vecteur de la Comete & ſon anomalie, à l'inſtant de la premiere obſervation, l'on conclura tout de ſuite la diſtance périhélie, au moyen de l'équation

$$(1)\ D = \tfrac{1}{2} R' (1 + \text{cof} Z').$$

(644) Dans le cas particulier que nous diſcutons ici, ſi l'on veut faire uſage des obſervations des 14 & 18 Novembre, l'on aura,

$R' = 0{,}999430$;
$R''' = 0{,}982906$;
$R''' - R' = -0{,}016525$;
$N' = 5^d\ 42'\ 20''$;

log { $R' = 9{\cdot}9997524$; $R''' = 9{\cdot}9925116$; $R''' - R' = 8{\cdot}2181415$; ſin $N' = 8{\cdot}9974573$; coſ $N' = 9{\cdot}9978431$; }

Type du Calcul.

$R' - R'''$ coſ $N' = (1) - (2)$

(1)	. . . .	+ 0,999430
	9·9925116 . . . log R'''	
	9·9978431 . . . log coſ N'	
(2)	9·9903547	− 0,978035
		+ 0,021395

$\text{Tang}\ \Omega = \frac{+}{+}$

8·3302123	. . . log 0,021395
1·0100311	. . . compl. log R''' ſin N'
9·3403434	. . . log tang Ω

$\Omega = 12^d\ 21'\ 0''$

ſin $(Z' + \Omega) = -(1)$

8·2181415	log $(R''' - R')$
9·9898320	log coſ Ω
1 0100311	compl. log R''' ſin N'
9 2180046	log ſin $(Z' + \Omega)$

$Z' + \Omega = \begin{cases} 350^d\ 29'\ 29'' \\ 189\ \ 30\ \ 31 \end{cases}$

$Z' = \begin{cases} 338^d\ 8'\ 29'' \\ 177\ \ 9\ \ 31 \end{cases}$

Conformément à la remarque du §. 642, la ſeule valeur $Z' = 338^d\ 8'\ 29''$ ſatisfait au problême

$D = (1)$

$1 + \text{coſ}\ Z' = (1) + (2)$

(1)	. . . .	− 1,00000
(2)	9·9675982	+ 1,92811
		+ 0,92811

9·9997524	. . . log R'
0·2851320	. . . log 1,92811
9·6989700	. . . compl. log 2
9·9838544	. . . log D

Diſtance périhélie = 0,96351.

Détermination de l'inſtant du paſſage de la Comete par le périhélie.

(645) Je dois déterminer maintenant l'inſtant du paſſage de la Comete par le périhélie.

Rien n'eſt plus facile que la ſolution du Problême. En effet, nous avons vu (§. 434) que ſi l'on nomme

D la diſtance périhélie ;

Z′ l'anomalie de la Comete ;

T le nombre de minutes horaires écoulées depuis le paſſage de la Comete par le périhélie, juſqu'à l'inſtant correſpondant à l'anomalie Z′ ;

L'on a

$$(1)\ T = 1440' \times 109{,}6151\, D^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} Z' + \tfrac{3}{4} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Z'\right).$$

Cette équation réſoudra la queſtion propoſée.

(646) Si l'on part de l'obſervation du 14 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$ tems moyen, l'on aura

$$D = 0{,}96351 \qquad \log \begin{cases} D = 9{\cdot}9838544 \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Z' = 9{\cdot}2857769 \end{cases}$$
$$Z' = 338^d\ 8'\ 29''$$
$$\tfrac{1}{2} Z' = 169\ \ 4\ \ 15$$

Type du Calcul.

$\tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} Z' + \tfrac{3}{4} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Z' = -(1) - (2)$

	7·8573307 . . .	log tang³ ½ Z′
	9·3979400 . . .	compl. log 4
(1)	7·2552707	— 0,001800
	9·2857769 . . .	log tang ½ Z′
	9·8750613 . . .	log ¾
(2)	9·1608382	— 0,144823
		— 0,146623

$T = -(1)$

3·1583625 . . .	log 1440
2·0398710 . . .	log 109,6151
9·9757816 . . .	log $D^{\frac{3}{2}}$
9·1661920 . . .	log 0,146623
4·3402071 . . .	log 21888′

$T = -21888' = -15^{jours}\ 4^h\ 48'$

Le 14 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$ tems moyen, il s'en falloit donc 15 jours $4^h\ 48'$ que la Comete n'eût atteint ſon périhélie ; elle y a donc paſſé le 29 Novembre $13^h\ 17'\ 44''$.

Elémens approchés de la ſeconde Comete de 1781.

(647) Si l'on réunit les réſultats précédens, l'on aura, relativement à la ſeconde Comete de 1781,

Diſtance périhélie . . . 0,963510

Paſſage au périhelie . . . 29 Novembre $13^h\ 17'\ 44''$ tems moyen.

La Comete dont il s'agit a été obſervée depuis le 8 Octobre 1781, juſqu'au 25 Décembre de la même année. M. Méchain a conclu les élémens ſuivans, d'après un très-grand nombre d'obſervations.

Distance périhélie . . . 0,961013

Passage au périhélie . . . 29 Novembre $12^h\ 41'\ 46''$ tems moyen.

La distance périhélie trouvée par ma méthode, ne differe donc que de 0,002497 de celle déterminée par M. Méchain; & l'instant du passage par le périhélie ne differe que de $0^h\ 35'\ 58''$.

Détermination de la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete, de l'inclinaison de l'orbite, & du sens du mouvement de la Comete.

(648) Nous pouvons déterminer maintenant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete, l'inclinaison de cette orbite, & le sens du mouvement de la Comete.

Pour résoudre la question proposée, nous ferons usage des équations des §. 549 & 550. Nous avons vu, dans ces paragraphes, que si l'on considere deux observations quelconques, que l'on nomme

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique ;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comete;

r', r''' les rayons vecteurs de la Terre, lors des deux observations;

A', A''' les longitudes du Soleil correspondantes à ces deux observations;

B', B''' les longitudes géocentriques de la Comete, lors des deux observations;

L', L''' les latitudes géocentriques de la Comete pour les mêmes instans ;

Δ', Δ''' les distances de la Comete à la Terre, lors des deux observations ;

Et que l'on suppose de plus

$$\lambda = \Delta' \cos L' \sin B' - r' \sin A'; \quad \lambda' = \Delta''' \cos L''' \sin B''' - r''' \sin A''';$$

$$\mu = \Delta' \cos L' \cos B' - r' \cos A'; \quad \mu' = \Delta''' \cos L''' \cos B''' - r''' \cos A''';$$

L'on a

$$(1)\ \text{Tang}\ \zeta = \frac{\lambda \Delta''' \sin L''' - \lambda' \Delta' \sin L'}{\mu \Delta''' \sin L''' - \mu' \Delta' \sin L'};$$

$$(2)\ \text{Tang I} = \frac{\Delta' \sin L'}{\lambda \cos \zeta - \mu \sin \zeta}.$$

La premiere équation servira à déterminer la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete; la seconde équation déterminera l'inclinaison de l'orbite & le sens du mouvement de la Comete. Nous invitons à relire les remarques du §. 550.

Nous remarquerons que ces résultats sont indépendans de la nature de la trajectoire décrite par la Comete; ils supposent uniquement que les mouvemens de la Comete se passent dans un même plan.

Détermination du lieu du périhélie sur l'orbite de la Comete.

(649) Il ne me reste plus qu'à déterminer le lieu du périhélie de la Comete sur l'orbite.

Pour résoudre cette question, on se rappellera qu'il suit des équations (2) & (6) du §. 548, que si l'on nomme

r' le rayon vecteur de la Terre lors de la premiere observation;
R' le rayon vecteur de la Comete au même instant;
Z' l'anomalie de la Comete à l'instant dont il s'agit;
Δ' la distance de la Terre à la Comete;
I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique;
A' la longitude du Soleil à l'instant dont il s'agit;
B' la longitude géocentrique de la Comete;
L' sa latitude géocentrique;
ζ la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete;
u' l'angle du rayon vecteur de la Comete avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comete, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de l'Astre dans son orbite;

Et que l'on suppose

$$m = \frac{\Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{fin} (B' - \zeta)}{\operatorname{cof} I} - \frac{r' \operatorname{fin} (A' - \zeta)}{\operatorname{cof} I};$$

$$m' = \Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} (B' - \zeta) - r' \operatorname{cof} (A' - \zeta);$$

L'on a

$$(1)\ \operatorname{Tang} u' = \frac{m}{m'}.$$

On connoîtra donc la valeur de u'. Maintenant puisque u' est l'angle du rayon vecteur de la Comete avec la ligne des nœuds, & que cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comete, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de l'Astre dans son orbite, l'on a évidemment

$$(2)\ \text{Lieu du périhélie sur l'orbite} = \zeta \pm u' \mp Z'$$

La premiere suite de signes a lieu pour les Cometes directes; la seconde suite a lieu pour les Cometes rétrogrades.

Nous remarquerons ici que l'angle u' doit être employé tel qu'il est donné spécifiquement par l'équation (1); on peut voir à ce sujet les remarques du §. 642, qui s'appliquent généralement à toutes les questions de ce genre.

Nous ne donnerons point ici le type des calculs pour déterminer la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique, l'inclinaison de cette orbite, le sens du mouvement de la Comete, le lieu du périhélie sur l'orbite de la Comete. Nous attendrons, pour donner ces calculs, que nous ayons rectifié les élémens du §. 647, en employant des observations éloignées entr'elles.

Comme, dans la suite de ces recherches, nous aurons besoin des observations de la Comete de 1781, voici les observations de cette Comete, telles qu'elles ont été communiquées à l'Académie par M. Méchain.

Observations

Observations de la seconde Comete de 1781.

(650). Les Observations que l'on trouvera dans la Table suivante, sont dépouillées de l'aberration, de la nutation, & même de la parallaxe, quand cette derniere quantité s'est trouvée assez sensible pour ne devoir pas être négligée.

Mois	et jours	Tems moyen à Paris.	Longitude du Soleil	Log. dist. Soleil.	Longit. géoc. Comete.	Latit. géocentr. Comete.
Octobre.	8	16h 43′ 9″	196d 14′ 1″	9·998987	124d 22′ 37″	0d 12′ 49″ Austr.
	9	16 50 0	197 13 44	9·998863	124 27 42	0 11 40 Bor.
	10	16 28 0	198 12 18	9·998744	124 32 16	0 36 55
	13	16 8 0	201 10 9	9·998380	124 46 36	2 4 33
	14	16 58 0	202 11 50	9·998254	124 51 56	2 39 42
	15	16 55 0	204 11 6	9·99 006	124 59 56	3 55 31
	17	16 51 30	205 10 39	9·997 8[illegible]	125 3 55	4 37 33
	19	17 8 38	207 10 54	9·997638	125 11 46	6 15 2
	22	17 14 0	210 10 22	9·997274	125 20 52	9 19 32
	23	16 16 30	211 8 9	9·997155	125 23 44	10 30 39
	27	13 45 20	215 1 41	9·9966[illegible]	125 31 46	16 59 40
Novembre.	4	7 16 17	222 46 30	9·9958[illegible]6	125 16 42	47 28 56
	6	7 36 36	224 47 57	9·995642	124 43 42	63 2 9
	7	5 56 20	225 44 4	9·995540	124 6 12	71 17 2
	7	11 12 22	225 57 21	9·995528	123 49 16	73 18 57
	8	12 24 29	227 0 48	9·995426	120 37 52	83 1 29
	9	6 30 35	227 46 20	9·995353	39 47 30	89 18 26
	12	9 17 54	230 14 47	9·995056	307 46 20	65 56 27
	14	10 46 16	232 59 37	9·994306	307 13 48	54 51 22
	17	8 29 44	235 55 43	9·994602	306 57 32	44 17 12
	19	5 51 54	237 50 24	9·994434	306 51 48	39 29 18
	22	5 57 30	240 52 45	9·994180	305 45 3	33 58 35
	25	7 16 21	243 58 22	9·993937	305 41 44	30 2 5
Décembre.	1	6 2 40	250 0 19	9·993529	306 33 23	24 59 4
	10	7 14 50	259 12 54	9·993075	306 23 4	20 31 10
	12	5 37 39	261 10 16	9·992999	306 22 10	19 51 2
	20	6 6 30	269 20 35	9·992748	305 17 59	17 34 25
	25	6 31 0	274 27 22	9·992652	306 15 39	16 30 13

ARTICLE II.

De la maniere de rectifier les élémens trouvés par les méthodes précédentes.

Les élémens déduits des calculs précédens ne peuvent manquer d'être approchés, mais il est très-probable qu'ils ne sont point rigoureusement exacts, puisque l'on a employé un trop petit nombre d'observations pour

les déterminer. Je vais donner maintenant des méthodes pour rectifier ces élémens. Je joindrai les exemples aux préceptes, pour les rendre plus sensibles.

Premiere Méthode.

(651) Soit proposé de rectifier les élémens de la Comete que nous avons précédemment calculés. Je prends trois observations éloignées entr'elles ; celles, par exemple, du 9 Octobre, du 17 Novembre & du 20 Décembre. En partant ensuite de la distance périhélie & de l'instant du passage par le périhélie, déterminés précédemment, je calcule par la Table générale du mouvement des Cometes, les trois anomalies de la Comete correspondantes aux trois observations. Soient

D la distance périhélie hypothétique ;

Z', Z'', Z''' les trois anomalies de la Comete correspondantes aux trois observations ;

R', R'', R''' les trois rayons vecteurs de la Comete pour les mêmes instans ; ces rayons vecteurs se déterminent au moyen des équations suivantes,

$$R' = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} Z'}; \quad R'' = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} Z''}; \quad R''' = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} Z'''}.$$

A', A'', A''' les trois longitudes du Soleil ;
r', r'', r''' les trois distances de la Terre au Soleil ;
B', B'', B''' les trois longitudes géocentriques de la Comete ;
L', L'', L''' les trois latitudes géocentriques de la Comete ;
} correspondantes aux trois observations.

$\Delta', \Delta'', \Delta'''$ les trois distances correspondantes de la Terre à la Comete ; ces distances se déterminent au moyen des équations suivantes

$$\Delta' = r' \cos L' \cos (B' - A') \pm \sqrt{(R'^2 - r'^2 (1 - \cos^2 L' \cos^2 (B' - A')))}.$$
$$\Delta'' = r'' \cos L'' \cos (B'' - A'') \pm \sqrt{(R''^2 - r''^2 (1 - \cos^2 L'' \cos^2 (B'' - A'')))};$$
$$\Delta''' = r''' \cos L''' \cos (B''' - A''') \pm \sqrt{(R'''^2 - r'''^2 (1 - \cos^2 L''' \cos^2 (B''' - A''')))}.$$

Maintenant, puisque $2 \sin^2 \frac{1}{2} N = 1 - \cos N$, il suit de l'équation (1) du §. 566, que si l'on suppose

N, N' des angles tels que l'on ait $N = Z'' - Z'$; $N' = Z''' - Z'$; ce sont les angles compris entre les rayons vecteurs R'', R' ; R''', R'.

$$K = \Delta' \Delta'' \cos L' \cos L'' \cos (B'' - B') - r' \Delta'' \cos L'' \cos (B'' - A') - r'' \Delta' \cos L' \cos (B' - A'') + \Delta' \Delta'' \sin L' \sin L'' + r' r'' \cos (A'' - A');$$
$$K' = \Delta' \Delta''' \cos L' \cos L''' \cos (B''' - B') - r' \Delta''' \cos L''' \cos (B''' - A') - r''' \Delta' \cos L' \cos (B' - A''') + \Delta' \Delta''' \sin L' \sin L''' + r' r''' \cos (A''' - A');$$

L'on a

$$(1) \quad R' R'' \cos N - K = 0; \qquad (2) \quad R' R''' \cos N' - K' = 0;$$

Ces équations doivent être satisfaites, pour que la distance périhélie & l'instant du passage par le périhélie dont on a fait usage dans les calculs hypothétiques, soient les véritables élémens de la Comete.

(652) Si les équations (1) & (2) du paragraphe précédent ne sont point satisfaites, la distance périhélie & l'instant du passage par le périhélie dont on a fait usage dans les calculs, ne sont pas ceux qui appartiennent véritablement à l'orbite de la Comete. On fera alors un nouveau calcul dans lequel, en conservant le même instant du passage par le périhélie que ci-dessus, on fera varier la distance périhélie d'une petite quantité.

Soi

δ cette quantité ;

On cherchera dans cette hypothese, les nouvelles valeurs de Z', Z'', Z''', N, N', R', R'', R''', Δ', Δ'', Δ''', K, K'; & l'on verra à quoi se réduisent les équations (1) & (2) du §. précédent. On fera un troisieme calcul dans lequel, en conservant la même distance périhélie D que dans la premiere hypothese, on fera varier tant soit peu l'instant du passage par le périhélie. Soit

ϑ le nombre de minutes horaires dont on fera varier l'instant du passage par le périhélie ;

On cherchera, dans cette hypothese, les nouvelles valeurs de Z', Z'', Z''', N, N', R', R'', R''', Δ', Δ'', Δ''', K, K'; & l'on verra à quoi se réduisent les équations (1) & (2) du §. précédent.

Soient

P, P' les quantités auxquelles les équations (1) & (2) du §. précédent se réduisent en employant les élémens hypothétiques ;

$P+p$, $P'+p'$ les quantités auxquelles ces équations se réduisent dans la seconde hypothese ;

$P+\pi$, $P'+\pi'$ les quantités auxquelles ces équations se réduisent dans la troisieme hypothese ;

$D+dD$ la véritable distance périhélie ;

$T+dT$ le véritable nombre de minutes horaires écoulées depuis la premiere observation jusqu'à l'instant du passage par le périhélie ;

L'on aura

$$(1)\ dD = \delta\frac{(P'\pi - P\pi')}{p\pi - p'\pi}\,; \qquad (2)\ dT = \vartheta\frac{(Pp' - P'p)}{p\pi' - p'\pi}.$$

Voici la démonstration de ces équations.

Puisque la variation δ de la distance périhélie D, a fait varier l'équation (1) du §. 651, de la quantité p, & l'équation (2) de la quantité p', il est évident que la variation dD fera varier la premiere équation, de la quantité $\frac{p\,dD}{\delta}$, & la seconde équation, de la quantité $\frac{p'dD}{\delta}$. Par la même raison, puisque la variation ϑ du second élément a fait varier la premiere équation de la quantité π, & la seconde équation de la quantité π', la variation dT du second élément fera varier la premiere équation de la quantité $\frac{\pi\,dT}{\vartheta}$, & la seconde équation de la quantité $\frac{\pi' dT}{\vartheta}$.

Maintenant, puisque les deux équations doivent être nulles, il faut que la somme des deux variations relatives à chacune des deux équations dont il s'agit, soient respectivement égales à $-P$ & à $-P'$; on doit donc avoir

$$\frac{p\,dD}{\delta} + \frac{\pi\,dT}{\vartheta} + P = 0\,; \qquad \frac{p'dD}{\delta} + \frac{\pi' dT}{\vartheta} + P' = 0\,;$$

d'où l'on tire les valeurs (1) & (2) de dD & de dT.

(653.) La correction précédente suppose que les élémens déterminés

par la premiere approximation sont assez exacts pour traiter, comme infiniment petites, leurs différences d'avec les véritables valeurs. Mais si la seconde approximation ne paroissoit pas encore suffisante, on pourroit, recourir à une troisieme approximation, en opérant sur les élémens déja corrigés, comme on a fait sur les premiers élémens ; il faudra seulement avoir attention de leur faire subir de plus petites variations.

(654) Lorsque l'on aura fait toutes les corrections précédentes, à la distance périhélie de la Comete, & à l'instant de son passage par le périhélie trouvés par les premiers calculs, l'on aura la véritable distance périhélie & le véritable instant du passage de la Comete par le périhélie. On déterminera alors le lieu du nœud ascendant de la Comete, le lieu du périhélie sur l'orbite, l'inclinaison de l'orbite, & le sens du mouvement de la Comete, par les méthodes des §. 648 & 649. Et comme l'on aura employé un très-grand arc, on pourra se flatter d'avoir ces élémens avec une exactitude suffisante.

(655) Si l'on applique la méthode précédente aux observations des 9 Octobre $16^h\ 50'\ 0''$ tems moyen, 17 Novembre $8^h\ 29'\ 44''$ tems moyen, 20 Décembre $6^h\ 6'\ 30''$ tems moyen, l'on aura les élémens suivans,

$r' = 0,99739$;		$r' = 9.9988640$;
$r'' = 0,98765$;		$r'' = 9.9946020$;
$r''' = 0,98342$;		$r''' = 9.9927480$;
$A' = 197^d\ 13'\ 44''$;		$\cos(A''-A') = 9.8923342$;
$A'' = 235\ 55\ 43$;		$\cos(A'''-A') = 9.4873165$;
$A''' = 269\ 20\ 35$;		$\sin L' = 7.5306721$;
$A''-A' = 38^d\ 41'\ 59''$;		$\cos L' = 9.9999975$;
$A'''-A' = 72\ 6\ 51$;		$\sin L'' = 9.8440100$;
$B' = 124^d\ 27'\ 42''$;		$\cos L'' = 9.8548253$;
$B'' = 306\ 57\ 32$;		$\sin L''' = 9.4799070$;
$B''' = 306\ 17\ 59$;		$\cos L''' = 9.2792430$;
$L' = 0\ 11\ 40$;	boréale	$\cos(B''-B') = 9.9995892$;
$L'' = 44\ 17\ 12$;	log	$\cos(B'''-B') = 9.9997770$;
$L''' = 17\ 34\ 25$;		$\cos(B'-A') = 9.4716785$;
$B''-B' = 182^d\ 29'\ 50''$;		$\cos(B'-A'') = 9.5634335$;
$B'''-B' = 181\ 50\ 17$;		$\cos(B'-A''') = 9.9127320$;
$B'-A' = 287\ 13\ 58$;		$\cos(B''-A') = 9.5285900$;
$B'-A'' = 248\ 31\ 59$;		$\cos(B''-A'') = 9.5119687$;
$B'-A''' = 215\ 7\ 7$;		$\cos(B''-A''') = 9.8987867$;
$B''-A' = 109\ 43\ 48$;		$\cos(B'''-A') = 9.5141976$;
$B''-A'' = 71\ 1\ 49$;		$\cos(B'''-A''') = 9.9025960$.
$B''-A''' = 37\ 36\ 57$;		
$B'''-A' = 109\ 4\ 15$;		
$B'''-A''' = 36\ 57\ 24$;		

Type du Calcul.

r' coſ L′ coſ (B′ — A′) = 0,295489 ; r'' coſ L″ coſ (B″ — A″) = 0,229825 ;
r''' coſ L‴ coſ (B‴ — A‴) = 0,749026.

K	K′
Log coſ L′ coſ L″ coſ (B″ — B′) = 9·8544120.	Log coſ L′ coſ L‴ coſ (B‴ — B′) = 9·9790175.
Log r' coſ L″ coſ (B″ — A′) = 9·3822793.	Log r' coſ L‴ coſ (B‴ — A′) = 9·4923046.
Log r'' coſ L′ coſ (B′ — A″) = 9·5580330.	Log r''' coſ L′ coſ (B′ — A‴) = 9·9054755.
Log ſin L′ ſin L″ = 7·3746821.	Log ſin L′ ſin L‴ = 7·0105791.
$r' r''$ coſ (A″ — A′) = 0,768777.	$r' r'''$ coſ (A‴ — A′) = 0,301251.

Calcul des anomalies.

Puiſque par la ſuppoſition, la Comete a paſſé par le périhélie, le 29 Novembre $13^h\ 18'$ tems moyen; elle étoit éloignée du périhélie, de $50^{jours}\ 20^h\ 25'$, le 9 Octobre $16^h\ 50'$; de $12^{jours}\ 4^h\ 48'$, le 17 Novembre $8^h\ 30'$; & elle avoit paſſé par le périhélie, $20^{jours}\ 16^h\ 48'$ avant le 20 Décembre $6^h\ 6'$. On avoit donc,

9 Octobre $16^h\ 50'$ . . . . T = — 73228′
17 Novembre 8 30 . . . . T′ = — 17568
20 Décembre 6 6 . . . . T″ = + 29688.

Pour avoir les anomalies correſpondantes à ces inſtans, au moyen de la Table des Cometes; on diviſera par $D^{\frac{3}{2}}$ les trois nombres ci-deſſus, & l'on aura le nombre de minutes de tems que la Comete de 109 jours emploieroit à parvenir aux mêmes anomalies, par les calculs ſuivans.

4·8646772... log 73228′	4·2447223... log 17568′	4·4725809... log 29808′
0·0242184... compl. log $D^{\frac{3}{2}}$	0·0242184... compl. log $D^{\frac{3}{2}}$	0·0242184... compl. log $D^{\frac{3}{2}}$
4·0088956... log 77427′	4·2689407... log 18576′	4·4967993... log 31391′.

La Comete de 109 jours emploieroit 77427′, 18576′, 31391′ à parvenir aux anomalies demandées; on trouvera donc par la Table des Cometes

9 Octobre $16^h\ 50'$ . . . Z′ = $299^d\ 12'\ 10''$; N = $42^d\ 36'\ 9''$.
17 Novembre 8 30 . . . Z″ = 341 48 19; N′ = 89 52 27
20 Décembre 6 6 . . . . Z‴ = 29 4 37.

Calcul des rayons vecteurs.

R′	R″
9·9838544 . . . log D	9·9838544 . . . log D
0·1284560 . . . compl. log coſ² ½ Z′	0·0109948 . . . compl. log coſ² ½ Z″
0·1123104 log R′	9·9948492 log R″

R‴

9·9838544 . . . log D
0·0282714 . . . compl. log coſ² ½ Z‴
0·0121258 . . . log R‴.

Calcul des premiers termes des équations (1) & (2) du §. 651.

0·1123104 .... log R'
9·9948492 .... log R''
9·8660177 .... log cos N

9·9740773 .... log $R'R''$ cos N

$R'R''$ cos N = 0,942055.

0·1123104 .... log R'
0·0121258 .... log R'''
7·3416727 .... log cos N'

7·4661089 .... log $R'R'''$ cos N'

$R'R'''$ cos N' = 0,02925.

Calcul des distances à la Terre.

$\Delta' = (1) \pm (2)$.

(1) r' cos L' cos $(B'-A')$ .. + 0,295489
0·2246208 log R'^2 .... + 1,67734
8·9410800 log r'^2 cos^2 L'&c. + 0,08731
9·9977280 log r'^2 .... — 0,99478

19·8664174 .... + 0,76937
(2) 9·9432087 .... + 0,877422

Δ' = ... + 1,172911

Log Δ' = 0·0692610.

Les mêmes calculs auroient donné une seconde valeur négative de Δ', Δ'', mais qui n'appartient point au Problême astronomique.

$\Delta'' = (1) \pm (3)$

(1) r'' cos L'' cos $(B''-A'')$. + 0,229825
9·9896984 log R''^2 .... + [illegible]97656
8·7227920 log r''^2 cos^2 L''&c. + [illegible]5282
9·9892040 log r''^2 .... — 0,97545

18·7318304 ...... + 0,05393
(2) 9·3659152 .... + 0,232228

Δ'' = ... + 0,[illegible]2053

Log Δ'' = 9·6646920.

$\Delta''' = (1) \pm (2)$,

(1) r''' cos L''' cos $(B'''-A''')$ .. + 0,749026
0·0242516 ... log R'''^2 .... + 1,05743
9·7489920 .. log r'''^2 cos^2 L''' cos $(B'''-A''')$ + 0,56104
9·9854[illegible]60 ... log r'''^2 .... — 0,96715

19·8137948 .... + 0,65132
(2) 9·9068974 .... + 0,807045

Δ''' = ... + 1,556071; log Δ''' = 0·1920280.

Calcul des valeurs de K & de K'.

$K = -(1) + (2) + (3) + (4) + (5)$.

9·7339530 .... log $\Delta'\Delta''$
9·8544120 .... log cos L' cos L'' &c.

(1) 9·5883650 .... — 0,387585

$K' = -(1) + (2) + (3) + (4) + (5)$

0·2612890 ... log $\Delta'\Delta'''$
9·9790175 ... log cos L' cos L''' &c.

(1) 0·2403065 .... — 1,739030

9·6646920 ... log Δ''	0·1920280 ... log Δ'''
9·3822793 ... log $r' \operatorname{cof} L''$ &c.	9·4923046 ... log $r'' \operatorname{cof} L'''$ &c.
(2) 9·0469713 .... + 0,111425	(2) 9·6043326 .... + 0,483430
0·0692610 ... log Δ'	0·0692910 ... log Δ'
9·5580330 ... log $r'' \operatorname{cof} L'$ &c.	9·9054755 ... log $r''' \operatorname{cof} L'$ &c.
(3) 9·6272940 .... + 0,423930	(3) 9·9747665 ...... + 0,943560
9·7339530 ... log $\Delta' \Delta''$	0·2612890 ... log $\Delta' \Delta'''$
7·374 821 ... log ſin L′ ſin L″	7·0105791 ... log ſin L′ ſin L‴
(4) 7·10.6351 .... + 0,001284	(4) 7·2718681 .... + 0,001876
(5) $r' r'' \operatorname{cof}(A'' - A')$ .... + 0,768777	(5) $r' r''' \operatorname{cof}(A''' - A')$ .. + 0,301251
K = ... + 0,917731	K′ = ... − 0,008919

$$P = R'R'' \operatorname{cof} N - K = \begin{cases} +\,0{,}942055 \\ -\,0{,}917731 \\ \hline +\,0{,}024324 \end{cases} \qquad P' = R'R''' \operatorname{cof} N' - K' = \begin{cases} +\,0{,}002925 \\ -\,0{,}008919 \\ \hline -\,0{,}005994 \end{cases}$$

On voit par ces calculs que les élémens du §. 647, ne ſatisfont pas pleinement aux obſervations, puiſque les valeurs de P, P′ ne ſont point égales à zéro.

(656) Si l'on fait varier la quantité D, d'une petite quantité $\delta = -\,0{,}00300$; que l'on recommence les calculs précédens dans cette hypotheſe; que l'on faſſe pareillement varier le tems T d'une petite quantité $\vartheta = -\,40'$; on ſe convaincra facilement que les équations (1) & (2) du §. 651 ſeront infiniment près d'être ſatisfaites; & l'on retombera, au moyen des équations du §. 652, dans les élémens déterminés par M. Méchain. Nous penſons donc avec lui que l'on a, avec toute l'exactitude que l'on peut ſe promettre dans de pareilles queſtions,

Diſtance périhélie 0,960999

Paſſage au périhélie ..... 29 Novembre $12^h\,44'$ tems moyen.

Détermination de la longitude du nœud aſcendant de l'orbite; de ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique; du ſens du mouvement de la Comete, & du lieu du périhélie ſur l'orbite.

(657) Il ne nous reſte plus qu'à déterminer, par les formules des §. 648 & 649, la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Comete, l'inclinaiſon de l'orbite, le ſens du mouvement de la Comete, & le lieu du périhélie ſur l'orbite.

Si l'on veut faire uſage des obſervations des 9 Octobre & 20 Décembre, & que l'on parte des nouveaux élémens du §. 656, l'on aura, relativement aux obſervations dont il s'agit,

r' = 0,99739 ;	log	r' = 9·9988640 ;
r''' = 0,98342 ;		r''' = 9·9927480 ;
R' = 1,29369 ;		R' = 0,1118290 ;
R''' = 1,02679 ;		R''' = 0,01148·0 ;
Δ' = 1,17082 ;		Δ' = 0,0684900 ;
Δ''' = 1,55433 ;		Δ''' = 0,1915430 ;
A' = 197d 13' 44'' ;		sin A' = 9·4715700 ;
A''' = 269 20 35 ;		cos A' = 9·9800623 ;
B' = 124 27 42 ;		sin A''' = 9·99997[illegible] ;
B''' = 306 17 59 ;		cos A''' = 8·0593965 ;
L' = 0 11 40 ;		sin B' = 9·9161934 ;
L''' = 17 34 25 ;		cos B' = 9·7527048 ;
		sin B''' = 9·9062964 ;
		cos B''' = 9·7723314 ;
		sin L' = 7·5306721 ;
		cos L' = 9·9999975 ;
		sin L''' = 9·4799070 ;
		cos L''' = 9·9792430 ;

TYPE du calcul pour déterminer la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete, l'inclinaison de l'orbite sur l'Ecliptique, & le sens du mouvement de la Comete.

λ = (1) + (2)

0·0684900 . . . log Δ'
9·9999975 . . . log cos L'
9·9161934 . . . log sin B'

(1) 9·9846809 . . . . + 0,965341

9·9988640 . . . log r'
9·4715700 . . . log sin A'

(2) 9·4704340 . . . . + 0,295417

λ = ... + 1,260758
Log λ = 0·1006300

μ = − (1) + (2)

0·0684875 . . . log Δ' cos L'
9·7527048 . . . log cos B'

(1) 9·8211923 . . . . − 0,662510

9·9988640 . . . log r'
9·9800623 . . . log cos A'

(2) 9·9789263 . . . . + 0,952634

μ = . . . + 0,290124
Log μ = 9·4625837

λ' = − (1) + (2)

0·1915430 . . . log Δ'''
9·9792430 . . . log cos L'''
9·9062964 . . . log sin B'''

(1) 0·0770824 . . . . − 1,194220

9·9927480 . . . log r'''
9·9999714 . . . log sin A'''

(2) 9·9927194 . . . . + 0,983576

λ' = . . . − 0,210644
Log λ' = 9·3239610

μ' = (1) + (2)

0·1707860 . . . log Δ''' cos L'''
9·7723314 . . . log cos B'''

(1) 9·9431174 . . . . + 0,877238

9·9927480 . . . log r'''
8·0593965 . . . log cos A'''

(2) 8·0521445 . . . . + 0,011276

μ' = ... + 0,808514
Log μ' = 9·9406643

λ Δ'''

$\lambda\,\Delta'''\,\sin L''' - \lambda'\,\Delta'\,\sin L' = (1) + (2)$

0·006300 . . . log λ
0·1915430 . . . log Δ'''
9·4799070 . . . log sin L'''

(1) 9·7720800 . . . . + 0,591679

9·3239610 . . . log λ'
0·0684900 . . . log Δ'
7·5306721 . . . log sin L'

(2) 6·9231231 . . . . + 0,000838

+ 0,592517

$\mu\,\Delta'''\,\sin L''' - \mu'\,\Delta'\,\sin L' = (1) - (2)$

9·4625837 . . . log μ
9·6714500 . . . log Δ''' sin L'''

(1) 9·1340337 . . . . + 0,136155

9·9486643 . . . . log μ'
7·5991621 . . . . log Δ' sin L'

(2) 7·5478264 . . . . — 0,003530

+ 0,132625

$$\text{Tang}\,\zeta = \frac{+}{+}$$

9·7727008 . . . log 0,592517
0·8773·48 . . . compl. log 0,132625

10·6500756 . . . log tang ζ. $\zeta = 77^d\,23'\,0''$. Log $\begin{cases}\sin\zeta = 9\cdot9893845\\ \cos\zeta = 9\cdot3393065\end{cases}$

Tang I

$\lambda\cos\zeta - \mu\sin\zeta = (1) - (2)$

0·1006300 . . . log λ
9·3393065 . . . log cos ζ

(1) 9·4399365 . . . . + 0,275383

9·4625837 . . . log μ
9·9893845 . . . log sin ζ

(2) 9·4519682 . . . . — 0,283119

— 0,007736

$$\text{Tang I} = \frac{+}{-}$$

7·5991621 . . . log Δ' sin L'
2·1114815 . . . compl. log 0,007736

9,7106456 . . . log Tang I
$I = 152^d\,48'\,50''$
Comete rétrograde

(658) Il me reste maintenant à donner le type du calcul pour déterminer le lieu du périhélie sur l'orbite.

Si l'on veut faire usage de l'observation du 20 Décembre, l'on aura

$r' = 0{,}98342$;	log	$r' = 9\cdot9927480$;
$\Delta' = 1{,}55433$;		$\Delta' = 0\cdot1915430$;
$A' = 269^d\,20'\,35''$;		$\cos L' = 9\cdot9792430$;
$B' = 306\ \ 17\ \ 59$;		$\sin(A' - \zeta) = 8\cdot5339794$;
$L' = \ \ 17\ \ 34\ \ 25$;		$\cos(A' - \zeta) = 9\cdot9997460$;
$\zeta = \ \ 77\ \ 23\ \ \ 0$;		$\sin(B' - \zeta) = 9\cdot8772300$;
$A' - \zeta = 191^d\,57'\,35''$;		$\cos(B' - \zeta) = 9\cdot8176685$;
$B' - \zeta = 228\ \ 54\ \ 59$;		$\cos I = 9\cdot9491592$.
$I = 152^d\,48'\,50''$;		

TYPE du Calcul pour déterminer le lieu du périhélie sur l'orbite.

$m = (1) - (2)$

0·1707860 ... log Δ' cos L'
9·8772300 ... log sin $(B' - \zeta)$
0·0508408 ... compl. log cos I

(1) 0·0988568 . . . . $+$ 1,25562

9·9927480 ... log r'
8·5339794 ... log sin $(A' - \zeta)$
0·0508408 ... compl. log cos I

(2) 8·5775682 . . . . $-$ 0,03781

$m = \ldots + 1{,}21781$

Log m = 0·0855800

$\text{Tang } u' = \dfrac{+}{+}$

10·0855800 ... log m
2·0409586 .. compl. log m'

12·1265386 ... log Tang u'; $u' = 89^{d}\ 34'\ 17''$.

$m' = -(1) + (2)$

0·1707860 ... log Δ' cos L'
9·8176685 ... log cos $(B' - \zeta)$

(1) 9·9884545 . . . . $-$ 0,973766

9·9927480 ... log r'
9·9997460 ... log cos $(A' - \zeta)$

(2) 9·9924940 . . . . $+$ 0,982866

$m' = \ldots + 0{,}009100$

Log m' = 7·9590414

Nous avons maintenant (§. 649), attendu que la Comete est rétrograde;

$$\text{Lieu du périhélie} = \zeta - u' + Z' = 77^{d}\ 23'\ 0'' - 89^{d}\ 34'\ 17'' + Z'.$$

Il ne s'agit donc que de trouver l'angle Z'.

Pour y parvenir, nous remarquerons que puisque nous avons supposé que le passage de la Comete par le périhélie, a eu lieu le 29 Novembre $12^{h}\ 44'$, il se sera écoulé 29844', depuis le passage par le périhélie jusqu'à l'observation du 20 Décembre; l'on aura donc, dans cette nouvelle hypothese, $T = 29844'$. Il faudra diviser ce nombre par $D^{\frac{3}{2}}$ (D étant la nouvelle distance périhélie), pour conclure le tems que la Comete de 109 jours emploieroit à parvenir à l'anomalie demandée. On trouvera que ce tems est de 31677' ou de 21 jours $23^{h}\ 57'$; & la Table des Cometes donnera $Z' = 29^{d}\ 19'\ 25''$; d'où l'on conclura

$$\text{Lieu du périhélie sur l'orbite} = 17^{d}\ 8'\ 8''.$$

Seconde Méthode pour rectifier les élémens approchés.

(659) La premiere méthode, pour corriger les élémens approchés d'une Comete, dont nous venons de donner l'exposition, peut paroître précaire, en ce que, pour trouver les rayons vecteurs & les distances à la Terre correspondans aux observations éloignées qui servent à corriger les élémens, on emploie la Parabole déterminée par les premiers

calculs. Je ne déciderai point ſi ce reproche eſt fondé. Voici une autre méthode qui n'a pas l'inconvénient dont nous venons de parler. Elle conſiſte à déterminer les diſtances de la Comete à la Terre, pour les différens inſtans des obſervations éloignées, par les moyens que nous avons employés (§. 628 & ſuivans) à déterminer les diſtances de la Comete à la Terre pour les obſervations du milieu de Novembre. On aura immédiatement par-là, & ſans paſſer par la Parabole hypothétique, les diſtances de la Comete à la Terre, & les rayons vecteurs, pour les trois inſtans éloignés que l'on conſidere; & l'on déterminera facilement, par les méthodes précédentes, les élémens de la Comete.

Cette méthode exige, à la vérité, que l'on ait des obſervations aſſez préciſes & aſſez proches les unes des autres vers les inſtans que l'on conſidere, pour pouvoir employer les formules du §. 628 & ſuivans; mais l'on pourra être dédommagé de ce travail, par l'indépendance des réſultats, de toute eſpece de ſuppoſition ſur la nature de la trajectoire. Je laiſſe aux Aſtronomes à peſer ces réflexions.

Article III.

Détermination des trajectoires dans l'hypotheſe elliptique.

(660) La ſuppoſition du mouvement des Cometes dans la Parabole n'eſt pas rigoureuſe. Elle eſt même infiniment peu probable; puiſque, ainſi que nous l'avons déja remarqué, il y a une infinité de combinaiſons qui donnent un mouvement elliptique ou hyperbolique, en comparaiſon de celles qui donnent le mouvement dans la Parabole. Une Comete mue dans une orbite, ſoit parabolique, ſoit hyperbolique, ne ſeroit viſible qu'une ſeule fois; ainſi l'on peut ſuppoſer avec vraiſemblance, que les Cometes qui décrivent ces courbes, ont diſparu de notre ſyſtême; de ſorte que nous n'obſervons aujourd'hui que les Cometes qui décrivant des courbes rentrantes autour du Soleil, ſont ramenées vers leur périhélie, dans les régions voiſines de cet Aſtre. Je vais m'occuper particuliérement, dans cet Article, des trajectoires elliptiques.

Définition des obſervations moyennes ou compoſées.

(661) Je ſuppoſerai, dans ces recherches, que l'on a trois obſervations moyennes de la Comete, diſtantes entr'elles d'un intervalle de tems aſſez conſidérable; l'une, par exemple, vers le commencement de l'apparition, la ſeconde vers le milieu, & la troiſieme vers la fin de l'apparition. J'entends par obſervation moyenne ou compoſée d'une Comete, non pas une ſeule obſervation iſolée de cette Comete, mais une ſuite d'obſervations peu diſtantes entr'elles, dont on a fait réſulter par les méthodes précédentes, une obſervation moyenne, ainſi que les

diſtances correſpondantes de la Comete à la Terre & au Soleil. Je ſuppoſe donc qu'au moyen d'obſervations faites vers le commencement de l'apparition, vers le milieu & vers la fin, l'on ait conclu trois de ces obſervations moyennes. Je ſuppoſerai même, ſi l'on veut, qu'au lieu d'avoir conclu les trois diſtances abſolues de la Comete à la Terre & au Soleil, par les méthodes dont on vient de parler, l'on a de plus conſidéré des obſervations intermédiaires, & que l'on ait déterminé, pour trois obſervations éloignées entr'elles, le rapport des diſtances de la Comete à la Terre, par la méthode du §. 561, & les diſtances abſolues, par la méthode des §. 553 & 554. Quoi qu'il en ſoit, je ſuppoſe que par un de ces moyens quelconque, l'on a les trois diſtances de la Comete à la Terre, & les trois rayons vecteurs, pour trois obſervations moyennes; voici maintenant le procédé qu'il convient de ſuivre.

Des équations générales du Problême.

(662) Soit

R', R'', R''' les trois rayons vecteurs de la Comete;
P le parametre de l'Ellipſe;
a le demi-grand axe;
E la diſtance du foyer au centre de la ſection;
D la diſtance périhélie;
Z' l'anomalie de la Comete, lors de la premiere obſervation;
$Z'+N$ l'anomalie de la Comete, lors de la ſeconde obſervation;
$Z'+N'$ l'anomalie de la Comete, lors de la troiſieme obſervation;
1 le ſinus total;

Il eſt évident que l'on a (§. 408)

$$(1)\quad 2R'\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof} Z'+1\right)-P=0;$$

$$(2)\quad 2R''\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+N)+1\right)-P=0;$$

$$(3)\quad 2R'''\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+N')+1\right)-P=0.$$

$$(4)\quad D\left(\frac{E}{a}+1\right)-\frac{P}{2}=0.$$

$$(5)\quad a=\frac{\frac{1}{2}P}{1-\frac{E^2}{a^2}}.$$

De la combinaiſon des équations (1), (2), (3) l'on tire

$$(6)\quad R'\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof} Z'+1\right)-R''\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+N)+1\right)=0;$$

$$(7)\quad R'\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof} Z'+1\right)-R'''\left(\frac{E}{a}\operatorname{cof}(Z'+N')+1\right)=0.$$

$$(8)\quad \frac{E}{a}=\frac{R''-R'}{R'\operatorname{cof} Z'-R''\operatorname{cof}(Z'+N)}=\frac{R'''-R'}{R'\operatorname{cof} Z'-R'''\operatorname{cof}(Z'+N')}.$$

Donc

$$(9)\ (R''-R''')R'\cos Z' - R''R'''(\cos(Z'+N')-\cos(Z'+N)) + R'(R'''\cos(Z'+N')-R''\cos(Z'+N)) = 0.$$

Mais $\cos(Z'+N) = \cos Z' \cos N - \sin Z' \sin N$; $\cos(Z'+N') = \cos Z' \cos N' - \sin Z' \sin N'$; donc $\cos(Z'+N') - \cos(Z'+N) = \cos Z'(\cos N' - \cos N) + \sin Z'(\sin N + \sin N')$. De plus $\cos N' - \cos N = 2\sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N')\sin(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')$; $\sin N - \sin N' = 2\cos(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N')\sin(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N')$. Si donc l'on ſuppoſe

$$\alpha = (R''-R''')R' + 2R''R'''\sin(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N')\sin(\tfrac{1}{2}N' - \tfrac{1}{2}N) + R'R'''\cos N' - R'R''\cos N;$$

$$\beta = 2R''R'''\cos(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N')\sin(\tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{2}N') + R'R'''\sin N' - R'R''\sin N;$$

L'on aura

$$(10)\ \text{Tang}\, Z' = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(663) Il eſt évident que le Problême propoſé ſera réſolu, lorſque l'on connoîtra les angles N, N'. En effet l'on déterminera l'anomalie de la Comete correſpondante à la premiere obſervation, au moyen de l'équation (10) du §. précédent; l'on déterminera enſuite la valeur de $\frac{E}{a}$, au moyen de l'équation (8); le Parametre du grand axe de la ſection conique, au moyen de l'équation (1); le grand axe, au moyen de l'équation (5), & enfin la diſtance périhélie, au moyen de l'équation (4).

Quant aux angles N, N', il ſuit du §. 639, qu'ils ſe déterminent par les équations ſuivantes.

Soient

R', R'', R''', les trois rayons vecteurs de la Comete;
$\Delta', \Delta'', \Delta'''$ les trois diſtances de la Comete à la Terre;
r', r'', r''' les trois rayons vecteurs de la Terre, lors des trois obſervations;
A', A'', A''' les longitudes du Soleil, lors des trois obſervations;
B', B'', B''' les longitudes géocentriques de la Comete, lors des trois obſervations;
L', L'', L''' les latitudes géocentriques de la Comete;
N l'angle compris ſur le plan de l'orbite de la Comete, entre les rayons vecteurs R', R'';
N' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R''';

$$K = \Delta'\Delta''\cos L'\cos L''\cos(B''-B') + \Delta'\Delta''\sin L'\sin L'' - r'\Delta''\cos L''\cos(B''-A') - r''\Delta'\cos L'\cos(B'-A'') + r'r''\cos(A''-A');$$

$$K' = \Delta'\Delta'''\cos L'\cos L'''\cos(B'''-B') + \Delta'\Delta'''\sin L'\sin L''' - r'\Delta'''\cos L'''\cos(B'''-A') - r'''\Delta'\cos L'\cos(B'-A''') + r'r'''\cos(A'''-A');$$

L'on a

$$(1)\ \sin\tfrac{1}{2}N = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{R'R''}K\right)};$$

$$(2)\ \sin\tfrac{1}{2}N' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{R'R'''}K'\right)}.$$

On déterminera enſuite l'inſtant du paſſage au périhélie, ou plutôt la diſtance de l'inſtant du paſſage au périhélie à la premiere obſervation, de la maniere ſuivante. Soit

1 la diſtance moyenne de la Terre au Soleil;

a le demi-grand axe de l'orbite elliptique de la Comete;

& conſervons les définitions des §. précédens.

Puiſque les tems des révolutions dans les différentes ellipſes, ſont comme les racines quarrées des cubes des grands axes, que de plus la révolution annuelle de la Terre par rapport aux fixes, eſt de 365 jours $6^h\ 11'$, ou de 365 jours, 25634, ou enfin de $525971'$; l'on aura

$$(3)\ \text{Révolution de la Comete par rapport aux fixes} = a^{\frac{3}{2}} \times \text{révolution de la Terre};$$

Soit maintenant

φ un angle tel que $\text{ſin}\ \varphi = \dfrac{\text{ſin}\ Z' \sqrt{\left(1 - \frac{E^2}{a^2}\right)}}{1 + \frac{E}{a}\ \text{coſ}\ Z'}$.

T le tems écoulé entre la premiere obſervation & le paſſage de la Comete par ſon périhélie;

Il ſuit du §. 429 que l'on aura

$$(4)\ T = \frac{\text{Révolution de la Comete par rapport aux fixes}}{\text{arc } 360^d}\left(\varphi - \frac{E}{a}\ \text{ſin}\ \varphi\right)$$

$$= a^{\frac{3}{2}} \times \text{Révolution de la Terre par rapport aux fixes}\left(\frac{\varphi - \frac{E}{a}\ \text{ſin}\ \varphi}{\text{arc } 360^d}\right)$$

$$= a^{\frac{3}{2}} \times 365^j{,}25634 \left(\frac{\varphi - \frac{E}{a}\ \text{ſin}\ \varphi}{\text{arc } 360^d}\right)$$

Dans cette derniere équation, l'arc φ & l'arc de 360^d ne doivent plus être évalués dans un cercle dont le rayon $= a$, ainſi que nous l'avions preſcrit (§. 422), mais dans le cercle dont le rayon $= 1$.

Application des théories précédentes à la ſeconde Comete de 1781.

(664) Quoique les élémens déterminés dans l'hypotheſe parabolique, repréſentent d'une maniere ſatisfaiſante les lieux obſervés de la ſeconde Comete de 1781, j'ai cru cependant que le Lecteur verroit avec plaiſir l'application de la théorie précédente à cette Comete. Je ſuppoſerai donc que par une méthode quelconque, on eſt parvenu aux réſultats ſuivans.

		Longitudes géocent. de la Comete.	Latitudes géocent. de la Comete	Diſt. de la Comete à la Terre.
9 Octobre	$16^h\ 50'\ 0''$	$124^d\ 27'\ 48''$	$0^d\ 11'\ 33''$	1,17081.
14 Novembre.	8 29 44	307 14 45	55 17 9	0,36170.
20 Décembre.	6 6 30	306 17 59	17 35 9	1,55433.

On aura, pour les mêmes époques,

		Longitudes du Soleil.	Distances du Soleil à la Terre.	Rayons vecteurs de la Comete.
9 Octobre	$16^h\ 50'\ 0''$	$197^d\ 13'\ 44''$	0,99739	1,29367.
14 Novembre	8 29 44	232 51 30	0,98829	0,99943.
20 Décembre	6 6 30	269 20 35	0,98344	1,02680.

Il s'agit de déterminer maintenant les élémens de la Comete dans l'hypothese elliptique.

Détermination des angles N, N′, *compris entre les rayons vecteurs* R′, R″, R′, R‴.

(665) Il est d'abord évident que dans nos suppositions l'on a

	log
$r' = 0{,}99739$,	$r' = 9 \cdot 9988640$.
$r'' = 0{,}98829$,	$r'' = 9 \cdot 9948860$.
$r''' = 0{,}98344$,	$r''' = 9 \cdot 9927480$.
$\Delta' = 1{,}17081$,	$\Delta' = 0 \cdot 0684900$.
$\Delta'' = 0{,}36270$,	$\Delta'' = 9 \cdot 5595476$.
$\Delta''' = 1{,}55433$,	$\Delta''' = 9 \cdot 1915430$.
$R' = 1{,}29367$,	$R' = 0 \cdot 1118290$.
$R'' = 0{,}99943$,	$R'' = 9 \cdot 9997524$.
$R''' = 1{,}02680$,	$R''' = 0 \cdot 0114820$.
$A' = 197^d\ 13'\ 44''$,	$\sin L' = 7 \cdot 5263073$.
$A'' = 232\ 51\ 30$,	$\cos L' = 9 \cdot 9999976$.
$A''' = 269\ 20\ 35$,	$\sin L'' = 9 \cdot 9148736$.
$B' = 124\ 27\ 48$,	$\cos L'' = 9 \cdot 7554806$.
$B'' = 307\ 14\ 45$,	$\sin L''' = 9 \cdot 4817640$.
$B''' = 306\ 17\ 59$,	$\cos L''' = 9 \cdot 9790560$.
$L' = 0\ 11\ 33$,	$\cos(A'' - A') = 9 \cdot 9099845$
$L'' = 55\ 17\ 9$,	$\cos(A''' - A') = 9 \cdot 4873100$.
$L''' = 17\ 35\ 9$,	$\cos(B'' - B') = 9 \cdot 9994874$.
$A'' - A' = 35^d\ 37'\ 46''$,	$\cos(B''' - B') = 9 \cdot 9997770$.
$A''' - A' = 72\ 6\ 51$,	$\cos(B' - A'') = 9 \cdot 4990900$.
$B'' - B' = 182\ 46\ 57$,	$\cos(B' - A''') = 9 \cdot 91217237$.
$B''' - B' = 181\ 50\ 11$,	$\cos(B'' - A') = 9 \cdot 5343986$.
$B' - A'' = 251\ 36\ 18$,	$\cos(B''' - A') = 9 \cdot 5141980$.
$B' - A''' = 215\ 7\ 13$,	
$B'' - A' = 110\ 1\ 1$,	
$B''' - A' = 109\ 4\ 15$,	

Si, d'après ces données, l'on fait le calcul conformément aux §. 663 & 640, l'on aura

$$K = 0{,}996473; \qquad K' = -0{,}005677;$$
$$N = 39^d\ 35'\ 2''; \qquad N' = 90^d\ 14'\ 42''.$$

Détermination des anomalies de la Comete correspondantes aux trois observations dont il s'agit.

(666) Dans le cas dont il s'agit, l'on a

$R' = 1,29367$;	log	$R' = 0.1118290.$
$R'' = 0,99943$;		$R'' = 9.9997524.$
$R''' = 1,02680$;		$R''' = 0.0114820.$
$R'' - R''' = -0,02737$;		$R'' - R''' = 8.4372748.$
$N = 39^d\ 35'\ 2''$;		$\sin N = 9.8042807.$
$N' = 90^d\ 14'\ 42''$;		$\cos N = 9.8868805.$
$\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' = 64^d\ 54'\ 52''$;		$\sin N' = 9.9999960.$
$\frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}N = 25^d\ 19'\ 50''$;		$\cos N' = 7.6310421.$
		$\sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N') = 9.9569727.$
		$\cos(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N') = 9.6273363.$
		$\sin(\frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}N) = 9.6312813.$

Type du Calcul.

$\alpha = -(1) + (2) - (3) - (4)$

	8.4372748	log $(R'' - R''')$	
	0.1118290	log R'	
(1)	8.5491038	....	$-$ 0,035408
	0.3010300	log 2	
	9.9997524	log R''	
	0.0114820	log R'''	
	9.9569727	log sin $(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N')$	
	9.6312813	log sin $(\frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}N)$	
(2)	9.9005184	....	$+$ 0,795277
	0.1118290	log R'	
	0.0114820	log R'''	
	7.6310421	log cos N'	
(3)	7.7543531	....	$-$ 0,005680
	0.1118290	log R'	
	9.9997524	log R''	
	9.8868805	log cos N	
(4)	9.9984619	....	$-$ 0,996463
$\alpha =$		....	$-$ 0,242274

$\beta = -(1) + (2) - (3)$

	0.3010300	log 2	
	9.9997524	log R''	
	0.0114820	log R'''	
	9.6273363	log cos $(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N')$	
	9.6312813	log sin $(\frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}N)$	
(1)	9.5708820	....	$-$ 0,372129
	0.1118290	log R'	
	0.0114820	log R'''	
	9.9999960	log sin N'	
(2)	0.1233070	....	$+$ 1,32833
	0.1118290	log R'	
	9.9997524	log R''	
	9.8042807	log sin N	
(3)	9.9158621	....	$-$ 0,82387
$\beta =$		....	$+$ 0,13217

$$\text{Tang } Z = \frac{-(1)}{+(1)}$$

	9.3843050	log α
	0.8788671	compl. log β
(2)	0.2631721	log Tang Z'

$Z' = 298^d\ 36'\ 51''$

Anomalie de la Comete lors de la premiere observation $= 298^d\ 36'\ 51''$
Anomalie de la Comete lors de la seconde observation $= 338\ \ 11\ \ 53$
Anomalie de la Comete lors de la troisieme observation $= 28\ \ 51\ \ 33$

Détermination

Détermination de l'excentricité, du parametre du grand axe, de la longeur du grand axe, de la diſtance périhélie, de la durée de la révolution de la Comete autour du Soleil, & de l'inſtant de ſon paſſage par le périhélie.

(667) Dans le cas dont il s'agit, l'on a

$R' = 1{,}29367$	log	$R' = 0\cdot1118290.$
$R'' = 0{,}99943$		$R'' = 9\cdot9997524.$
$R'' - R' = -0{,}29424$		$R'' - R' = 9\cdot4687017.$
$Z' = 298^d\ 36'\ 51''$		$\sin Z' = 9\cdot9434276.$
$N = 39\ 35\ 2$		$\cos Z' = 9\cdot6802530.$
$Z' + N = 338\ 11\ 53$		$\cos(Z'+N) = 9\cdot9677693.$

Détermination de $\frac{E}{a}$.

$R' \cos Z' - R'' \cos(Z'+N) = (1) - (2)$

0·1118290 ... log R′
9·6802530 ... log cof Z′
(1) 9·7920828 .... + 0,61956
9·9997524 ... log R″
9·9677693 ... log cof(Z′+N)
(2) 9·9675217 .... − 0,92795
− 0,30839

9·4687017 ... log (R″ − R′)
0·5108997 ... compl. log. 0,30839
9·9796014 ... log $\frac{E}{a}$

$\frac{E}{a} = 0{,}95412$

Détermination du parametre du grand axe.

$P = (1) + (2)$

(1) 2R′ .... + 2,58734
0·3010300 ... log 2
0·1118290 ... log R′
9·9796014 ... log $\frac{E}{a}$.
9·6802530 ... log cof Z′
(2) 0·0727134 .... + 1,18225
P = ... + 3,76959

Détermination du grand axe.

$1 - \frac{E^2}{a^2} = (1) - (2)$

(1) .... + 1,000000
9·9796014 ... log $\frac{E}{a}$,
2
(2) 9·9592028 .... − 0,910338
+ 0,089662

0·2752643.. log $\frac{1}{2}$P
1·0473916.. compl. log$\left(1 - \frac{E^2}{a^2}\right)$
1·3226559.. log *a*
a = 21,02110

Détermination de la distance perihélie.

0·2752643 . . . log $\frac{1}{2}$ P
9·7090480 . . . compl. log $\left(\frac{E}{a}+1\right)$

9·9843123 . . . log dist. périhélie.
Distance périhélie = ... 0,964522 .

Détermination de la durée de la révolution de la Comete.

1·3226559 . . . log a
$\underline{\quad 3}$
3·9679677
$\underline{\quad 2}$

1·9839838 96,379
Durée de la révolution = $96^{ans},379$

Détermination de l'instant du passage de la Comete par son périhélie.

Angle φ

$1+\frac{E}{a}\operatorname{cof} Z' = (1)+(2)$

(1). . . . . + 1,00000

9·9796014 . . log $\frac{E}{a}$
9·6802530 . . . log cof Z

(2) 9·6598544 . . . . + 0,45694

+ 1,45694

9·9434276 . . . fin Z′
9·4763042 . . . log $\sqrt{\left(1-\frac{E^2}{a^2}\right)}$
9·8365588 . . compl. log$\left(1+\frac{E}{a}\operatorname{cof} Z'\right)$

9·2562906 . . . log fin φ
$\varphi = -10^d\ 23'\ 40''$

Réduction de l'arc φ en valeur du rayon.

0,174533 . . . . 10^d
0,006690 . . . . $23'$
0 000194 . . . . $40''$

0,182417 . . . .

Distance de l'instant du passage par le périhélie à l'observation du 9 Octobre 16^h 50′

$\varphi-\frac{E}{a}\operatorname{fin}\varphi = -(1)+(2)$

(1) . . . . − 0,181417

9·9796014 . . . log $\frac{E}{a}$
9·2562906 . . . log fin φ

(2) 9·2358920 . . . . + 0,172147

− 0,009270

1·9839838 . . . log $a^{\frac{3}{2}}$
2·5625970 . . . log 365j,25634
7·9670797 . . . log 0,009270
9·2018134 . . . compl. log arc 360^d

1·7154739 . . . . $51^j,937$

L'obſervation du 9 Octobre 16^h 50′ précédoit donc l'inſtant du paſſage par le périhélie, de 51 jours, 937, ou de 51 jours 22^h 19′. Le paſſage par le périhélie a donc eu lieu le 30 Novembre 15^h 9′.

(668) Il ſuit des recherches précédentes, que ſi l'on calcule l'orbite de la ſeconde Comete de 1781 dans l'hypotheſe elliptique, au lieu des élémens de M. Méchain, l'on aura les ſuivans,

Demi-grand axe de la Comete $=$ . . . . . 21,02110.
Parametre du grand axe $=$ . . . . 3,76959.
Valeur de $\frac{E}{a} =$ . . . . 0,95412.
Diſtance périhélie $=$ . . . . 0,964522.
Durée de la révolution de la Comete . . . 96,379, ans.
Paſſage par le périhélie 30 Novembre 15^h 9′.

Equation à l'orbite de la Comete.

$$2R(1+0{,}95412\cos Z)-3{,}76959=0.$$

L'on auroit d'ailleurs (§. 657 & 658),

Longitude du nœud	77^d 23′ 0″.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	17 8 8.
Inclinaiſon du plan de l'orbite	152 48 50.

Nous ne donnons point ces élémens pour exacts.

ARTICLE IV.

D'une vérification qu'il faut faire ſubir aux élémens, pour s'aſſurer de leur exactitude.

(669) Indépendamment des conditions que nous avons remplies dans les Articles précédens, & qui ont déterminé les trajectoires, il en eſt une dont nous n'avons point fait uſage, à laquelle il eſt cependant néceſſaire de ſatisfaire, & qui ſervira à vérifier les élémens ; je veux parler du tems écoulé entre les obſervations. En effet, nous avons donné précédemment, l'expreſſion du tems écoulé entre le paſſage de l'Aſtre par ſon périhélie, & l'inſtant où il ſe trouve à l'extrémité d'un rayon vecteur quelconque. Nous avons vu que ſi l'on nomme

Z' l'anomalie de l'Aſtre à un inſtant quelconque ;
R' ſon rayon vecteur,
a le demi-grand axe de l'orbite ;
E la diſtance du foyer au centre de l'orbite ;
D la diſtance périhélie ;
T le tems écoulé depuis le paſſage par le périhelie juſqu'à l'inſtant de l'obſervation ;

L'on a, dans le cas de la Parabole, pour une obſervation quelconque ;

$$(1)\ T = 109{,}6153^{\text{jours}}\, D^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{4}\tang^{3}\tfrac{1}{2}Z' + \tfrac{3}{4}\tang\tfrac{1}{2}Z'\right);$$

Et dans le cas de l'ellipse,

$$(2)\ T = 365{,}25634^{\text{jours}}\ \frac{a^{\frac{3}{2}}\left(\varphi - \frac{E}{a}\sin\varphi\right)}{\text{arc } 360^{d}};$$

en supposant d'ailleurs

$$(3)\ \sin\varphi = \frac{\sin Z' \sqrt{\left(1 - \frac{E^2}{a^2}\right)}}{1 + \frac{E}{a}\cos Z'}.$$

Si donc les élémens sont bien déterminés, il faut qu'en reprenant les trois observations dont on a fait usage pour calculer l'orbite, & en nommant

T, T', T'' le tems écoulé depuis le passage par le périhélie, jusqu'à chacune des observations respectives;

les valeurs de T, T', T'', que l'on déduit des équations précédentes, soient telles que $T' - T$ représente le tems écoulé entre la premiere & la seconde observation; & que $T'' - T$ représente le tems écoulé entre la premiere & la troisieme observation. Si cette condition est remplie, on aura une très-grande probabilité sur l'exactitude des élémens.

(670) Si l'on applique le calcul à l'orbite elliptique dont nous venons de déterminer les élémens, l'on aura pour l'observation du 9 Octobre $16^h\ 50'$, $T = -51^{\text{jours}}\ 22^h\ 19'$; pour l'observation du 14 Novembre $8^h\ 30'$, $T' = -15^{\text{jours}}\ 8^h\ 10'$; pour l'observation du 20 Décembre $6^h\ 6'$, $T'' = 20^{\text{jours}}\ 15^h\ 55'$; donc $T' - T = 36^{\text{jours}}\ 14^h\ 9'$; $T'' - T = 72^{\text{jours}}\ 14^h\ 4'$; $T'' - T' = 36^{\text{jours}}\ 0^h\ 5'$. Dans le fait, il s'est écoulé $35^{\text{jours}}\ 15^h\ 40'$ entre la premiere & la seconde observation; $71^{\text{jours}}\ 15^h\ 16'$ entre la premiere & la troisieme observation; $35^{\text{jours}}\ 21^h\ 36'$ entre la seconde & la troisieme observation; les élémens elliptiques que nous venons de déterminer ne satisfont donc pas rigoureusement au Problême.

Remarque sur la solution précédente.

(671) On ne doit point s'étonner de ce que les élémens que nous venons de trouver ne satisfont pas rigoureusement à toutes les conditions du Problême. En effet, si l'on jette les yeux sur l'analyse dont nous avons fait usage, on pourra remarquer que des trois rayons vecteurs hypothétiques R', R'', R''' correspondans aux trois observations des 9 Octobre $16^h\ 50'$, 14 Novembre $8^h\ 30'$, 20 Décembre $6^h\ 6'$, le premier & le dernier conviennent à la Parabole déterminée par M. Méchain; que le second est celui que nous avons déterminé dans le §. 638, & qui n'est point conclu de l'hypothese parabolique. Ces rayons n'appartiennent donc véritablement, ni à l'hypothese parabolique, ni à la théorie que nous avons développée dans les §. 628 & suivans. Et si nous eussions voulu calculer dans les suppositions rigoureuses de la méthode, il auroit

fallu déterminer les rayons vecteurs correspondans au commencement & à la fin de l'apparition de la Comete, par les mêmes méthodes que nous avons employées pour calculer le rayon vecteur du 14 Novembre $8^h\ 30'$. Au reste, nous ne nous sommes proposé que de donner un exemple du calcul dans l'hypothese elliptique.

Nous ne devons cependant point passer ici sous silence la méthode qu'il faudroit employer pour déterminer, d'après les premiers résultats, la véritable orbite elliptique. Et d'abord nous remarquerons que tout consiste à faire usage des véritables rayons vecteurs R', R'', R''', qui conviennent aux trois instans auxquels on rapporte les observations. Nous avons développé, dans le §. 628 & suivans, les moyens que fournit la théorie des forces centrales pour approcher des valeurs de R', R'', R'''. Je suppose donc que, soit par ce moyen, soit par tout autre, on connoisse les valeurs approchées de R', R'', R'''; on fera les calculs indiqués ci-dessus, & l'on constatera si les expressions de $T'-T$, $T''-T$ satisfont aux véritables intervalles écoulés entre les observations.

Si les expressions de $T'-T$, $T''-T$, satisfont aux véritables intervalles, il est évident que l'on devra avoir, en nommant,

t le tems écoulé entre la premiere & la seconde observation ;
t'' le tems écoulé entre la premiere & la troisieme observation ;

$$(1)\ T'-T-t=0; \qquad (2)\ T''-T-t''=0.$$

Mais cette condition ne peut être remplie qu'autant que les rayons vecteurs auront été bien déterminés, ce qui n'est pas probable. Si donc les équations (1) & (2) ne sont point satisfaites, on regardera comme constant l'un quelconque des rayons vecteurs, celui, par exemple, auquel les méthodes des §. 628 & suivans paroîtront donner plus de certitude. L'on fera alors varier d'une petite quantité, l'un quelconque des deux autres rayons vecteurs, en regardant le troisieme comme donné. On cherchera, dans cette hypothese, les nouvelles valeurs des angles N, N', des anomalies de la Comete, de l'excentricité, du parametre du grand axe, de la valeur du grand axe, de la distance périhélie, &c.; & l'on constatera à quoi se réduisent, dans cette nouvelle hypothese, les équations (1) & (2) du présent paragraphe. L'on fera ensuite varier, d'une petite quantité, le troisieme rayon vecteur, en regardant comme donné, celui des deux rayons vecteurs que l'on avoit fait varier dans la premiere opération, l'on recommencera le calcul des angles N, N', des anomalies de la Comete, &c., & l'on constatera à quoi se réduisent, dans cette nouvelle hypothese, les équations (1) & (2).

Soient

P, P' les quantités auxquelles les équations (1) & (2) se réduisent dans le premier calcul;

$P+p$, $P'+p'$ les quantités auxquelles ces équations se réduisent dans la seconde hypothese ;

$P+\pi$, $P'+\pi'$ les quantités auxquelles les équations se réduisent dans la troisieme hypothese;

Et nommons

ρ le rayon vecteur que l'on a regardé comme constant ;
ρ' le rayon vecteur que l'on a fait varier lors du second calcul ;
α la quantité dont on a fait varier ce rayon lors du second calcul ;
ρ'' le rayon vecteur que l'on a fait varier lors du troisieme calcul ;
β la quantité dont on a fait varier ce rayon lors du troisieme calcul ;

L'on aura, d'après les principes du §. 652,

$$(3)\ d\rho' = \frac{\alpha\,(P'\pi - P\,\pi')}{p\,\pi' - p'\,\pi}\ ; \qquad (4)\ d\rho'' = \frac{\beta\,(P\,p' - P'\,p)}{p\,\pi' - p'\,\pi}.$$

(671) La méthode précédente ne peut complétement réussir qu'autant que le rayon vecteur que l'on a regardé comme constant dans les différentes opérations, a véritablement la valeur qu'on lui a supposée ; il conviendra donc de supposer successivement différentes valeurs à ce rayon vecteur, & de recommencer les opérations indiquées ci-dessus, dans ces différentes hypotheses. L'on aura, par cette méthode, une suite de valeurs correlatives de R', R'', R''', qui toutes satisferont à l'orbite elliptique ; & l'on choisira, parmi ces valeurs, celles qui d'ailleurs satisferont à la seconde condition du Problême ; c'est-à-dire, celles qui rendront nulle l'équation (2) du §. 553.

On pourra objecter que l'équation (2) du §. 553 ne paroît pas renfermer les quantités R', R'', R''', puisque les seules variables qu'elles contiennent sont Δ', Δ'', Δ''' ; mais on se rappellera que l'on a d'ailleurs

$$(1)\ \Delta' = r' \operatorname{cos} L' \operatorname{cos}(B'-A') \pm \sqrt{(R'^2 - r'^2(1 - \operatorname{cos}^2 L' \operatorname{cos}^2 (B'-A')))}\ ;$$
$$(2)\ \Delta'' = r'' \operatorname{cos} L'' \operatorname{cos}(B''-A'') \pm \sqrt{(R''^2 - r''^2(1 - \operatorname{cos}^2 L'' \operatorname{cos}^2 (B''-A'')))}\ ;$$
$$(3)\ \Delta''' = r''' \operatorname{cos} L''' \operatorname{cos}(B'''-A''') \pm \sqrt{(R'''^2 - r'''^2(1 - \operatorname{cos}^2 L''' \operatorname{cos}^2 (B'''-A''')))}.$$

On pourroit également chercher d'abord quelles sont les valeurs correlatives de Δ', Δ'', Δ''', qui rendent nulle l'équation (2) du §. 553, & déterminer ensuite quel est le systême particulier qui satisfait aux équations (1) & (2) du §. précédent.

ARTICLE V.

Détermination de la trajectoire, dans le cas où l'on sauroit d'avance que cette trajectoire est circulaire.

(672) Si l'on savoit d'avance que la trajectoire est circulaire, le calcul seroit plus simple. Je vais m'occuper de la détermination des élémens, dans ce cas particulier. Soit

R' le rayon vecteur de l'Astre,
A' la longitude du Soleil,
r' la distance du Soleil à la Terre,
Δ' la distance de l'Astre à la Terre,
B' sa longitude géocentrique
L' sa latitude géocentrique,

} lors de la premiere observation ;

R''' le rayon vecteur de l'Aſtre,
A''' la longitude du Soleil,
r''' la diſtance du Soleil à la Terre,
Δ''' la diſtance de l'Aſtre à la Terre,
B''' ſa longitude géocentrique,
L''' ſa latitude géocentrique;
} lors de la derniere obſervation;

ζ la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de l'Aſtre;
I l'inclinaiſon du plan de l'orbite ſur l'Ecliptique;
1 la moyenne diſtance de la Terre au Soleil;
t le nombre de minutes horaires écoulées entre les deux obſervations;

Il ſuit des recherches précédentes, que l'on a

$$(1)\quad R'^2 - \Delta'^2 + 2\Delta' r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A') - r'^2 = 0;$$

$$(2)\quad R'''^2 - \Delta'''^2 + 2\Delta''' r''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A''') - r'''^2 = 0;$$

Mais par la ſuppoſition $R' = R'''$; donc

$$(3)\quad \Delta'^2 - \Delta'''^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A') + 2\Delta''' r''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A''') + r'^2 - r'''^2 = 0.$$

Maintenant, ſi l'on conſidere trois obſervations faites à intervalles de tems égaux, en ayant égard à toutes les attentions dont nous avons parlé précédemment, & notamment dans les §. 592, 593 & 594, &c., que l'on conſerve les définitions de b & c des mêmes paragraphes, & que l'on cherche le rapport entre la premiere & la derniere diſtance, l'on aura

$$(4)\quad \Delta''' - \frac{c}{b}\Delta' = 0;$$

Donc

$$(5)\quad \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\Delta'^2 - 2\left(r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A') - \frac{c}{b} r''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A''')\right)\Delta' + r'^2 - r'''^2 = 0.$$

Au moyen de cette derniere équation, l'on connoîtra la diſtance Δ' de l'Aſtre à la Terre, lors de la premiere obſervation; d'où l'on conclura la diſtance Δ''' de l'Aſtre à la Terre, lors de la derniere obſervation, au moyen de l'équation (4); & enfin le rayon de l'orbite circulaire de l'Aſtre, au moyen de l'une des deux équations (1) ou (2). Et comme les quarrés des révolutions périodiques ſont comme les cubes des grands axes, l'on aura

$$(6)\quad \text{Tems de la révolution ſidérale de l'Aſtre} = R^{\frac{3}{2}} \times 365{,}25634^{\text{jours}}.$$

(674) La détermination de l'inclinaiſon du plan de l'orbite de l'Aſtre ſur l'Ecliptique, & de l'angle que fait le rayon vecteur de l'Aſtre, lors de la premiere obſervation avec la ligne des nœuds, compté ſur le plan

de l'orbite de l'Astre, ne présente pas beaucoup plus de difficultés. En effet, si l'on nomme

u' l'angle du rayon vecteur de l'Astre avec la ligne des nœuds lors de la premiere observation ; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de l'Astre, en partant du nœud ascendant de l'orbite ;

u''' l'angle du rayon vecteur de l'Astre avec la ligne des nœuds lors de la derniere observation ;

N' l'angle compris entre les deux rayons vecteurs sur le plan de l'orbite de l'Astre;

L'on a (§. 448) les équations suivantes

(1) $R' \sin u' \sin I - \Delta' \sin L' = 0$;

(2) $R''' \sin u''' \sin I - \Delta''' \sin L''' = 0$.

De ces équations, l'on tire, à cause de $R' = R'''$,

(3) $\Delta' \sin L' \sin u''' - \Delta''' \sin L''' \sin u' = 0$;

Mais $u''' = u' + N'$; donc

(4) $\text{Tang } u' = \dfrac{\Delta' \sin L' \sin N'}{\Delta''' \sin L''' - \Delta' \sin L' \cos N'}$.

On voit donc que l'on connoîtra l'angle u' que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, lorsque l'angle N' sera déterminé. On déterminera ensuite l'inclinaison I, au moyen de l'équation (1). Quant à la détermination de la longitude du nœud ascendant de l'Astre, & du sens de son mouvement sur l'orbite, pour fixer ces élémens, on aura recours aux formules du §. 448.

(675) Il n'est pas difficile de déterminer l'angle N' correspondant au nombre t de minutes horaires écoulées entre les deux observations extrêmes que l'on considere. Soit en effet

1 la moyenne distance du Soleil à la Terre ;

s l'arc que la Terre décrit pendant une minute de tems, lorsqu'elle est dans sa moyenne distance ;

t le nombre de minutes horaires écoulées entre les deux observations extrêmes que l'on considere ;

Il est évident que l'arc décrit par la Terre pendant le tems t sera égal à $t \times s$; mais le nombre de degrés décrit par l'Astre dans son orbite circulaire est au nombre de dégrés décrit par la Terre dans le même tems, comme 1 est à $R'^{\frac{3}{2}}$; donc

(1) $N' = \dfrac{t \times s}{R'^{\frac{3}{2}}}$;

Nous remarquerons que si l'on veut exprimer s en secondes de degré, l'on aura $s = 2'',46512$; log. $s = 0{\cdot}3916614$.

(676) Il n'est pas même indispensable d'avoir recours à l'équation précédente pour déterminer l'angle N'; en effet nous avons vu §. 639, que si l'on nomme

N' l'angle compris entre les deux rayons vecteurs;

R',R'''

R', R''' les deux rayons vecteurs correſpondans aux obſervations dont il s'agit, & qui ſont égaux dans notre hypotheſe ;

Δ', Δ''' les diſtances de l'Aſtre à la Terre,
r', r''' les rayons vecteurs de la Terre ;
A', A''' les longitudes du Soleil ;
B', B''' les longitudes géocentriques de l'Aſtre ;
L', L''' les latitudes géocentriques de l'Aſtre ;
} lors des deux obſervations que l'on conſidere ;

$$K' = \Delta' \Delta''' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - B') + \Delta' \Delta''' \operatorname{fin} L' \operatorname{fin} L'''$$
$$- r' \Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A') - r''' \Delta' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A''') + r' r''' \operatorname{cof}(A''' - A') ;$$

L'on a

$$(1) \quad \operatorname{fin} \tfrac{1}{2} N' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{R' R'''} K'\right)}.$$

On pourra ſe ſervir de cette équation pour déterminer l'angle N'.

Au reſte, ſi cette derniere expreſſion de l'angle N' eſt plus compliquée que celle du §. précédent, elle eſt au moins utile pour vérifier l'hypotheſe circulaire. En effet, ſi l'hypotheſe eſt exacte, les deux valeurs de l'angle N' doivent donner le même réſultat.

Je ne m'étendrai pas davantage ſur la queſtion dont il s'agit, véritablement plus curieuſe qu'elle n'eſt utile. En effet, nous ne connoiſſons aucun Aſtre qui décrive une orbite circulaire autour du Soleil. Il eſt même infiniment peu probable qu'il en exiſte qui ſe meuvent dans de pareilles trajectoires.

Remarques ſur l'équation (5) du §. 673, & ſur ſon uſage dans le cas d'une orbite peu excentrique.

(677) Je dois parler ici de l'uſage de l'équation (5) du §. 673 ; voici en peu de mots en quoi il conſiſte. Lorſque l'on a déterminé les rapports des diſtances d'un Aſtre à la Terre pour trois obſervations, nous avons preſcrit de déterminer les diſtances abſolues, au moyen des équations (2) du §. 553 ou (2) du §. 593. L'équation (2) du §. 553 eſt indépendante de la nature de la trajectoire, mais elle exige une très-grande préciſion dans les obſervations ; l'équation (2) du §. 593 exige une préciſion moins grande, mais étant fondée ſur une propriété de la Parabole, elle ſuppoſe que l'orbite eſt très-excentrique ; ſi donc l'orbite étoit peu différente du cercle, il y auroit à craindre que l'erreur de la ſuppoſition n'influât ſur le réſultat. Il conviendra dans ce cas, de ſubſtituer l'équation (5) du §. 673 à l'équation (2) du §. 593.

(678) Si l'on vouloit apprécier l'erreur de l'équation (5) du §. 673 dans le cas des orbites peu excentriques, rien ne ſeroit plus facile. En effet, des équations (1) & (2) du §. 673, l'on tire

$$(1) \quad \Delta'^2 - \Delta'''^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cof} L' \operatorname{cof}(B' - A') + 2\Delta''' r''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof}(B''' - A''')$$
$$+ r'^2 - r'''^2 - R'^2 + R'''^2 = 0.$$

Cette nouvelle équation ne differe de l'équation (3) du §. 673, que par le terme $+R'''^2 - R'^2$, que l'on peut mettre sous la forme suivante $+(R'''+R')(R'''-R'$. Mais à cause du peu d'excentricité supposée de l'orbite, $R'''+R' = 2R'$; & $R'''-R' = dR'$; donc $R'''^2 - R'^2 = 2R'dR'$.

Soit maintenant

a le demi-grand axe de l'orbite elliptique;
E la distance du foyer au centre de la section;
Z' l'anomalie de la Planete, lors de la premiere observation;
N' la variation de l'anomalie pendant l'intervalle des observations;

L'on aura, en vertu de l'équation à l'ellipse,

$$(2)\quad dR'\left(1+\frac{E}{a}\operatorname{cos} Z'\right) = \frac{E}{a} R' \operatorname{sin} Z' dZ'.$$

Donc $2R'dR' = \dfrac{\frac{2E}{a} R'^2 \operatorname{sin} Z' dZ'}{1+\frac{E}{a}\operatorname{cos} Z'} = \dfrac{2E}{a} R'^2 \operatorname{sin} Z' dZ'$, en négligeant les secondes puissances de l'excentricité. Mais (§. 673 éq. (1)) $R'^2 = \Delta'^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cos} L' \operatorname{cos}(B'-A') + r'^2$, & $dZ' = N'$; l'équation (1) du présent paragraphe deviendra donc

$$(3)\quad (\Delta'^2 - 2\Delta' r' \operatorname{cos} L' \operatorname{cos}(B'-A') + r'^2)\left(1+\frac{2E}{a} N' \operatorname{sin} Z'\right)$$
$$- \Delta'''^2 + 2\Delta''' r''' \operatorname{cos} L''' \operatorname{cos}(B'''-A''') - r'''^2 = 0.$$

Et l'on est en état d'apprécier l'exactitude de la formule, dans le cas où l'on néglige le petit terme $\frac{2E}{a} N' \operatorname{sin} Z'$.

ARTICLE VI.

Détermination des élémens d'une Comete dont l'orbite est déjà connue, d'après une seule observation.

(679) Puisque dans la supposition dont il s'agit, les élémens de l'orbite de la Comete ont été déterminés d'après une précédente apparition, le Problême se réduit à déterminer le passage de la Comete par le périhélie, pour l'apparition dont est question, d'après une seule observation de la Comete. Rien n'est plus simple que ce Problême; car puisque, par la supposition, l'on connoît tous les élémens de la Comete, sa distance périhélie, le lieu du périhélie sur l'orbite, la longitude du nœud ascendant, l'inclinaison de l'orbite, le sens du mouvement; on déterminera facilement l'angle du rayon vecteur de la Terre avec la ligne des nœuds, à l'instant de l'observation. Soit en effet

r' le rayon vecteur de la Terre à l'instant de l'observation;
R le rayon vecteur de la Comete;
B' la longitude géocentrique de la Comete;
L' la latitude géocentrique de la Comete;

I l'inclinaiſon de l'orbite de la Comete;
ζ la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Comete;
u' l'angle du rayon vecteur de la Comete, avec la ligne des nœuds, compté ſur le plan de l'orbite de la Comete;

Nous avons vu (§. 448 éq. (5) & (6)) que l'on a les équations ſuivantes

$$(1)\quad \text{Tang}(B'-\zeta)(r'\cos(A'-\zeta)+R'\cos u')-r'\sin(A'-\zeta)-R'\sin u'\cos I=0;$$

$$(2)\quad (R'\sin u'\cos I+r'\sin(A'-\zeta))\,\text{Tang}\,L'-R'\sin u'\sin I\sin(B'-\zeta)=0.$$

Si l'on élimine R' au moyen de ces deux équations, l'on aura

$$(3)\quad \text{Tang}\,u'=\frac{\text{Tang}(A'-\zeta)\ \text{tang}\,L'}{\sin I(\text{Tang}(A'-\zeta)\cos(B'-\zeta)-\sin(B'-\zeta))+\cos I\ \text{tang}\,L'}.$$

Au moyen de cette derniere équation, on déterminera l'angle du rayon vecteur de la Comete avec la ligne des nœuds compté ſur le plan de l'orbite, à l'inſtant de l'obſervation.

Soit maintenant

Ω l'angle du périhélie avec la ligne des nœuds, compté ſur le plan de l'orbite;
Z' l'anomalie de la Comete lors de l'obſervation dont il s'agit;
D la diſtance périhélie de la Comete;
T le nombre de minutes horaires écoulées depuis le paſſage par le périhélie juſqu'au moment de l'obſervation;

On aura

$$(4)\quad Z'=u'-\Omega;$$

D'où l'on conclura l'inſtant du paſſage de la Comete par le périhélie, au moyen de l'équation ſuivante,

$$(5)\quad T=1440'\times 109{,}6153\,D^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{4}\text{tang}^3\tfrac{1}{2}Z'+\tfrac{3}{4}\text{tang}\tfrac{1}{2}Z'\right).$$

Article VII.

Du cas particulier où l'on auroit obſervé la Comete dans les deux nœuds.

(680) Je dois parler d'un cas ſingulier lors duquel le Problême général ſe réſout rigoureuſement, & ſe ramene à une équation du quatrieme dégré; c'eſt celui où la Comete aura été obſervée dans les deux nœuds; en voici l'analyſe.

Soit

R' le rayon vecteur de la Comete lors de la premiere obſervation;
Z' l'anomalie de la Comete;
A' la longitude du Soleil;
r' le rayon vecteur de la Terre;
B' la longitude géocentrique de la Comete;
R'' le rayon vecteur de la Comete lors de la ſeconde obſervation;
Z'' l'anomalie de la Comete;
A'' la longitude du Soleil;
r'' le rayon vecteur de la Terre;
B'' la longitude géocentrique de la Comete;
ζ la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Comete;

I l'inclinaiſon du plan de l'orbite ſur l'Ecliptique ;
D la diſtance périhélie ;
1 la moyenne diſtance de la Terre au Soleil ;
t le nombre de minutes horaires écoulées entre les deux obſervations.

Il ſuit de nos recherches que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\quad R'(1+\operatorname{cof} Z')-2D=0;$$

$$(2)\quad R''(1+\operatorname{cof} Z'')-2D=0;$$

$$(3)\quad t=360'\times 109{,}6153\,((R''+2D)\sqrt{(R''-D)}+(R'+2D)\sqrt{(R'-D)}),$$

De plus, ſi dans l'équation (5) du §. 448, l'on ſuppoſe $u'=0$, $\operatorname{fin} u'=0$, $\operatorname{cof} u'=\pm 1$; elle deviendra $r'\operatorname{cof}(A'-\zeta)\operatorname{tang}(B'-\zeta)\pm R'\operatorname{tang}(B'-\zeta)-r'\operatorname{fin}(A'-\zeta)=0$; mais $\operatorname{cof}(A'-\zeta)\operatorname{tang}(B'-\zeta)-\operatorname{fin}(A'-\zeta)=\frac{\operatorname{fin}(B'-A')}{\operatorname{cof}(B'-\zeta)}$; donc $r'\operatorname{fin}(B'-A')\pm R'\operatorname{fin}(B'-\zeta)=0$; on a donc, pour les deux obſervations dont il s'agit, deux équations de la forme ſuivante,

$$(4)\quad \pm R'\operatorname{fin}(B'-\zeta)+r'\operatorname{fin}(B'-A')=0;$$

$$(5)\quad \mp R''\operatorname{fin}(B''-\zeta)+r''\operatorname{fin}(B''-A'')=0.$$

Je reprends les équations (1) & (2), & je remarque que puiſque les anomalies de la Comete different de 180^d, l'on a $\operatorname{cof} Z''=-\operatorname{cof} Z'$; donc

$$(6)\quad (R''-R')-(R''+R')\operatorname{cof} Z'=0;$$

Je ſubſtitue cette valeur de $\operatorname{cof} Z'$ dans l'équation (1) & j'en conclus

$$(7)\quad D=\frac{R'R''}{R'+R''}.$$

Donc $(R'+2D)\sqrt{(R'-D)}=\frac{R'^3+3R'^2R''}{(R'+R'')^{\frac{3}{2}}}$; $(R''+2D)\sqrt{(R''-D)}=\frac{R''^3+3R''^2R'}{(R'+R'')^{\frac{3}{2}}}$; donc $(R'+2D)\sqrt{(R'-D)}+(R''+2D)\sqrt{(R''-D)}=(R'+R'')^{\frac{3}{2}}$; donc $R'+R''=\left(\frac{t}{360'\times 109{,}6153}\right)^{\frac{2}{3}}$; donc ſi l'on ſuppoſe

$$M=\left(\frac{t}{360'\times 109{,}6153}\right)^{\frac{2}{3}};$$

L'on aura

$$(8)\quad R'+R''-M=0.$$

Je reprends maintenant les équations (4) & (5), & j'en tire

$$R'=\mp\frac{r'\operatorname{fin}(B'-A')}{\operatorname{fin}(B'-\zeta)};\qquad R''=\pm\frac{r''\operatorname{fin}(B''-A'')}{\operatorname{fin}(B''-\zeta)};$$

Donc $R'+R''=\mp\frac{r'\operatorname{fin}(B'-A')}{\operatorname{fin}(B'-\zeta)}\pm\frac{r''\operatorname{fin}(B''-A'')}{\operatorname{fin}(B''-\zeta)}$;

Donc enfin

$$(9)\ \text{M} \sin(\text{B}'-\zeta) \sin(\text{B}''-\zeta) \pm r' \sin(\text{B}'-\text{A}') \sin(\text{B}''-\zeta) \mp r'' \sin(\text{B}''-\text{A}'') \sin(\text{B}'-\zeta) = 0.$$

Soit maintenant

β la différence des angles B′ & B″ de ſorte que l'on ait $\text{B}'' = \text{B}' + \beta$;

L'on aura $\sin(\text{B}''-\zeta) = \sin(\text{B}'-\zeta) \cos\beta + \cos(\text{B}'-\zeta) \sin\beta$; & l'équation (9) deviendra

$$(10)\ \text{M} \sin(\text{B}'-\zeta)(\sin(\text{B}'-\zeta)\cos\beta + \cos(\text{B}'-\zeta)\sin\beta) \pm r' \sin(\text{B}'-\text{A}')(\sin(\text{B}'-\zeta)\cos\beta + \cos(\text{B}'-\zeta)\sin\beta) \mp r'' \sin(\text{B}''-\text{A}'') \cos(\text{B}'-\zeta) = 0.$$

Cette équation donnera la poſition du nœud. Lorſque cette poſition ſera déterminée, on connoîtra facilement les rayons vecteurs correſpondans aux obſervations, & en général tous les élémens de la Comete, à l'exception toutefois de l'inclinaiſon de l'orbite, qui ne pourra être déterminée que par une troiſieme obſervation.

Dans les équations précédentes, la premiere ſuite de ſignes ſuppoſe que lors de la premiere obſervation, la Comete étoit dans ſon nœud aſcendant. Il faudroit employer les ſignes inférieurs, ſi l'on étoit dans le cas contraire.

Remarque ſur la ſolution précédente.

(681) L'équation (10) du §. précédent paroît promettre quatre valeurs différentes de $\sin(\text{B}'-\zeta)$, puiſque cette équation eſt du quatrieme degré; on pourroit donc penſer que l'on a quatre Paraboles qui peuvent ſatisfaire au Problême; mais cette concluſion ſeroit précipitée. En effet, je vais faire voir que deux des valeurs données par l'équation (10) n'appartiennent point à la queſtion, & que par conſéquent il n'y a que deux paraboles qui ſatisfaſſent aux obſervations. Fig. 22.

Pour y parvenir, ſoit N*n* la ligne des nœuds; S le Soleil; N le lieu de la Comete lors de la premiere obſervation; *n* le lieu de la Comete lors de la ſeconde obſervation; T le lieu de la Terre lors de la premiere obſervation; T′ le lieu de la Terre lors de la ſeconde obſervation; TN la direction du rayon viſuel mené à la Comete lors de la premiere obſervation; T′*n* la direction du rayon viſuel lors de la ſeconde obſervation. Il eſt évident que d'après cette conſtruction, $\text{SN} = \text{R}'$, $\text{S}n = \text{R}''$, & que $\text{SN} + \text{S}n$ eſt une quantité connue. Il eſt également évident que ſi l'on ſuppoſoit un obſervateur immobile placé au point *t* interſection des lignes TN, T′*n*, cet obſervateur rapporteroit la Comete aux mêmes points du Ciel lors des deux obſervations, que l'obſervateur placé ſur la Terre & qui a paſſé de T en T′. On ſent pareillement qu'il eſt facile de déduire des obſervations, la poſition du point *t*, interſection des deux rayons viſuels, & l'angle N*tn* de ces rayons. Le Problême ſe réduit donc à l'énoncé ſuivant,

Fig. 22. Etant donné ſur un plan, la poſition d'un point t, par rapport à un point S pris ſur le même plan, & l'angle Ntn formé au point t, par deux droites indéfinies tN, tn, déterminer quelle doit être la poſition des lignes NSn, $N'Sn'$ paſſant par le point S, pour que la ſomme des droites Nn, $N'n'$ compriſes dans l'angle Ntn ſoit égale à une quantité donnée.

Or il eſt aiſé de démontrer qu'il n'y a que deux lignes qui ſatisfaſſent à la queſtion. Il n'y a donc que deux Paraboles qui puiſſent convenir aux deux premieres obſervations, & il faudra une troiſieme obſervation pour déterminer celle des deux Paraboles qu'il conviendra de choiſir, ainſi que l'inclinaiſon du plan de l'orbite.

(682) Il reſte maintenant à faire voir quel problême ſe trouve réſolu par les autres racines de l'équation (10) du §. 680. Cette difficulté s'éclaircit facilement par les conſidérations du paragraphe précédent. En effet, nous avons demandé à la Géométrie quelle devoit être la poſition des lignes NSn, $N'Sn'$ paſſant par le point S, & terminées par les droites indéfinies TtN, $T'tn$, pour que les parties Nn, $N'n'$ de ces droites interceptées entre les droites TtN, $T'tn$, fuſſent égales à une quantité donnée; la Géometrie a donc dû donner la ſolution du Problême, ſoit que le point S fût ſitué entre les points N, n, N', n', ſoit que le point S fût extérieur à ces points. La Géometrie réſout donc tous les cas, quoique l'Aſtronomie reſtraigne la queſtion au cas particulier où le point S eſt ſitué entre les points N, n, N', n'. Au reſte on ne peut jamais être embarraſſé ſur le choix de ces valeurs. En effet, nous avons vu que ſi l'on ſuppoſe $M = \left(\frac{t}{360 \times 109{,}6153}\right)^{\frac{2}{3}}$ l'on a $R' + R'' - M = 0$; que de plus $R' = \mp \frac{r' \sin(B' - A')}{\sin(B' - \zeta)}$; & qu'enfin $R'' = \pm \frac{r'' \sin(B'' - A'')}{\sin(B'' - \zeta)}$. Les valeurs de ζ qui ſatisfont au Problême aſtronomique ſont donc celles qui, ſubſtituées dans les expreſſions corrélatives de R' & de R'', donnent $R' + R'' - M = 0$.

ARTICLE VIII.

Des équations à la projection des orbites paraboliques des Cometes ſur l'Ecliptique.

(683) Je dois déterminer maintenant les équations à la projection des orbites paraboliques des Cometes ſur l'Ecliptique.

Soit

R le rayon vecteur de la Comete dans ſon orbite;
ρ le rayon vecteur correſpondant dans la parabole projettée ſur l'Ecliptique;
u l'angle traverſé par la Comete dans la parabole, depuis le paſſage par la ligne des nœuds;

v l'angle traverſé correſpondant dans la parabole projettée ;
I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comete ſur l'Ecliptique ;
D la diſtance périhélie ;
Ω l'angle intercepté ſur le plan de l'orbite de la Comete, entre le lieu du périhélie & le lieu du nœud.

Puiſque la trajectoire de la Comete ſur le plan de l'orbite a pour équation

$$R(1+\cos(u-\Omega))-2D=0,$$

l'on a

$$(1)\quad R(1+\cos u \cos\Omega+\sin u \sin\Omega)-2D=0.$$

D'ailleurs, ſi de la projection de la Comete ſur l'Ecliptique, & du lieu de la Comete dans ſon orbite, l'on abaiſſe des perpendiculaires ſur la ligne des nœuds, l'on aura

$$(2)\quad R\cos u-\rho\cos v=0;$$

$$(3)\quad R\sin u\cos I-\rho\sin v=0.$$

Si dans l'équation (1) l'on élimine $R\sin u$ & $R\cos u$, au moyen des équations (2) & (3), elle deviendra

$$(4)\quad R\cos I+\rho(\cos v\cos\Omega\cos I+\sin v\sin\Omega)-2D\cos I=0;$$

Mais à cauſe des équations (2) & (3),

$$(5)\quad R^2\cos^2 I-\rho^2(\cos^2 v\cos^2 I+\sin^2 v)=0.$$

On a donc pour équation à la parabole de projection ſur l'Ecliptique, en prenant le Soleil pour pole & la ligne des nœuds pour l'origine des angles traverſés,

$$(6)\quad \rho^2(\cos v\sin\Omega\cos I-\sin v\cos\Omega)^2$$
$$+4D\rho\cos I(\cos v\cos\Omega\cos I+\sin v\sin\Omega)-4D^2\cos^2 I=0.$$

De quelques propriétés des Paraboles de projection.

(684) Il eſt aiſé de tirer de l'équation précédente, la poſition du diametre de la Parabole de projection paſſant par le Soleil. En effet, ſi l'on mene le rayon vecteur dans le parallèliſme de ce diametre, ſon expreſſion doit être infinie ; on a donc pour déterminer cette poſition, l'équation ſuivante,

$$(1)\quad \cos v\sin\Omega\cos I-\sin v\cos\Omega=0.$$

D'où l'on conclura la valeur particuliere de v, qui donne la poſition du diametre cherché.

On déterminera auſſi facilement le parallèliſme des ordonnées au diametre paſſant par le Soleil. En effet, ce parallèliſme eſt déterminé par la valeur de v, qui donne des valeurs égales, poſitives & négatives, pour le rayon vecteur ; on a donc

$$(2)\quad \cos v\cos\Omega\cos I+\sin v\sin\Omega=0;$$

D'où l'on conclura la valeur particuliere de v qui donne le parallèliſme des ordonnées à ce diametre.

(685) La ſuppoſition de $\cos v \cos \Omega \cos I + \sin v \sin \Omega = 0$, réduit l'équation (6) du §. 681 à l'expreſſion ſuivante,

$$(1)\quad \rho^2 (\cos v \sin \Omega \cos I - \sin v \cos \Omega)^2 - 4 D^2 \cos^2 I = 0.$$

Si dans cette équation l'on élimine l'angle v, au moyen de l'équation $\cos v \cos \Omega \cos I + \sin v \sin \Omega = 0$, l'on aura

$$(2)\quad \rho = \mp 2 D \cos I \frac{\cos \Omega}{\sin v}.$$

C'eſt l'expreſſion de l'ordonnée au diametre paſſant par le Soleil; l'angle v étant déterminé par l'équation (2) du §. 684.

Puiſque l'équation (1) du §. précédent détermine le *parallélisme* du diametre de la Parabole de projection qui paſſe par le Soleil, ſi dans l'équation (6) du §. 683 l'on ſubſtitue la valeur de $\sin v$ donnée par l'équation (1) du §. précédent, on aura la diſtance du Soleil au ſommet du diametre; on aura donc pour expreſſion de cette diſtance,

$$(3)\quad \rho = \frac{D \cos I \sin \Omega}{\sin v'},$$

l'angle v' étant déterminé par l'équation $\cos v' \sin \Omega \cos I - \sin v' \cos \Omega = 0$.

Puiſque dans la Parabole, le parametre d'un diametre quelconque eſt égal au quarré de l'ordonnée, diviſé par la diſtance du pied de l'ordonnée au ſommet du diametre, on aura pour expreſſion du parametre du diametre dont il s'agit,

$$(4)\quad \text{Parametre} = \frac{4D \cos I \cos^2 \Omega \sin v'}{\sin \Omega \sin^2 v}.$$

(686) Nous remarquerons ici que le Soleil n'eſt point au foyer de la Parabole de projection; ce qui eſt évident, puiſque le grand axe de la Parabole de projection ne paſſe pas par cet Aſtre. Il faudroit, pour cela, qu'en changeant $\sin v$ en $\cos v$, & $\cos v$ en $\sin v$ dans l'équation (2) du §. 684, cette équation devînt identique avec l'équation (1) du même paragaphe. Nous obſerverons cependant que dans la Parabole de projection, les aires décrites autour du Soleil par la projection du rayon vecteur, ſont proportionnelles au tems, comme dans la véritable trajectoire. En effet, dans la Parabole de projection, les aires décrites autour du Soleil ont pour expreſſion $\int \rho^2 dv$. Maintenant, à cauſe des équations (2) & (3) du §. 683, l'on a

$$(1)\quad \rho^2 = R^2 (\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 I);$$

$$(2)\quad \text{tang}\, v = \text{tang}\, u \cos I;$$

Donc $dv = \cos I\, du \times \frac{\cos^2 v}{\cos^2 u} = \frac{\cos I\, du}{\cos^2 I \sin^2 u + \cos^2 u}$; donc $\rho^2 dv = \cos I\, R^2 du$.

L'aire de la Parabole de projection eſt donc un multiple de la trajectoire parabolique de la Comete, & par conſéquent proportionnelle au tems.

ARTICLE IX.

Du mouvement des Cometes vers le Soleil.

(687) Pour avoir une idée nette de l'objet du préſent Article, l'on ſe rappellera que M. Lambert a démontré que ſi pluſieurs Cometes parcourent des arcs de différentes Paraboles, elles emploieront préciſément le même tems à les parcourir, ſi la ſomme des rayons vecteurs qui terminent ces arcs eſt égale de part & d'autre, ainſi que la corde qui ſoutend les arcs. De même donc qu'on a choiſi une orbite, celle de 109 jours, pour déterminer le rapport des anomalies vraies de toutes les Cometes, avec les tems employés à les parcourir, on a cherché pareillement s'il ne ſeroit pas poſſible de trouver une autre orbite qui ſervît à déterminer le rapport de la ſomme des rayons vecteurs & de la corde, avec les tems employés à parcourir les arcs. La plus ſimple Parabole qu'on ait pu choiſir, pour cet effet, eſt celle dont le foyer & le ſommet concourent enſemble au centre du Soleil. Comme dans ce cas la diſtance périhélie eſt nulle, l'équation à la Parabole devient $1 + \operatorname{cof} Z = 0$, ce qui eſt l'équation à une ligne droite qui ſe termine au centre du Soleil. Une Comete, qui ſuivroit cette Parabole, tomberoit directement vers le Soleil, & c'eſt la loi de cette chute qu'il faut déterminer.

(688) Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de ce dernier Probléme; car ſi dans l'équation (3) du §. 434, l'on ſuppoſe $D = 0$, l'on aura

$$(1)\ T = \tfrac{1}{4} \times 109{,}6153^{\text{jours}}\, R^{\frac{3}{2}}.$$

Il ſuit de cette formule que les quarrés des tems employés par le projectile, pour tomber d'un point quelconque de la ligne droite au centre du Soleil, ſont proportionnels aux cubes des diſtances de ces points au Soleil; & ſi l'on conſidere deux points dans la ligne droite dont les diſtances reſpectives au Soleil ſoient exprimées par R', R, l'on aura

$$(2)\ T' - T = \tfrac{1}{4} \times 109{,}6153^{\text{jours}} \left(R'^{\frac{3}{2}} - R^{\frac{3}{2}}\right).$$

L'on déterminera donc les tems employés à décrire chaque partie de cette ligne droite, & l'on aura par-là, pour une Parabole quelconque, le tems employé à parcourir l'arc particulier terminé par les rayons vecteurs dont la ſomme égale $R' + R$, & dont la corde eſt égale à $R' - R$.

Démonſtration de la propoſition fondamentale de cette théorie.

(689) Il ne reſte plus maintenant qu'à démontrer la propoſition fondamentale de cette théorie. Pour y parvenir, on ſe rappellera que nous avons vu (§. 440) que l'on a, relativement à la Parabole,

$$(1) \pm 8D\sqrt{(R-D)}\sqrt{(R'-D)} = (R-R')^2 - c^2 - 8D^2 + 4D(R+R').$$

Si l'on élimine les radicaux, l'équation précédente deviendra

$$(2)\ 16D^2c^2 + 8D(R+R')\left((R-R')^2 - c^2\right) + \left((R-R')^2 - c^2\right)^2 = 0;$$

D'où l'on tire

$$(3)\ D = -\frac{\frac{1}{4}((R-R')^2-c^2)(\pm\sqrt{((R+R')^2-c^2)}+(R+R'))}{c^2} = \frac{\frac{1}{4}((R-R')^2-c^2)}{\pm\sqrt{((R+R')^2-c^2)}-(R+R')}.$$

Maintenant si l'on nomme

T le tems écoulé depuis le passage par le périhélie jusqu'à ce que la Comete se trouve à l'extrémité d'un rayon vecteur R ;

T' le tems écoulé depuis le passage par le périhélie jusqu'à ce que la Comete se trouve à l'exrémité d'un autre rayon vecteur R';

1 la distance moyenne de la Terre au Soleil;

Il suit du §. 434 que l'on a

$$(4)\ T'-T = \tfrac{1}{4}\times 109,6153\,((R'+2D)\sqrt{(R'-D)}-(R+2D)\sqrt{(R-D)}).$$

Si l'on éleve chacun des membres de cette équation au quarré, que l'on élimine $\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R-D)}$ au moyen de l'équation (1), que l'on élimine pareillement D^2c^2 au moyen de l'équation (2), & D au moyen de l'équation (3), l'on parviendra au résultat suivant qui ne renfermera que des fonctions de $R+R'$ & de c,

$$(5)\ T'-T = \tfrac{1}{8}\times 109,6153\sqrt{\left(3c^2(R+R')+(R+R')^3 \mp ((R+R')^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right)}$$
$$= \tfrac{1}{8\sqrt{2}}\times 109,6153\left((R+R'+c)^{\frac{3}{2}} \mp (R+R'-c)^{\frac{3}{2}}\right).$$

De sorte que le tems $T'-T$ est le même, lorsque $R+R'$ & c ne varient pas, quelle que soit d'ailleurs la Parabole décrite par la Comete.

L'équation (5) présente deux suites de signes; la premiere suite a lieu lorsque la Comete parvient de l'extrémité du rayon R' à l'extrémité du rayon R, sans passer par le périhélie; la seconde suite a lieu pour le cas contraire.

(690) On parviendroit à démontrer la propriété analogue relativement à l'Ellipse, en faisant voir, au moyen des équations (1) & (2) du §. 441, que dans l'équation

$$(1)\ T'-T = a^{\frac{3}{2}}\ \text{révolution de la Terre}\ \frac{\left(\varphi'-\varphi-\frac{E}{a}(\sin\varphi'-\sin\varphi)\right)}{\text{arc } 360^{\circ}},$$

qui exprime pour l'Ellipse, le tems employé par le projectile à décrire les différens arcs de l'Ellipse, la quantité $\frac{E}{a}(\sin\varphi'-\sin\varphi)$, ainsi que la quantité $\sin\varphi'\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi'$, c'est-à-dire $\sin(\varphi'-\varphi)$, & conséquemment l'angle $\varphi'-\varphi$ lui-même, ne dépendent que des fonctions de $R+R'$, de c & de a.

Nous remarquerons enfin qu'au moyen de l'équation (5) du §. précédent, l'on retrouveroit l'équation (2) du §. 688. En effet, dans le cas de la ligne droite $c=R'-R$. Si l'on substitue à c cette valeur, l'équation (5) du §. précédent deviendra

$$(2)\ T'-T = \tfrac{1}{4}\times 109,6153\left(R'^{\frac{3}{2}}-R^{\frac{3}{2}}\right);$$

expression identique avec celle de l'équation (2) du §. 688.

CHAPITRE ONZIEME.

Notice historique de ce que l'on sait de plus certain sur les Cometes.

(691) JE me propose de donner dans ce Chapitre, la notice historique de ce que l'on sait de plus certain sur les différentes Cometes dont on a déterminé les élémens. L'Histoire nous a conservé la mémoire d'un bien plus grand nombre de Cometes que celles dont on a calculé les orbites. On peut consulter à ce sujet le *Theatrum Cometicum* de Lubiénitz, ouvrage singulier, dans lequel l'Auteur a voulu prouver qu'il n'y avoit point eu de grands désastres sans Cometes, & de Cometes sans grands désastres. Des quatre cents quinze Cometes qui, suivant Lubiénitz, avoient paru à l'époque de 1665, cinquante avoient été vues avant l'Ere Chrétienne, & trois cents soixante-quatre depuis la venue de Jésus-Christ. Il faut à la vérité rabattre de ce calcul; car l'Auteur supplée quelquefois au silence des Historiens, & quand il voit un grand malheur sans Comete, il en conclut que la Comete a été oubliée, & il la restitue.

Il ne faut pas croire cependant que toutes les Cometes dont parle Lubiénitz, soient dans ce cas. Les apparitions de la plupart de ces Cometes sont attestées par des Auteurs dont le témoignage ne peut être suspect. Plusieurs même ont fait époque dans l'Histoire, par les événemens auxquels elles sont liées. Telles sont celles que l'on a vu briller à la naissance de Mithridate & à la mort de César. D'autres enfin, d'après les circonstances de leurs apparitions, ne sont visiblement que le retour des Cometes dont on a déterminé depuis les révolutions périodiques. Telles sont, par exemple, en rétrogradant, les Cometes des années 1305, 1230, 1005, 930, 550, 399, 323, la même que celle de 1682. Telles sont, suivant Struick, celles de 1512, 1338, 1165, 990 & 817, la même que l'on a revue depuis en 1686. Telles sont, suivant Halley, celles des années 1106, 531, la même que la [illegible]euse Comete de 1680, & qui avoit paru à la mort de César.

Je ne parlerai point de toutes ces Cometes. Comme leurs apparitions sont rapportées d'une maniere si vague qu'il a été impossible de calculer leurs orbites, elles cessent d'être intéressantes aux yeux des Astronomes. Je ne donnerai donc que la notice des Cometes dont on a pu calculer les élémens; ce sont les seules qui appartiennent véritablement à l'Astronomie.

On doit sentir combien l'Ouvrage de M. Pingré a facilité mon travail. Qu'il me soit permis de payer à ce Savant, le tribut de mon estime & de ma reconnoissance.

ARTICLE PREMIER.

Notice des Cometes dont on a calculé les orbites.

Comete de 837.

(692) La premiere Comete dont on ait calculé l'orbite, eſt celle de 837. Ses élémens ont été déterminés de la maniere ſuivante, par M. Pingré, d'après les obſervations faites à la Chine, & recueillies par le Pere Gaubil.

Longitude du nœud aſcendant	$6^s\ 26^d\ 33'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	9 19 3 0.
Inclinaiſon de l'orbite	10 à 12 dégrés.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie.	1er. Mars 837, $0^h\ 0'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,58000.

Cette Comete eſt une de celles qui approchent le plus près de l'orbite de la Terre; & comme d'ailleurs elle a paſſé fort près de la Terre, en revenant du périhélie, on ne doit point être étonné de la frayeur qu'elle cauſa à Louis le Débonnaire. Depuis le 22 Mars qu'elle fut apperçue dans le Verſeau, juſqu'au 28 Avril qu'elle diſparut, elle parcourut les Etoiles du Capricorne, du Sagittaire, du Scorpion, de la Balance, de la Vierge, de l'Hydre & de l'Ecreviſſe; elle avoit une très-longue queue qui s'étendoit juſqu'à 60^d.

Cette Comete peut faire juger de l'Aſtronomie du neuvieme ſiecle, en Europe & à la Chine. Tandis que les peuples de l'Europe ne voyoient dans cette Comete qu'un ſigne de la colere céleſte, que Louis le Débonnaire y liſoit l'annonce de ſa fin prochaine, à la Chine on l'obſervoit avec tranquillité, & avec aſſez d'exactitude pour que l'on ait pu conclure ſes élémens

Comete de 1231.

(693) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après des obſervations faites à la Chine, & recueillies par le P. Gaubil. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$0^s\ 13^d\ 30'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	4 14 48 9.
Inclinaiſon de l'orbite	6 5 0.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie.	30 Janvier 1231, $7^h\ 23'$.
Diſtance perihélie	0,94776.

Cette Comete fut obſervée à la Chine, depuis le 6 Février 1231 juſqu'au 1er. Mars de la même année. Elle parcourut le Cigne, la Lyre, la main & la tête d'Hercule, le Serpentaire, le front du Scorpion, & s'enfonça enſuite dans le Sud-Eſt.

Comete de 1264.

(694) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1760. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$5^s\ 28^d\ 45'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	9 5 45 0.
Inclinaison de l'orbite	30 25 0.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie.	17 Juillet 1264, $6^h\ 10'$.
Distance périhélie	0,41081.

Il paroît que cette Comete a été observée depuis le milieu de Juillet 1264, jusqu'au commencement d'Octobre de la même année. Elle parcourut la partie du Ciel située au-dessous du Lyon, l'Hydre, le petit Chien, Orion, l'Eridan. Sa queue étoit fort considérable. On croit que cette Comete est la même que celle observée depuis en 1556; sa période seroit donc de 292 ans, & elle devroit reparoître vers 1848. Les Historiens prétendirent qu'elle présageoit la mort du Pape Urbain IV.

Comete de 1299.

(695) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après des observations faites à la Chine, & recueillies par le P. Gaubil. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$3^s\ 17^d\ 8'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	0 3 20 0.
Inclinaison de l'orbite	68 57 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie.	31 Mars 1299, $7^h\ 38'$.
Distance périhélie	0,31793.

Cette Comete, une de celles qui peuvent approcher le plus près de l'orbite de la Terre, fut observée à la Chine depuis le 24 Janvier 1299 jusqu'au 5 Mars de la même année. Elle parcourut la Colombe, l'Eridan, la Baleine & le Bélier.

Comete de 1301.

(696) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après des observations faites à la Chine, & recueillies par le P. Gaubil. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$0^s\ 15^d\ 0'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	9 0 0 0.
Inclinaison de l'orbite.	70 0 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	22 Octobre 1301, $0^h\ 0'$.
Distance périhélie	0,45710.

Cette Comete fut observée à la Chine, depuis le milieu de Septembre 1301, jusqu'au commencement de Novembre de la même année. Elle parcourut les pieds des Gémeaux, le petit Chien, traversa la grande Ourse, la Couronne, la tête d'Hercule & du Serpentaire.

Comete de 1337.

(697) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après des observations faites à la Chine & recueillies par le P. Gaubil. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 6^d\ 22'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	0 20 0 0.
Inclinaison de l'orbite	32 11 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	1^{er}. Juin 1337, $0^h\ 40'$.
Distance périhélie.	0,64453.

Cette Comete parut pendant les mois de Mai, Juin, Juillet, Août 1337. Elle fut observée à la Chine, depuis le 26 Juin jusqu'au 28 Août. Vue d'abord vers les Pleyades, elle s'éleva presque jusqu'au pole de l'Equateur, en traversant les pieds de Céphée. Elle fut observée près du pied d'Hercule & de la Couronne boréale ; elle coupa l'Equateur dans le Serpentaire; passa près de δ du Serpentaire, & cessa de paroître un peu au nord du front du Scorpion. En Europe, on la vit à peu près dans le même tems. Des pieds de Persée elle s'avança vers la Girafe, la petite Ourse, les plis du Dragon, les pieds d'Hercule, la Couronne & la main du Serpentaire. Elle avoit une très-grande queue.

Comete de 1456.

(698) Cette Comete a été calculée par M. Pingré. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$1^s\ 18^d\ 30'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 1 0 0.
Inclinaison de l'orbite	17 56 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	8 Juin 1456, $22^h\ 10'\ 0''$.
Distance périhélie	0,58552.

Cette Comete est la même que celle dont M. Halley a découvert le premier les retours périodiques, & à laquelle M. Clairaut a depuis appliqué l'analyse du Problême des trois corps. Nous la retrouverons en 1531, 1607, 1682 & 1759. Sa révolution est d'environ 77 ans, & elle doit reparoître vers 1837. Lors de son apparition en 1456, elle répandit la terreur dans l'Europe déja effrayée des succès rapides des Turcs qui venoient de détruire l'Empire Grec. Elle avoit une très-grande queue; elle fut vue pendant tout le mois de Juin, dans la Mouche, la tête de Méduse, Persée, la Girafe & la grande Ourse. Le Pape Callixte, à

l'occasion de son apparition, ordonna que l'on réciteroit dans toute la Chrétienté, un second *Angelus*, dans lequel on conjuroit les Turcs & la Comete.

Comete de 1472.

(699) Cette Comete, une des plus fameuses de celles que l'Histoire de l'Astronomie nous ait transmises, a été calculée par Halley. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$9^s\ 11^d\ 46'\ 20''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	1 15 33 30.
Inclinaison de l'orbite	5 20 0.
Sens du mouvement	rétrograde
Passage au périhélie	28 Février 1472, $22^h\ 33'$.
Distance périhélie	0,54273.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, parut en Janvier & Février 1472. Elle fut vue d'abord près de l'Epi de la Vierge; passa ensuite par le Bouvier; passa à-peu près à égale distance des poles de l'Equateur & de l'Ecliptique; traversa le Dragon, la petite Ourse, Céphée, Cassiopée; passa sous le ventre d'Andromede; suivit le poisson boréal dans sa longueur, & disparut dans les Etoiles de la Baleine. Elle eut, au commencement de son apparition, un mouvement assez lent, jusqu'à ce qu'étant parvenu à la hauteur d'Arcturus, son mouvement apparent s'accélera au point de parcourir près de 40^d de grand cercle en un jour; elle étoit alors fort près de la Terre. Cette Comete est fort remarquable dans l'Histoire des Sciences, pour avoir ranimé en Europe l'amour de l'Astronomie. Regio-Montanus composa à son sujet, un traité particulier dans lequel toutes ses observations sont rapportées.

Comete de 1531.

(700) Cette Comete a été calculée par Halley. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$1^s\ 19^d\ 25'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 1 39 0.
Inclinaison de l'orbite	17 56 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	24 Août 1531, $21^h\ 27'\ 0''$.
Distance périhélie	0,56700.

Cette Comete est un retour de la Comete de Halley; nous l'avons déja vue en 1456, & nous la retrouverons en 1607, 1682 & 1759. Elle fut observée à la Chine, le 5 Août 1531. En Europe, Appien l'observa depuis le 12 Août dans 20^d de l'Ecrevisse, avec une latitude boréale de $23^d\ 30'$; jusqu'au 23 Août, dans $7^d\ 30'$ de la Balance, avec une la-

titude boréale de 15^d 15'. Elle parcourut les pattes de la grande Ourse, le petit Lyon, la chevelure de Bérénice & l'aile boréale de la Vierge.

Comete de 1532.

(701) Cette Comete a été calculée par Halley. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 20^d\ 27'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 21 7 0.
Inclinaison de l'orbite	32 36 0.
Sens du mouvement	direct
Passage au périhélie	19 Octobre 1532, $22^h\ 22'$.
Distance périhélie	0,50910.

Appien observa cette Comete, depuis le 2 Octobre 1532, dans 10^d de la Vierge, avec une latitude australe de 13^d 30', jusqu'au 7 Novembre suivant, dans 4^d 30' du Scorpion, avec une latitude boréale de 20^d 20'. Elle avoit paru dès le 15 Septembre; elle fut visible jusqu'à la fin de Novembre; elle parcourut l'Hydre, la Vierge, & disparut près du Serpentaire.

On trouve en 1661 une Comete dont les élémens ressemblent beaucoup aux précédens; & il y a quelque apparence que les Cometes de 1532, & 1661 ne sont qu'une seule & même Comete dont la révolution est d'environ 129 ans. On croit qu'elle reparoîtra vers 1790.

Comete de 1533.

(702) Cette Comete a été calculée par M. Cornélis Douwes, sur les observations d'Appien; voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$4^s\ 5^d\ 44'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	4 27 16 0.
Inclinaison de l'orbite	35 49 0.
Sens du mouvement	rétrograde
Passage au périhélie	16 Juin 1533, $19^h\ 39'$.
Distance périhélie	0,20280.

Cette Comete fut observée depuis la fin de Juin 1533, jusqu'au commencement de Septembre de la même année. Appien l'observa depuis le 18 Juillet 1533, dans 3^d 40' des Gémeaux avec une latitude boréale de 32^d, jusqu'au 25 du même mois, dans 15^d du Taureau, avec une latitude boréale de 43^d. Elle avoit une queue très-brillante d'environ 15^d. Elle parcourut la tête de Méduse, Persée, le Cocher, Cassiopée, & disparut dans le Cigne.

Comete de 1556.

(703) Cette Comete a été calculée par Halley. Voici ses élémens,

Longitude du nœud ascendant	$5^s 25^d 42' 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	9 8 50 0.
Inclinaison de l'orbite	32 6 30.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	21 Avril 1556, 20^h 13'
Distance périhélie	0,46390.

Cette Comete fut observée depuis la fin de Février 1556, jusque dans les premiers jours d'Avril. De la Vierge, elle s'avança vers le Bouvier, passa près d'Arcturus, s'avança vers le pole de l'Ecliptique, traversa le Dragon, Céphée, Andromede, & parvint aux Etoiles des Poissons où elle cessa d'être visible.

L'Empereur Charles-Quint crut reconnoître dans cette Comete, un signe céleste qui l'avertissoit de songer à la mort; cette terreur contribua beaucoup, selon les Historiens, au dessein qu'il exécuta peu de tems après, de céder la Couronne Impériale à Ferdinand son frere.

Si l'on rapproche les élémens de cette Comete, de ceux de la Comete de 1264, on remarquera facilement que ces élémens se ressemblent. Les Cometes de 1264 & 1556 ne sont donc probablement qu'une seule & même Comete dont la révolution périodique est de 292 ans. On croit qu'elle reparoîtra en 1848.

Comete de 1577.

(704) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Tycho, depuis le 13 Novembre 1577 jusqu'au 26 Janvier 1578. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$0^s 25^d 52' 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	4 9 22 0.
Inclinaison de l'orbite	74 32 45.
Sens du mouvement	rétrograde
Passage au périhélie	26 Octobre 1577, 18^h 55'.
Distance périhélie	0,18342.

Depuis le 13 Novembre 1577 jusqu'au 26 Janvier 1578, cette Comete parcourut la tête du Sagittaire, Antinoüs, le petit Cheval & Pégase, où elle disparut; elle avoit une queue d'environ 22^d. Elle fut aussi observée par Cornelius Gemma, Mœstlin, Hagécius, le fameux Landgrave de Hesse, Guillaume IV, Simon Grynée, & en un mot par tous ceux qui se piquoient alors d'avoir quelque connoissance du Ciel.

Comete de 1580.

(705) Cette Comete a été calculée par M. Pingré d'après les observations de Tycho. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$0^s\ 19^d\ 7'\ 37''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 19 11 55.
Inclinaison de l'orbite	64 51 50.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	28 Novembre 1580, $13^h\ 54'$.
Distance périhélie	0,59553.

Cette Comete fut observée par Tycho, depuis le 10 Octobre 1580 dans $13^d\ 36'\ 25''$ des Poissons avec une latitude boréale de $4^d\ 4'\ 10''$, jusqu'au 12 Décembre de la même année, dans $4^d\ 0'\ 55''$ du Sagittaire, avec une latitude boréale de $23^d\ 44'$. Le 12 Novembre sa latitude étoit de $41^d\ 32'\ 25''$ boréale, & sa longitude de $8^s\ 19^d\ 34'$. Elle parcourut la tête de Pégase, l'Aigle & une partie du Serpentaire. Moestlin découvrit cette Comete à Tubingen, dès le 2 Octobre 1580; Tycho & Hagécius ne l'apperçurent que le 10 du même mois.

Comete de 1582.

(706) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après les observations de Tycho. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$7^s\ 21^d\ 7'\ 20''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	8 5 23 10.
Inclinaison de l'orbite	61. 27 30.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	6 Mai 1582, $16^h\ 9'$.
Distance périhélie	0,22570.

Cette Comete fut observée par Tycho, depuis le 12 Mai 1582, dans $10^d\ 54'$ des Gémeaux, avec une latitude boréale de $13^d\ 11'$, jusqu'au 18 du même mois, dans $20^d\ 30'$ des Gémeaux, avec une latitude boréale de $21^d\ 15'$. Elle étoit dans la Constellation du Cocher, & passa très-près de la Chevre. Elle avoit une queue fort brillante.

Comete de 1585.

(707) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Tycho. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$1^s\ 7^d\ 42'\ 30''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	80 51 0.
Inclinaison de l'orbite	6 4 0.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	7 Octobre 1585, $19^h\ 30'$.
Distance périhélie	1,093558.

Cette Comete fut observée depuis le 18 Octobre 1585, dans $23^d\,9'$ des Poissons, avec une latitude australe de $13^d\,52'$, jusqu'au 22 Novembre de la même année, dans $18^d\,46'$ du Taureau, avec une latitude boréale de $8^d\,7'$. Elle parut d'abord dans la queue de la Baleine, passa près de la brillante du Lien des Poissons, traversa la Constellation du Bélier, & disparut dans le dos du Taureau, près de la Mouche. Cette Comete parcourut dans le Ciel 49^d de grand cercle; la Ville de Strasbourg est située sous le 49^e. degré de latitude; c'étoit le tems où elle chassoit son Evêque, après avoir embrassé la réforme de Luther. On ne manqua pas de voir dans cette Comete, une indication manifeste de ce qui se passoit à Strasbourg.

Comete de 1590.

(708) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Tycho. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$5^s\,15^d\,30'\,40''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	7 6 54 30.
Inclinaison de l'orbite	29 40 40.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	8 Février 1590, $3^h\,55^r\,0''$.
Distance périhélie	0,57661.

Cette Comete fut observée par Tycho, depuis le 5 Mars 1590, dans $18^d\,27'$ du Bélier, avec $10^d\,18'$ de latitude boréale, jusqu'au 16 du même mois, dans $3^d\,15'$ des Gémeaux, avec $20^d\,46'$ de latitude boréale. Elle avoit une grande queue dirigée vers le Zénith. Elle parcouroit tous les jours 4 degrés d'un grand cercle. Elle parut d'abord dans le Poisson boréal; de là elle s'avança vers le Cocher, en traversant le triangle boréal, la tête de Méduse & les pieds de Persée. Elle ne parvint cependant pas jusqu'au Cocher. Avant que d'atteindre cette Constellation, elle s'évanouit près des pieds de Persée.

Comete de 1593.

(709) Cette Comete a été calculée par l'Abbé de la Caille, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris de 1747, d'après des observations faites à Zerbst par Chrétien-Jean de Ripen, Eleve de Tycho. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$5^s\,14^d\,15'\,0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	5 26 19 0.
Inclinaison de l'orbite	87 58 0.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	18 Juillet 1593, $13^h\,48'\,0''$.
Distance périhélie	0,08911.

Cette Comete fut observée depuis le 4 Août 1593, dans $14^d\,40'$ de

l'Ecreviſſe, avec une latitude boréale de $29^d\ 5'$, juſqu'au 3 Septembre de la même année. Le 31 Août elle étoit dans $7^d\ 22'$ du Bélier, avec 60^d de latitude boréale. Cette Comete s'eſt approchée très-près du Soleil, cependant ſa queue n'a pas été fort grande, ni ſa lumiere fort vive. Elle n'a pas ſurpaſſé en éclat les Etoiles de la troiſieme grandeur; & lorſqu'on a meſuré ſa queue, dix-ſept jours après ſon paſſage par le périhélie, on ne l'a trouvée que de $4^d\ 30'$. Elle a traverſé la Giraſe, Caſſiopée & Céphée, où elle diſparut.

Comete de 1596.

(710) Cette Comete a d'abord été calculée par Halley, ſur les obſervations de Moeſtlin; & depuis plus exactement par M. Pingré ſur des obſervations de Tycho, inconnues à Halley. Voici ſes élémens d'après M. Pingré.

Longitude du nœud aſcendant	$0^s\ 15^d\ 36'\ 50''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	7 28 30 50.
Inclinaiſon de l'orbite	52 9 45.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie	8 Août 1596, $15^h\ 43'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,54941.

Cette Comete fut découverte dès le 17 Juillet 1596, dans la Conſtellation du Cocher. Le 24 elle fut apperçue à Copenhague par Tycho, près de la premiere patte de derriere la grande Ourſe; elle fut enſuite obſervée à Uranibourg, depuis le 27 Juillet dans $20^d\ 58'$ du Lion, avec une latitude boréale de $30^d\ 30'$, juſqu'au 3 Août, dans $2^d\ 53'$ de la Vierge, avec $26^d\ 49'$ de latitude boréale. Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, traverſa les pattes de derriere de la grande Ourſe & la Chevelure de Bérénice.

Comete de 1607.

(711) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les obſervations de Tycho & de Longo-Montanus. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$1^s\ 20^d\ 21'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	10 2 16 0.
Inclinaiſon de l'orbite	17 2 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie	16 Octobre 1607, $4^h\ 0'$.
Diſtance périhélie	0,58680.

Cette Comete eſt un retour de la Comete de Halley. Nous l'avons déja vue en 1456 & en 1531, & nous la retrouverons en 1682 & 1759. Elle fut obſervée par Képler à Prague, depuis le 26 Septembre 1607, dans $18^d\ 30'$ du Lion, avec $35^d\ 30'$ de latitude boréale, juſqu'au 26 Octobre de la même année, dans $2^d\ 10'$ du Sagittaire, avec une latitude boréale de 8^d. Elle parut d'abord dans la grande Ourſe, traverſa les Chiens de

Chaſſe, le Bouvier, & diſparut dans le Serpentaire, près du Scorpion. Elle avoit une queue d'environ 7^d^. Elle fut auſſi obſervée à Malmoë en Suede, par Longo-Montanus.

Premiere Comete de 1618.

(712) Cette Comete a été calculée par M. Pingré. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	. . . . . .	$9^s\ 23^d\ 25'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	. . . . . .	10 18 20 0.
Inclinaiſon de l'orbite	. . . .	21 28 0.
Sens du mouvement	. . . .	direct.
Paſſage au périhélie	. . . .	17 Août 1618, $3^h\ 12'\ 0''$.
Diſtance périhélie	. . . .	0,51298.

Cette Comete fut obſervée par Képler, depuis le 1^er^ Septembre 1618, dans 10^d^ du Lion, avec une latitude boréale de 21^d^ 30', juſqu'au 25 du même mois, dans 28^d^ de l'Ecreviſſe, avec une latitude boréale de 23^d^ 30'. Elle parcourut la tête du petit Lion, & la croupe du Lynx.

Seconde Comete de 1618.

(713) Cette Comete a été calculée par Halley. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	. . . .	$2^s\ 16^d\ 1'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	. . . .	0 2 14 0.
Inclinaiſon de l'orbite	. . . .	37 34 0.
Sens du mouvement	. . . .	direct.
Paſſage au périhélie	. . . .	8 Novembre 1618, $12^h\ 33'\ 0''$.
Diſtance périhélie	. . . .	0,37975.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, fut apperçue dès le 10 Novembre 1618; mais elle ne fut obſervée par Képler que depuis le 24 Novembre 1618, juſqu'au 20 Janvier 1619. Elle parcourut depuis 18^d^ 2' du Scorpion, juſqu'à 20^d^ 50' de l'Ecreviſſe. Au commencement de ſon apparition, elle étoit preſque dans l'Ecliptique. Le 3 Janvier 1619, elle avoit 63^d^ 15' de latitude boréale; ſa latitude diminua enſuite juſqu'au 20 Janvier, jour auquel on ceſſa de l'obſerver; elle avoit alors 58^d^ 30' de latitude boréale. Elle traverſa les Etoiles de la Balance, le Bouvier, & diſparut au-deſſus de la tête de la grande Ourſe, près de l'extrémité de la queue du Dragon. Elle avoit une queue très-grande & très-brillante. Cette belle Comete fut obſervée par tous les Aſtronomes de l'Europe. Les principaux furent Képler à Lintz, Longo-Montanus à Copenhague, Gaſſendi à Aix, Schickard à Virtemberg, Habrectus à Straſbourg, Ambroſius Rhodus à Witemberg, Remus Quietanus aux Deux-ponts, le P. Cyſat, à Ingolſtat, Snellius à Leyde. Preſque toutes les obſervations ont été recueillies par Képler & par Riccioli. Il y eut des Médailles frappées à l'occaſion de cette Comete, avec l'exergue ſuivante :

ARDET DIVINI NUMINIS ASTRUM.

Comete de 1652.

(714) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations d'Hévélius. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 28^d\ 10'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	0 28 18 40.
Inclinaison de l'orbite	79 28 0.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	12 Novembre 1652, $15^h\ 50'\ 0''$.
Distance périhélie	0,84750.

Cette Comete, d'une couleur pâle & livide, égaloit presque la Lune en grandeur, au jugement d'Hévélius. Elle fut observée par cet Astronome, depuis le 20 Décembre 1652 jusqu'au 8 Janvier 1653. Elle parcourut le Lievre, le Bouclier d'Orion, la tête du Taureau, celle de Méduse, l'épée de Persée & Cassiopée. Elle fut visible jusqu'au commencement de Février 1653.

Comete de 1661.

(715) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations d'Hévélius. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 22^d\ 30'\ 30''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 25 58 40.
Inclinaison de l'orbite	32 35 50.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	26 Janvier 1661, $23^h\ 51'\ 0''$.
Distance périhélie	0,44851.

Cette Comete fut observée par Hévélius, depuis le 3 Février 1661, jusqu'au 10 Mars de la même année, sous le Dauphin, dans la tête & l'aile méridionale de l'Aigle. Il n'y a guere lieu de douter que cette Comete ne soit la même que celle de 1532. Ces deux Cometes ne feroient donc qu'un seul & même Astre, dont la révolution seroit d'environ 129 ans. On croit qu'elle doit reparoître vers 1790.

Comete de 1664.

(716) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations d'Hévélius. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 21^d\ 13'\ 55''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	4 10 41 25.
Inclinaison de l'orbite	21 18 30.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	4 Décembre 1664, $12^h\ 2'\ 0''$.
Distance périhélie	1,02575.

Cette Comete fut obſervée depuis le 2 Décembre 1664, juſqu'au 18 Mars 1665, par Huyghens, Hévélius, Caſſini, Montanari, Auzout, Bouillaud, le P. Dechalles, Dom Vincent Mut, &c. Elle parut d'abord rétrograder, depuis le 2 Décembre 1664, juſqu'au 5 Février 1665. Elle parut enſuite directe, depuis le 5 Février 1665, juſqu'à la fin de ſon apparition. Dans l'intervalle du 2 Décembre 1664 au 5 Février 1665, elle rétrograda depuis 11^d 25′ de la Balance, juſqu'à 26^d 30′ du Bélier. Depuis le 5 Février 1665 juſqu'à la fin de ſon apparition, ſon mouvement fut très-lent ſuivant l'ordre des ſignes. Le 2 Décembre 1664, ſa latitude étoit de 15^d 25′ auſtrale; le 28 Décembre elle avoit une latitude auſtrale de 49^d 30′; le 12 Février 1665, ſa latitude étoit de 6^d 40′ boréale. Cette Comete avoit une très-belle queue. Elle parut d'abord dans les Etoiles du Corbeau, paſſa au ſud de la Coupe, traverſa toute la voilure du Navire, le grand Chien, le Lievre, l'Eridan, la Baleine, & diſparut près des Etoiles du Bélier.

Cette Comete donna lieu à beaucoup de prédictions; les Aſtrologues menacerent l'Univers des plus affreux déſaſtres. Ces délires de l'eſprit humain méritent peu d'être remarqués; mais il arriva à l'occaſion de cette Comete, un événement aſſez mémorable. Jean-Dominique Caſſini l'obſerva à Rome dans le Palais Chigi, en préſence de la Reine de Suede, la fameuſe Chriſtine. Il croyoit alors que les Cometes décrivoient des orbites circulaires dont la Terre eſt le centre. Il ſe fia tellement à ſon ſyſtême, qu'après le deux premieres obſervations, il traça hardiment à la Reine, ſur le Globe Céleſte, la route que la Comete devoit tenir. Après une quatrieme obſervation du 22 Décembre 1664, il aſſura que la Comete n'étoit pas encore à ſa plus grande proximité de la Terre; le 23 il oſa prédire qu'elle y arriveroit le 29; & quoiqu'alors elle ſurpaſſât la Lune en vîteſſe, & ſemblât devoir faire le tour du Ciel en peu de tems, il aſſura qu'elle s'arrêteroit dans Ariès, dont elle n'étoit guere éloignée que de deux ſignes; & qu'après qu'elle y auroit été ſtationnaire, elle prendroit une direction contraire à celle qu'elle avoit tenue juſqu'alors. Ces prédictions trouverent quantité d'incrédules qui ſoutinrent que la Comete échapperoit à l'Aſtronome, & l'eſpérerent juſqu'au bout; après quoi, quand ils virent qu'elle lui avoit été parfaitement ſoumiſe, ils dirent qu'il n'y avoit rien de ſi facile que ce qu'avoit fait M. Caſſini.

Il n'eſt pas étonnant que Caſſini ait trouvé des incrédules dans un tems où les connoiſſances aſtronomiques étoient infiniment moins répandues qu'elles ne le ſont actuellement; mais ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que, par un haſard heureux, la Comete ait ſuivi une route tracée d'après un ſyſtême abſolument faux. Comme le mouvement de la Terre influoit beaucoup ſur les mouvemens apparens de la Comete, l'arc de cercle, que Caſſini prenoit pour la trajectoire de cet Aſtre,

donnoit à-peu-près les mêmes apparences que la courbe qu'il auroit fallu calculer d'après la véritable théorie.

Comete de 1665.

(717) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations d'Hévélius. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$7^s\ 18^d\ 2'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 11 54 30.
Inclinaison de l'orbite	76 5 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	24 Avril 1665, $5^h\ 25'\ 10''$.
Distance périhélie	0,10649.

Cette Comete fut observée par Hévélius & par Dominique Cassini, depuis le 27 Mars 1665, dans 4^d du Verseau, avec une latitude boréale de 2^d, jusqu'au 20 Avril de la même année, dans $1^d\ 18'$ du Taureau, avec une latitude boréale de $13^d\ 14'$. Le 6 Avril sa latitude avoit été de $26^d\ 30'$ boréale, dans $14^d\ 21'$ des Poissons. Elle avoit une queue moins brillante que la Comete de 1664. Elle parcourut la tête du Capricorne, le petit Cheval, Pégase, le bras d'Andromede, le Poisson boréal, & disparut près du triangle boréal. Suivant Dominique Cassini, le disque de cette Comete étoit aussi rond, aussi net, aussi clair, aussi tranché que celui de Jupiter.

Comete de 1672.

(718) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations d'Hévélius. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$9^s\ 27^d\ 30'\ 30''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	1 16 59 30.
Inclinaison de l'orbite	83 22 10.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	1 Mars 1672, $8^h\ 47'\ 0''$.
Distance périhélie	0,70546.

Cette Comete fut observée par Hévélius, depuis le 6 Mars 1672, dans 7^d du Bélier, avec une latitude boréale de $35^d\ 0'$, jusqu'au 21 Avril de la même année, dans 19^d des Gémeaux, avec une latitude australe de $9^d\ 45'$. Elle traversa Andromede, les pieds de Persée, le front du Taureau & la tête d'Orion.

Comete de 1677.

(719) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les obſervations d'Hévélius. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$7^s\ 26^d\ 49'\ 10''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	4 17 37 5.
Inclinaiſon de l'orbite	79 3 15.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie . . .	6 Mai 1677, $0^h\ 47'\ 10''$.
Diſtance périhélie	0,28056.

Cette Comete fut obſervée à Dantzick par Hévélius; à Gréenwich par Flamſteed; à Paris par Picard, Caſſini, Roëmer; en Eſpagne par le Pere Zaragoza. Elle fut vue depuis le 29 Avril 1677, dans 5^d du Taureau, avec une latitude boréale de 12^d, juſqu'au 8 Mai de la même année, dans 20^d du Taureau, avec une latitude boréale de 15^d. Elle parcourut le petit triangle boréal & le deſſus de la Mouche.

Comete de 1678.

(720) Cette Comete a été calculée par Cornélis Douwes, d'après les obſervations de la Hire. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$5^s\ 11^d\ 40'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	10 27 46 0.
Inclinaiſon de l'orbite	3 4 20.
Sens du mouvement.	direct.
Paſſage au périhélie	26 Août 1678, $14^h\ 13'\ 0''$.
Diſtance périhélie	1,23801.

Cette Comete fut obſervée à Paris par M. de la Hire, depuis le 11 Septembre 1678, dans $18^d\ 14'$ du Verſeau, avec une latitude auſtrale de $0'\ 14''$, juſqu'au 7 Octobre de la même année, dans $14^d\ 54'$ des Poiſſons, avec une latitude auſtrale de $4^d\ 12'$. Elle parcourut la partie du Ciel ſituée entre la queue du Capricorne & l'eau du Verſeau.

Comete de 1680.

(721) Nous voici arrivés à la fameuſe Comete de 1680, celle de toutes les Cometes qui approche le plus de l'orbite de la Terre vers ſon nœud deſcendant, & du Soleil dans ſon périhélie. Ses élémens ont été donnés par Halley de la maniere ſuivante.

Longitude du nœud aſcendant	$9^s\ 2^d\ 2'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	8 22 39 30.
Inclinaiſon de l'orbite.	60 56 0.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	18 Décembre 1680, $0^h\ 15'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,00612.

Cette Comete, destinée à faire une des époques les plus brillantes de l'Astronomie, fut découverte le 14 Novembre 1680, à Cobourg en Saxe, avant sa conjonction avec le Soleil, par M. Kirch; elle n'avoit rien de remarquable. Elle étoit alors dans 29^d $51'$ du Lion, avec une latitude australe de 1^d $17'$ $45''$; Hévélius la découvrit le 2 Décembre matin. Il soupçonna qu'elle reparoîtroit après sa conjonction avec le Soleil, & en effet il la revit le 24 Décembre au soir. Il ne lui fut pas possible de l'observer avec exactitude; un incendie venoit de lui enlever ses livres, son Observatoire, & tout ce qu'il possédoit.

Flamsteed, à Gréenvich, vit la queue de la Comete le 20 Décembre au soir; il ne découvrit la tête que le 22; il continua de l'observer jusqu'au 15 Février 1681; elle fut observée jusqu'au 19 Mars 1681. Le 22 Décembre 1680, lorsque Flamsteed, la revit, elle étoit dans 6^d $32'$ du Capricorne, avec une latitude boréale de 8^d $28'$. Le 19 Mars 1681, jour qu'elle disparut, elle étoit dans 0^d $43'$ $4''$ des Gémeaux, avec une latitude boréale de 11^d $45'$ $52''$. Le 9 Janvier 1681, jour de sa plus grande latitude, elle étoit dans 17^d $38'$ $20''$ du Verseau, avec une latitude boréale de 28^d $11'$ $53''$.

Lors de sa seconde apparition, cette Comete parcourut l'Ecu de Sobieski, les pieds d'Antinoüs, la queue du Dauphin, Pégase, Andromede, le triangle boréal, & disparut entre les pieds de Persée & le dos du Taureau. Elle avoit une queue très-brillante & d'une étendue très-considérable, ce qui l'empêcha quelque tems d'être reconnue pour la même Comete observée le matin dans le mois de Novembre. Dominique Cassini étoit encore dans cette opinion en 1699.

Dans le tems que cette Comete parut, on croyoit généralement en Europe que les Cometes annonçoient des malheurs. Rien n'étoit plus capable d'effrayer que la queue brillante qu'elle traînoit après elle, & qui s'étendoit à près de 120^d. Pour rassurer le Public, Bayle publia ses pensées sur les Cometes. Il n'osa pas fronder ouvertement l'opinion reçue; il prétendit seulement que si la chevelure des Cometes annonçoit des malheurs, il n'en étoit pas de même de leurs queues. Mais ce qui doit intéresser davantage dans l'Histoire de la Comete de 1680, c'est d'avoir fait éclore les sublimes recherches de Newton, qui sut faire des Cometes, une branche de son systême général. Cette brillante découverte eut le sort de toutes les nouveautés; elle eut des contradicteurs, même parmi les Astronomes. Cassini persista à penser que la Terre étoit le centre des mouvemens des Cometes, & Jacques Bernouilli proposa un systême d'après lequel la Comete devoit reparoître au mois de Mai 1719. L'événement n'a point répondu à la prédiction, & les Cometes sont pour jamais des Astres qui ont le Soleil pour centre de leurs mouvemens.

On croit que la période de cette Comete est d'environ 575 ans. En effet, si l'on remonte dans les siecles passés, par des intervalles d'environ 575 ans, on retrouve des apparitions formidables de Cometes à ces

différentes époques. Sous l'année 1106, on lit dans la Chronique Saxone les termes suivans. *Anno Christi 1106, à primâ septimanâ Quadragesimæ usque ad vigilias Palmarum, conspectus est horribilis Cometa.... Parva visa est & obscura, sed splendor qui de eâ exivit valdè erat clarus; & quasi ingens trabs, de Orientali & Aquilonari parte claritas injecit se in eam Stellam.* On retrouve une Comete semblable en 531, sous le regne de l'Empereur Justinien. *Anno Christi 532, imperii Justiniani quinto, conspectus est Cometa qui ob radios sursum instar facis porrectos, lampadias dicebatur.* Si l'on retranche 575 ans de cette derniere époque, on retrouve la Comete qui parut à la mort de Jules César. Je ne parlerai point ici de l'opinion de Whiston, qui attribue le Déluge à cette Comete; j'ai déja présenté une partie des objections que l'on a faites contre ce systême.

Comete de 1682.

(722) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Flamsteed. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$1^s 21^d 16' 30''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 2 52 45.
Inclinaison de l'orbite	17 56 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	14 Septembre 1682, $7^h 49' 0''$.
Distance périhélie	0,58328.

Cette Comete, moins éclatante que la précédente, mais destinée comme elle à faire époque dans l'Histoire de l'Astronomie, fut observée par Hévélius, Picard, la Hire, Flamsteed, depuis le 26 Août 1682, dans $23^d 30'$ de l'Ecrevisse, avec une latitude boréale de 21^d, jusqu'au 19 Septembre de la même année, dans $0^d 42'$ du Scorpion, avec une latitude boréale de $8^d 47'$. Elle parcourut la croupe du Lynx, le petit Lion, la chevelure de Bérénice, passa à l'extrémité du pied du Bouvier & disparut dans les pieds de la Vierge.

La Comete de 1680 avoit donné lieu à Newton de développer ses idées relativement aux Cometes. Halley, frappé de la beauté de cette découverte, entreprit de débrouiller le chaos des anciennes Cometes & d'appliquer la nouvelle théorie à toutes celles dont les observations étoient assez exactes pour pouvoir être calculées. Il apperçut bientôt la conformité qu'il y avoit entre les élémens de la Comete de 1682, & les élémens des Cometes observées en 1456, 1531 & 1607; il prononça donc que ces quatre Cometes n'étoient qu'un seul & même Astre dont la révolution étoit d'environ 77 ans, & il osa prédire qu'on la reverroit vers 1759. Sa prédiction a été vérifiée de nos jours; les légeres différences que l'on trouve entre les élémens de ces Cometes n'empêcherent point Halley de prononcer sur leur identité, & il pensa qu'on devoit les attribuer aux attractions des différens corps auprès desquels cette Comete avoit passé.

Comete de 1683.

(723) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Flamsteed. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$5^s\,23^d\,23'\,0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 25 29 30.
Inclinaison de l'orbite.	83 11 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	13 Juillet 1683, $2^h\,59'\,0''$.
Distance périhélie	0,56020.

Cette Comete, une de celles qui approchent de l'orbite de la Terre, fut observée par Hévélius, Flamsteed, & par les plus célebres Astronomes de l'Europe, depuis le 2 Août 1683, dans 5 degrés de l'Ecrevisse, avec 29^d de latitude boréale, jusqu'au 4 Septembre, dans $2^d\,35'$ du Taureau, avec une latitude australe de $11^d\,20'$. Elle parcourut une partie du Lynx, le Cocher, la jambe de Persée, passa entre les Pleyades & la Mouche, & disparut dans la Baleine.

Comete de 1684.

(724) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Bianchini. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$8^s\,28^d\,15'\,0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	7 28 52 0.
Inclinaison de l'orbite	65 48 40.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	8 Juin 1684, $10^h\,26'\,0''$.
Distance périhélie	0,96015.

Cette Comete, une de celles qui approchent de l'orbite de la Terre, fut observée à Rome par Bianchini, depuis le 1^er^ Juillet 1684, dans $11^d\,18'$ de la Balance, avec une latitude boréale de $13^d\,12'$, jusqu'au 17 Juillet, dans $2^d\,8'$ du Scorpion, avec une latitude boréale de $47^d\,40'$. Elle parcourut la Vierge & le Bouvier, en dirigeant son mouvement vers la Couronne boréale. Elle étoit petite & nébuleuse, ce qui fut cause qu'elle échappa à presque tous les Astronomes.

Comete de 1686.

(725) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de Kirch. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$11^s\,20^d\,34'\,40''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 17 0 30.
Inclinaison de l'orbite	31 21 40.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie.	16 Septembre 1686, $14^h\,43'\,0''$.
Distance périhélie	0,32500.

Cette Comete fut observée par Kirch à Ingolstat, le 18 & le 19 Septembre 1686, dans les Etoiles du Lion. Le P. Richaud l'avoit observée à Pau, dès le 7 Septembre. Elle avoit été observée au Brésil, à Amboine & dans le Royaume de Siam, pendant tout le mois d'Août. La tête égaloit les Etoiles de la premiere grandeur, & la queue étoit longue de 18^d. Elle parcourut Orion, au-dessous du Baudrier, la tête de l'Hydre, & le Lion. M. Struick soupçonne que cette Comete a une période d'environ 174 ans, & qu'elle est la même que les Cometes de 817, 990, 1165, 1338, 1512, dont on connoît les apparitions sans avoir pu les soumettre au Calcul. Si cette conjecture est fondée, elle reparoîtra vers 1860.

C'étoit alors le tems des persécutions que l'on exerçoit en France contre les Protestans. Ces malheureux, chassés de leurs foyers, publioient dans toute l'Europe, que le nombre considérable de Cometes que l'on avoit observées depuis le commencement de leurs malheurs, étoit un signe sensible de ces désastres. On croyoit encore à cette époque qu'il n'y avoit point de grandes calamités sans quelque apparition de Cometes. Les Courtisans & les Jésuites prétendirent que la Comete avoit annoncé la mort du grand Eléphant de la Ménagerie de Versailles, celui que les Ambassadeurs de Siam avoient amené avec eux. Cet Eléphant mourut en effet le jour de l'apparition de la Comete.

Comete de 1689.

(726) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après des observations faites aux Indes par les Jésuites. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$10^s\ 23^d\ 45'\ 20''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	8 23 44 45.
Inclinaison de l'orbite	69 17 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie . . .	1er. Décembre 1689, $15^h\ 5'\ 0''$.
Distance périhélie	0,01689.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus du Soleil, n'a point été observée en Europe; elle parcouroit des constellations trop australes. Elle avoit une queue de près de 60^d, dont l'extrémité fut apperçue à Pékin, vers le milieu de Décembre. Cette Comete fut vue toute entiere dans des contrées plus australes. A Ternate, on la vit le 11 Décembre 1689; le 10 elle fut observée à Pondicheri & à Malaca; on la suivit jusqu'au 24 Décembre 1689; elle parcourut le bras du Centaure, passa dans le Loup, & disparut un peu au Nord-Ouest du pied du Centaure.

Comete de 1698.

(727) Cette Comete a été calculée par Halley, d'après les observations de la Hire. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$8^s\ 27^d\ 44'\ 15''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	9 0 51 15.
Inclinaison de l'orbite	11 46 0.
Sens du mouvement	rétrograde
Passage au périhélie	18 Octobre 1698, $17^h\ 7'\ 0''$.
Distance périhélie	0,69129.

Cette Comete fut apperçue par la Hire & Cassini, au commencement de Septembre 1698, dans Cassiopée. Elle passa par les épaules & les bras de Céphée, entre le Dragon & le Cygne ; traversa Hercule, le Serpentaire, & disparut dans le Scorpion le 28 Septembre 1698.

Comete de 1699.

(728) Cette Comete a été calculée par l'Abbé de la Caille, d'après les observations de Cassini & de Maraldi. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$10^s\ 21^d\ 45'\ 35''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	7 2 31 6.
Inclinaison de l'orbite	69 20 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	13 Janvier 1699, $8^h\ 32'\ 0''$.
Distance périhélie.	0,75435.

Cette Comete fut observée à Paris par Cassini & Maraldi, depuis le 20 Février 1699, dans $15^d\ 31'$ des Gémeaux, avec une latitude boréale de $37^d\ 25'$, jusqu'au 2 Mars au soir. Le P. Fontenay l'observa à la Chine, depuis le 17 Février jusqu'au 26 du même mois. Elle traversa Céphée, le Réene, la Girafe & le Cocher.

Comete de 1702.

(729) Cette Comete a été calculée par l'Abbé de la Caille, d'après les observations de Bianchini. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$6^s\ 9^d\ 25'\ 15''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	4 18 41 3.
Inclinaison de l'orbite.	4 30 0.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	13 Mars 1702, $14^h\ 22'\ 0''$.
Distance périhélie	0,64590.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite terrestre, fut découverte à Rome le 20 Avril 1702, par Bianchini ; elle fut observée à Paris & dans le reste de l'Europe jusqu'au 4 Mai. Elle

parcourut la Fleche, le rameau d'Hercule, le Serpentaire, & diſparut près de la main du Serpentaire.

Comete de 1706.

(730) Cette Comete a été calculée par l'Abbé de la Caille, d'après les obſervations de Maraldi & de Caſſini. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$0^s\ 13^d\ 11'\ 40''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	2 12 29 10.
Inclinaiſon de l'orbite	55 14 10.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie.	30 Janvier 1706, $4^h\ 32'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,42581.

Cette Comete fut obſervée par Caſſini & Maraldi, depuis le 18 Mars 1706, juſqu'au 16 Août. Le 18 Mars ſon aſcenſion droite étoit de $237^d\ 20'$ & ſa déclinaiſon boréale de 36^d. Le 16 Avril la Comete étoit d'un demi dégré plus boréale que l'Etoile β de la Vierge, & éloignée d'un dégré & demi de la même Etoile. Elle paſſa au nord de la Couronne, parcourut le Bouvier, l'aile de la Vierge & diſparut vers la tête de la Vierge.

Comete de 1707.

(731) Cette Comete a été calculée par Struick, d'après les obſervations faites en Europe. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$1^s\ 22^d\ 50'\ 29''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	2 19 58 9.
Inclinaiſon de l'orbite	88 37 40.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie.	11 Décembre 1707, $23^h\ 52'\ 47''$.
Diſtance périhélie	0,85904.

Cette Comete fut obſervée par Caſſini & Maraldi, depuis le 28 Novembre 1707, juſqu'au 25 Décembre de la même année. Elle parcourut l'eſpace qui eſt entre le bras d'Antinoüs & le col du Cigne; elle paſſa entre l'Aigle, la Fleche & le Dauphin. Le 6 Décembre on la voyoit à la vue ſimple, quoique la Lune fût dans ſon plein. Elle paroiſſoit grande à-peu-près comme le diſque de Jupiter. Son noyau étoit clair, mais mal terminé.

Comete de 1718.

(732) Cette Comete a été calculée par Douwes, d'après les obſervations de Kirch. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$4^s\ 7^d\ 55'\ 20''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	4 1 26 36.
Inclinaiſon de l'orbite	31 12 53.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie	15 Janvier 1718, $1^h\ 24'\ 36''$.
Diſtance périhélie	1,02565.

Cette Comete fut obsérvée par Kirch, depuis le 18 Janvier 1718, jusqu'au 5 Février suivant. Le 18 Janvier elle étoit voisine des épaules de la petite Ourse; elle étoit alors dans $27^d\ 26'$ du Cancer, avec une latitude boréale de $69^d\ 18'$; elle passa par les pieds de Céphée & par Cassiopée; elle fut observée pour la derniere fois dans la jambe d'Andromede, dans $1^d\ 39'$ du Taureau, avec une latitude boréale de $24^d\ 53'$.

Comete de 1723.

(733) Cette Comete a été calculée par Bradley, d'après ses propres observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$0^s\ 14^d\ 16'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	1 12 52 20.
Inclinaison de l'orbite	49 59 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie.	27 Septembre 1723, $16^h\ 20'\ 0''$.
Distance périhélie	0,99865.

Cette Comete fut découverte à Albano près de Rome, le 17 Octobre 1723, par Bianchini, dans la queue du Poisson austral. Halley, Bradley, Pound & Graham l'observerent en Angleterre avec la plus grande précision, depuis le 20 Octobre jusqu'au 18 Décembre. Elle fut observée le 18 Octobre, à Paris, dans les Etoiles du Capricorne; le 19 elle traversa l'Ecliptique dans 8^d du Verseau; le 21 elle se trouva proche de la plus occidentale des deux Etoiles qui sont dans la main précédente du Verseau; elle s'avança ensuite vers Antinoüs. On l'avoit observée sur la côte de Malabar, quelque tems avant qu'elle eût été découverte en Europe, auprès de Canopus, dans l'Hidre australe, le Toucan & la Grue.

Comete de 1729.

(734) Cette Comete a été calculée par Douwes; voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$10^s\ 10^d\ 35'\ 15''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 22 16 53.
Inclinaison de l'orbite.	77 1 58.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	23 Juin 1729, $6^h\ 45'\ 22''$.
Distance périhélie	4,06980.

Cette Comete fut apperçue à Nismes, le 31 Juillet 1729, par le P. Sarabat. Elle fut observée à Paris par Cassini, depuis la fin d'Août 1729 jusqu'au 21 Janvier 1730. Son mouvement apparent fut d'abord rétrograde. Elle parcourut la tête du petit Cheval, la queue du Dauphin, & s'arrêta près de l'Aigle, où elle fut quelque tems stationnaire. Son mouvement devint ensuite direct, & elle passa par la tête du Dauphin,

près

près de laquelle elle disparut. C'est de toutes les Cometes connues celle qui s'éloigne le plus du Soleil dans son périhélie.

Ce fut à l'occasion de cette Comete que M. Bouguer proposa sa Méthode pour calculer l'orbite d'une Comete, en faisant usage de trois observations voisines ; il conclut que la trajectoire de la Comete de 1729 étoit hyperbolique. Cette méthode fut combattue par M. Maraldi & par Struick.

Comete de 1737.

(735) Cette Comete a été calculée par Bradley, d'après ses propres observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$7^s\ 16^d\ 22'\ 0''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 25 55 0.
Inclinaison de l'orbite	18 20 45.
Sens du mouvement.	direct.
Passage au périhélie.	30 Janvier 1737, $8^h\ 30'\ 0''$.
Distance périhélie	0,22282.

On trouve dans les Mémoires de l'Académie, les observations de la Comete faites à Paris par Cassini, depuis le 16 Février 1737 jusqu'au 2 Avril. Les Mémoires de l'institut de Bologne contiennent celles de Manfredi, depuis le 25 Février jusqu'au 6 Avril. Les Transactions philosophiques, outre les observations de Bradley faites à Oxford, depuis le 26 Février jusqu'au 2 Avril, en renferment plusieurs autres faites à Rome, à Philadelphie, à Spanish-Town dans la Jamaïque, à Madras & à Lisbonne. La Comete parcourut le dessus du dos & la tête de la Baleine ; elle disparut au-dessous des Hyades. Elle paroissoit à la vue simple comme une Etoile de la seconde grandeur.

Comete de 1739.

(736) Cette Comete a été calculée par l'Abbé de la Caille, d'après les observations de M. Zanotti. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$6^s\ 27^d\ 25'\ 14''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 12 38 40.
Inclinaison de l'orbite	55 42 44.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie.	17 Juin 1739, $10^h\ 9'\ 0''$.
Distance périhélie	0,67358.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, a été observée par M. Zanotti, depuis le 28 Mai 1739, jusqu'au 18 Août de la même année. Le 28 Mai elle étoit dans $7^d\ 6'$ du Cancer, avec une latitude boréale de $29^d\ 9'$; le 18 Août elle étoit dans $7^d\ 1'$ des Gémeaux, avec une latitude australe de $14^d\ 57'$. Elle

traversa les pattes du Lynx, les pieds du Cocher, & disparut dans le bouclier d'Orion.

Comete de 1742.

(737) Cette Comete a été calculée par Struick, d'après les observations de Cassini. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	6s 5d 34′ 45″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	7 7 33 14.
Inclinaison de l'orbite	67 4 11.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	8 Février 1742, 4h 30′ 30″.
Distance périhélie	0,76555.

Cette Comete fut observée dans toute l'Europe & à la Chine, depuis le commencement de Mars 1742, jusqu'au 6 Mai de la même année. Elle avoit une queue de 4 à 5 degrés. Le 4 Mars elle étoit dans 16d 0′ 40″ du Capricorne, avec une latitude boréale de 34d 45′ 37″. Son mouvement devint très-rapide vers le 14 du même mois; il étoit de 18d en longitude, & d'environ 1d en latitude. Le 14 Mars la Comete étoit dans 6d 31′ 50″ des Poissons, avec une latitude de 78d 13′ 20″ boréale. Le 6 Mai, jour de sa disparition, elle étoit dans 4d 30′ 40″ de l'Ecrevisse, avec une latitude boréale de 48d 35′ 35″. Elle traversa les pieds d'Antinoüs, la queue du Serpentaire, la queue de l'Aigle, passa près de la Lyre, traversa l'aile boréale du Cygne, le ventre du Dragon, le pied de Céphée, la Girafe, & disparut entre la Girafe & la tête de la grande Ourse.

Premiere Comete de 1743.

(738) Cette Comete a été calculée par Struick, d'après les observations de M. Zanotti. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	2s 8 10′ 48″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 2 58 4.
Inclinaison de l'orbite	2 15 50.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	10 Janvier 1743, 21h 24′ 57″.
Distance périhélie	0,83811.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, fut observée par M. Zanotti, depuis le 12 Février 1743, dans 1d de la Vierge, avec une latitude boréale de 43d 3′, jusqu'au 28 Février de la même année, dans 13d de la Vierge, avec une latitude boréale de 12d 31′. Elle parcourut la derniere patte de derriere de la grande Ourse, & la queue du Lion.

Seconde Comete de 1743.

(739) Cette Comete a été calculée par M. Klinkemberg, d'après ſes propres obſervations. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$0^s\ 5^d\ 16'\ 25''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	8 6 33 52.
Inclinaiſon de l'orbite	45 48 21.
Sens du mouvement	rétrograde
Paſſage au périhélie	20 Septembre 1743, $21^h\ 26'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,52157.

Cette Comete fut obſervée par M. Klinkenberg, à Harlem; depuis le 7 Août 1743, dans $17^d\ 8'$ du Cancer, avec une latitude boréale de $55^d\ 15'$, juſqu'au 2 Septembre de la même année, dans $12^d\ 40'$ de la Balance, avec une latitude boréale de $21^d\ 37'$. Elle traverſa la queue du Dragon, celle de la grande Ourſe, les Chiens de Chaſſe, & diſparut dans la jambe du Bouvier.

Comete de 1744.

(740) Cette Comete a été calculée par beaucoup d'Aſtronomes; Blin, Maraldi, la Caille, Zanotti, Chéſeaux, Euler, Pingré, Klinkemberg. Voici ſes élémens, d'après M. Pingré.

Longitude du nœud aſcendant	$1^s\ 15^d\ 47'\ 53''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	6 17 13 4.
Inclinaiſon de l'orbite	47 8 29.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	1er. Mars 1744, $8^h\ 3'\ 3''$.
Diſtance périhélie	0,22223.

M. Klinkemberg découvrit cette Comete, à Harlem, le 9 Décembre 1743, au-deſſus du Bélier, près du grand triangle. Au reſte, elle étoit trop belle pour n'être pas apperçue par tous les Aſtronomes. Elle fut obſervée en Angleterre, par le Lord Macclesfield; en France, par M. Maraldi, Caſſini, l'abbé de la Caille; à Bologne par Zanotti; à Lauſanne par Chéſeaux. Elle fut ſuivie à Paris par Caſſini, depuis le 21 Décembre 1743, dans $22^d\ 23'\ 0''$ du Bélier, avec une latitude boréale de $16^d\ 18'\ 57''$, juſqu'au 1er. Mars 1744, dans 2^d des Poiſſons, avec une latitude boréale de $6^d\ 28'$. Elle parcourut le deſſus du Bélier, le Poiſſon boréal, Pégaſe, & la tête du Verſeau. Cette Comete eſt une des plus ſingulieres qui ait paru. Sa queue formoit une eſpece d'évenrail de plus de 15^d de longueur & de 120^d de largeur, dont tous les rayons venoient ſe réunir au centre de la Comete. Cette queue étoit aſſez brillante pour n'être pas effacée par la lumiere de la pleine Lune. On en voyoit même des veſtiges aprés le lever du Soleil. Quant au noyau de la Comete, il

approchoit de la clarté de Vénus, que l'on pouvoit lui comparer facilement, attendu que cette Planete étoit sur l'horizon en même tems que la Comete. Son disque paroissoit en croissant, & on pouvoit l'observer avec des Lunettes, même en plein midi.

Comete de 1747.

(741) Cette Comete a été calculée par M. Chéseaux, d'après ses propres observations. Voici les élémens.

Longitude du nœud ascendant	$4^s\ 26^d\ 58'\ 27''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	9 10 5 41.
Inclinaison de l'orbite	77 56 55.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie . . . . 28 Février 1747,	$11^h\ 54'\ 19''$.
Distance périhélie	2,29388.

Quoique cette Comete ait été observée en 1746, on la met cependant sous la date de 1747, parce que son passage par le périhélie se rapporte à cette derniere année. Elle fut découverte à Lauzanne par M. Chéseaux, le 13 Août 1746, dans $5^d\ 16'\ 35''$ des Poissons, avec une latitude boréale de $23^d\ 17'\ 0''$. Elle fut observée jusqu'au 5 Décembre de la même année, dans $3^d\ 10'\ 38''$ du Verseau, avec une latitude australe de $12^d\ 16'\ 41''$. Elle parcourut la tête de Pégase, la tête & le bras du Verseau, & une partie du Capricorne.

Premiere Comete de 1748.

(742) Cette Comete a été calculée par M. Maraldi, d'après ses propres observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$7^s\ 22^d\ 52'\ 16''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	7 5 0 50.
Inclinaison de l'orbite	85 26 57.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie . . . . 28 Avril 1748,	$19^h\ 34'\ 45''$.
Distance périhélie	0,84066.

Elle fut observée depuis le 9 Mai 1748, dans $19^d\ 26'\ 15''$ du Taureau, avec une latitude boréale de $58^d\ 21'\ 0''$, jusqu'au 30 Juin de la même année, dans $7^d\ 57'\ 37''$ du Cancer, avec une latitude de $49^d\ 0'\ 36''$ boréale. Elle parcourut la partie du Ciel qui est entre Cassiopée & Céphée, le Reene & le col de la Girafe.

Seconde Comete de 1748.

(743) Cette Comete a été calculée par Struick, d'après les obſervations de M. Klinkemberg. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$1^f\ 4^d\ 39'\ 43''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	9 6 9 24.
Inclinaiſon de l'orbite	56 59 3.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	18 Juin 1748, $1^h\ 33'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,65525.

Cette Comete fut obſervée par M. Klinkemberg à Harlem, depuis le 19 Mai 1748, dans $1^d\ 3'\ 18''$ du Lion, avec une latitude boréale de $1^d\ 28'\ 37''$, juſqu'au 22 Mai ſeulement, dans $28^d\ 41'$ du Cancer, avec une latitude méridionale de $5^d\ 47'$. Elle parcourut une partie des Etoiles de l'Ecreviſſe. On ne peut donner cette théorie que comme très-incertaine, vu le petit nombre d'obſervations de la Comete.

Comete de 1757.

(744) Cette Comete a été calculée par Bradley, l'Abbé de la Caille, M. Pingré & M. Ratte. Voici ſes élémens d'après M. Pingré.

Longitude du nœud aſcendant	$7^f\ 4^d\ 4'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	4 2 49 0.
Inclinaiſon de l'orbite	12 48 0.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	21 Octobre 1757, $9^h\ 56'$.
Diſtance périhélie	0,33797.

Cette Comete fut obſervée depuis le 15 Septembre 1757, dans $10^d\ 15'$ du Cancer, avec une latitude boréale de $10^d\ 10'$, juſqu'au 15 Octobre de la même année, dans $1^d\ 13'$ de la Balance, avec une latitude auſtrale de $4^d\ 11'\ 40''$. Elle s'éloigna peu de l'Ecliptique; elle parcourut la tête des Gémeaux, l'Ecreviſſe, les pattes du Lion, & diſparut dans le bras auſtral de la Vierge.

Comete de 1758.

(745) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après les obſervations de M. Meſſier. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$7^f\ 20^d\ 50'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	8 27 38 0.
Inclinaiſon de l'orbite	68 19 0.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	11 Juin 1758, $3^h\ 27'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,21535.

Cette Comete fut obſervée dès la fin de Mai 1758, par M. de la Nux, à l'Isle-Bourbon. Elle étoit alors dans la Conſtellation d'Orion. Elle fut apperçue à Londres le 18 Juin; mais il ne paroît pas qu'on ait continué de l'obſerver en Angleterre. Le 25 Juillet elle fut vue en Saxe par M. Chretien Gartner. Elle étoit alors dans la Conſtellation du Cocher. Enfin M. Meſſier la découvrit à Paris le 14 Août, & il l'obſerva conſtamment juſqu'au 2 Novembre. Le 14 Août elle étoit dans $22^d\ 18'\ 16''$ des Gémeaux, avec une latitude boréale de $5^d\ 5'\ 40''$; le 2 Novembre elle étoit dans $28^d\ 51'\ 1''$ du Taureau, avec $6^d\ 44'\ 52''$ de latitude auſtrale. Elle parcourut le pied du Cocher juſqu'à l'extrémité de la tête du Taureau. Elle étoit fort petite, & elle auroit probablement échappé à un Obſervateur moins exercé & moins aſſidu que M. Meſſier

Premiere Comete de 1759.

(746) Cette Comete, la même que celle obſervée en 1456, 1531, 1607 & 1682, a été calculée par un grand nombre d'Aſtronomes. Voici ſes élémens d'après l'Abbé de la Caille.

Longitude du nœud aſcendant	$1^s\ 23^d\ 49'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	10 3 16 0.
Inclinaiſon de l'orbite	17 39 0.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie	12 Mars 1759, $13^h\ 41'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,58350.

Cette Comete, que l'on attendoit depuis long-tems, fut d'abord vue en Saxe par un payſan nommé Palitſch. Il en donna avis au Docteur Hoffman, qui, d'après trois obſervations faites le 25, le 27 & le 28 Décembre 1758, en conclut que c'étoit la Comete dont Halley avoit annoncé le retour; mais comme ces premieres obſervations ne furent point ſuivies, on ne doit dater la véritable découverte de cette Comete que du 20 Janvier 1759, qu'elle fut apperçue par M. Meſſier; elle étoit alors dans les Etoiles des Poiſſons; elle fut obſervée le ſoir par cet Aſtronome juſqu'au 14 Février qu'elle entra dans les rayons du Soleil. Elle en ſortit vers la fin de Mars, & fut obſervée le matin par M. Meſſier juſque vers la fin d'Avril. Comme dans cet intervalle elle avoit paſſé par ſon périhélie, ſa queue, au commencement de ſa réapparition, étoit d'environ 20^d & ſon noyau fort brillant. La Comete étoit alors dans les Etoiles du Verſeau, qu'elle traverſa, ainſi que la queue du Capricorne. Elle s'enfonça enſuite dans l'hémiſphere auſtral, où ſon mouvement devint très-rapide; elle y parcourut l'Indien, le Paon, le triangle auſtral & le Centaure. La Comete ceſſa d'être viſible en Europe juſqu'au commencement de Mai, qu'on la vit reparoître le ſoir au-deſſous de l'Hydre. Elle parcourut enfin les Etoiles de l'Hydre au-deſſous de la Coupe, & diſparut le 18 Juin dans le Limbe du ſextant.

On peut se rappeller, à l'occasion de la Comete de 1682, que M. Halley, frappé de la ressemblance de ses élémens, avec ceux des Cometes de 1456, 1531 & 1607, n'avoit pas hésité d'affirmer que ces trois Cometes n'étoient qu'un seul & même Astre, dont la révolution autour du Soleil étoit d'environ 77 ans, & qui devoit en conséquence reparoître vers 1759. Cette découverte lui avoit paru si intéressante, qu'il auroit cru manquer à sa patrie, s'il n'avoit point fait remarquer que le Monde Savant en étoit redevable à un Anglois. Il observoit en même tems, que la Comete devant passer près de Jupiter, ses élémens pourroient être altérés par l'action de cette Planete. Il croyoit donc que sa prédiction ne comportoit pas une exactitude plus grande que les limites d'une année. Tel étoit l'état des connoissances Astronomiques, relativement à cette Comete, lorsque M. Clairaut entreprit d'y appliquer les formules du Problême des trois corps, & de soumettre sa marche à un calcul rigoureux. Je m'écarterois de mon sujet, si je donnois l'analyse de ce travail, dont l'exécution fait autant d'honneur à la France, que la premiere idée en a pu faire à l'Angleterre. Il suffit de savoir qu'au moyen des calculs les plus pénibles, M. Clairaut est venu à bout de déterminer, à un mois près, la durée de la derniere révolution de la Comete. Suivant cet illustre Géometre, l'Astre devoit passer par le périhélie vers le 13 Avril 1759; il y a réellement passé le 12 Mars. M. de la Place a fait voir depuis, qu'en mettant dans les formules de M. Clairaut, les véritables masses de Saturne & de Jupiter, qui n'étoient pas encore rigoureusement connues en 1759, on auroit déterminé, à dix jours près, le passage de la Comete par son périhélie.

Seconde Comete de 1759.

(747) Cette Comete a été calculée par M. Pingré. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$4^s\ 19^d\ 39'\ 41''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	1 23 34 19.
Inclinaison de l'orbite	79 6 38.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	27 Novembre 1759, $0^h\ 11'\ 57''$.
Distance périhélie	0,80139.

Quoique cette Comete n'ait été observée qu'en 1760, on la met cependant sous la date de 1759, parce que son passage par le périhélie se rapporte à cette derniere année. Elle fut découverte par M. Messier, le 26 Janvier 1760; elle étoit alors entre la Coupe & l'Hydre près de l'Etoile ν de cette derniere Constellation. Vue à la Lunette, elle paroissoit comme une nébuleuse; elle avoit alors $160^d\ 56'\ 41''$ d'ascension droite, & $14^d\ 15'\ 46''$ de déclinaison australe. La nuit du 5 au 6 Fevrier, la Comete se voyoit à la vue simple. Elle fut observée jusqu'au 18 Mars; elle avoit alors $124^d\ 29'\ 39''$ d'Ascension droite, & $44^d\ 19'\ 16''$ de dé-

clinaifon boréale. Depuis le 26 Janvier 1760 jufqu'au 18 Mars de la même année, elle parcourut la bafe de la Coupe, le Sextant, le Lion, paffa près de Regulus, & ceffa d'être vifible dans le Lynx.

Troifieme Comete de 1759.

(748) Cette Comete a été calculée par l'Abbé de la Caille, d'après fes propres obfervations. Voici fes élémens.

Longitude du nœud afcendant	2ˢ 19ᵈ 50′ 45″.
Lieu du périhélie fur l'orbite	4 18 24 35.
Inclinaifon de l'orbite	4 51 32.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paffage au périhélie	16 Décembre 1759, 21ʰ 13′ 0″.
Diftance périhélie	0,96599.

Quoique cette Comete n'ait été obfervée qu'en 1760, on la met cependant fous la date de 1759, parce que le paffage par le périhélie fe rapporte à cette derniere année. Elle fut découverte à Paris le 8 Janvier 1760, au foir; elle paroiffoit entre les pieds de devant de la Licorne & l'épée d'Orion; on la voyoit à la vue fimple; elle avoit une queue d'environ 4ᵈ; fon noyau étoit d'une couleur vive & rougeâtre, environné d'une nébulofité d'environ 15′. Son afcenfion droite étoit de 86ᵈ 12′ 27″, & fa déclinaifon de 9ᵈ 17′ 44″ auftrale. Dans l'intervalle du 8 au 9 Janvier, elle parcourut 20ᵈ 39′ en afcenfion droite, & 7ᵈ 8′ 27″ en déclinaifon. Elle fut obfervée jufqu'au 30 Janvier qu'elle ceffa d'être vifible; elle avoit alors 28ᵈ 54′ 40″ d'afcenfion droite, & 11ᵈ 25′ 14″ de déclinaifon boréale. Depuis le 8 Janvier 1760, jufqu'au 30 du même mois, elle traverfa Orion; l'Eridan au-deffous du Taureau, la tête de la Baleine, & les pieds de devant du Bélier. Elle avoit été vue à Lisbonne le 7 Janvier fur la Coupe du Vaiffeau; elle paffa très-près de Sirius; elle avoit alors un mouvement encore plus rapide que celui obfervé à Paris le premier jour de fon apparition; elle a dû être très-belle & très-rapide dans l'hémifphere auftral.

Comete de 1762.

(749) Cette Comete a été calculée par M. Maraldi. Voici fes élémens.

Longitude du nœud afcendant	11ˢ 18ᵈ 55′ 31″.
Lieu du périhélie fur l'orbite	3 15 22 23.
Inclinaifon de l'orbite	85 22 21.
Sens du mouvement	direct.
Paffage au périhélie	29 Mai 1762, 0ʰ 27′ 48″.
Diftance périhélie	1,01415.

Cette Comete fut découverte en Hollande par M. Klinkemberg, le 17 Mai 1762; elle étoit alors dans 8ᵈ 15′ des Gémeaux, avec une latitude boréale de 44ᵈ 10′. Elle fut obfervée en France, depuis le 28 Mai

jufqu'au

jusqu'au 5 Juillet qu'elle disparut dans 17ᵈ 24′ 34″ du Lion, avec une latitude boréale de 11ᵈ 17′ 44″. On la voyoit très-distinctement à la vue simple; son noyau étoit fort brillant, quoique mal terminé. Depuis le 17 Mai jusqu'au 5 Juillet, elle parcourut la croupe de la Girafe, la tête, le dessus du dos, la croupe & la queue du Linx, & la tête du Lion.

Comete de 1763.

(750) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après les observations de M. Messier. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	11ˢ 26ᵈ 23′ 26″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 24 51 54.
Inclinaison de l'orbite	72 40 40.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	1ᵉʳ Novembre 1763, 19ʰ 52′ 58″.
Distance périhélie	0,49876.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, fut découverte à Paris par M. Messier, le 28 Septembre 1763 au soir, entre ι & δ d'Ophiucus. Il crut d'abord que c'étoit une nébuleuse; son ascension droite fut estimée de 243ᵈ 40′, & sa déclinaison de 4ᵈ 42′ australe. Le lendemain 29 Septembre, M. Messier s'assura que c'étoit une Comete; il continua de l'observer jusqu'au 25 Novembre qu'elle disparut. Son ascension droite étoit alors de 215ᵈ 26′ 30″, & sa déclinaison de 2ᵈ 9′ 37″ australe. Le 24 Octobre le noyau paroissoit brillant, d'une couleur blanchâtre & assez bien terminé. Depuis le 28 Septembre 1763, jusqu'au 25 Novembre, la Comete parcourut la Constellation du Serpent, le pied du Bouvier, & cessa d'être visible près du pied droit de la Vierge. La route apparente de cette Comete a été remarquable par sa courbure.

Comete de 1764.

(751) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après les observations de M. Messier. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	4ˢ 0ᵈ 4′ 33″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	0 15 14 52.
Inclinaison de l'orbite	52 53 31.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	12 Février 1764, 13ʰ 51′ 36″.
Distance périhélie.	0,55522.

Cette Comete, une de celles qui approchent le plus de l'orbite de la Terre, fut découverte par M. Messier, le 3 Janvier 1764 au soir, près de l'Etoile θ du Dragon. Elle étoit alors dans 11ᵈ 37′ 16″ de la Balance, avec une latitude boréale de 72ᵈ 53′ 48″. On la voyoit dis-

tinctement à la vue simple ; elle égaloit en clarté les Etoiles de la troisieme grandeur ; sa queue étoit d'environ 2 degrés. Elle fut observée jusqu'au 11 Février qu'elle disparut dans 4^d 58′ 48″ des Poissons, avec une latitude boréale de 19^d 35′ 38″. Elle parcourut pendant cet intervalle, la tête du Dragon, le Cygne, le pied austral de Pégase, & disparut vers la tête de Pégase.

Premiere Comete de 1766.

(752) Cette Comete a été calculée par M. Pingré. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	8^s 4^d 10′ 50″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	4 23 15 25.
Inclinaison de l'orbite	40 50 20.
Sens du mouvement	rétrograde
Passage au périhélie	17 Février 1766, 8^h 50′ 0″.
Distance périhélie	0,50533.

Cette Comete fut découverte par M. Messier, le 8 Mars 1766 ; elle avoit 0^s 21^d 59′ 27″ de longitude, & 6^d 54′ 14″ de latitude boréale. Elle fut observée jusqu'au 15 Mars, par MM. Messier, Chappe & Cassini. Lorsqu'elle disparut, sa longitude étoit de 0^s 26^d 50′ 44″, & sa latitude de 2^d 4′ 44″ boréale. Son mouvement apparent se fit suivant l'ordre des signes ; elle passa le 10 Mars très-près de l'Etoile *n* du Lien des Poissons, & cessa d'être visible près du Bélier. Elle parcourut la partie du Ciel qui est entre la queue du plus oriental des Poissons, & les Etoiles du Bélier.

Seconde Comete de 1766.

(753) Cette Comete a été calculée par M. Pingré. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	2^s 14^d 22′ 50″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	8 2 17 53.
Inclinaison de l'orbite	11 8 4.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	22 Avril 1766, 20^h 55′ 40″.
Distance périhélie	0,33275.

Cette Comete fut découverte le 8 Avril 1766, au soir ; son ascension droite étoit alors de 39^d 29′ 56″, & sa déclinaison de 25^d 12′ 16″ boréale. Elle paroissoit à la vue simple, quoique près de l'horizon ; elle étoit à peu de distance des Pléïades au-dessus de la Mouche. Sa queue étoit d'environ 5^d & d'une lumiere sensible ; son noyau égaloit en éclat les Etoiles de la troisieme grandeur. Elle ne fut observée que pendant cinq jours, parce qu'elle se plongea tout de suite dans les rayons du Soleil. Le 12 Avril son ascension droite étoit de 33^d 28′ 46″, & sa déclinaison de 21^d 39′ 1″ boréale. Son mouvement apparent se fit contre l'ordre des signes. Elle cessa d'être observée près de la tête du Bélier.

Elle fut obſervée par M. de la Nux, dans l'Iſle-Bourbon, juſqu'au 13 Mai, dans les Etoiles des Poiſſons.

Comete de 1769.

(754) Cette Comete, une des plus belles que l'on ait vue depuis long-tems, a été calculée par un grand nombre d'Aſtronomes. Voici les élémens de M. Pingré.

Longitude du nœud aſcendant	$5^s 25^d 6' 4''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	4 24 15 53.
Inclinaiſon de l'orbite	40 46 42.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie.	7 Octobre 1769, $15^h 51' 23''$.
Diſtance périhélie	0,12274.

Cette Comete fut découverte par M. Meſſier, le 8 Août 1769 au ſoir. Elle étoit alors dans $5^d 32'$ du Taureau, avec une latitude auſtrale de $1^d 29'$. Elle étoit extrêmement foible; elle devint dans la ſuite très-conſidérable. Le 10 Septembre elle avoit une queue de 60^d, obſcurcie dans le milieu par l'ombre du noyau, juſqu'à la diſtance de 7 ou 8 degrés. La nuit du 5 au 6 Septembre, le noyau de la Comete fut eſtimé d'environ 4'; il étoit mal terminé & environné d'une atmoſphere qui s'étendoit à environ un dégré. Cette Comete fut obſervée le matin, depuis le 8 Août juſqu'au 15 Septembre qu'elle ſe plongea dans les rayons du Soleil; elle avoit alors $4^s 20^d 39' 17''$ de longitude, & $22^d 43' 34''$ de latitude auſtrale. Elle parcourut pendant cette premiere apparition, les Etoiles du Bélier, du Taureau, Orion, la Licorne, & ceſſa d'être obſervée près de α de l'Hydre.

Les premiers calculs que l'on avoit faits ſur cette Comete, avoient appris qu'elle devoit reparoître le ſoir, lorſqu'elle ſe dégageroit des rayons du Soleil. Elle fut encore découverte par M. Meſſier le 24 Octobre 1769; elle avoit alors $7^s 20^d 21' 35''$ de longitude, & $17^d 19' 0''$ de latitude boréale; on la voyoit à la vue ſimple, mais ſa queue n'étoit plus que d'environ 2 degrés. Elle augmenta en lumiere juſqu'au 3 Novembre; elle diminua enſuite juſqu'au 1^er^. Décembre qu'elle ceſſa de pâroître, dans $9^s 5^d 55' 58''$, avec une latitude boréale de $23^d 28' 38''$. Elle parcourut, pendant cette ſeconde apparition, les Conſtellations du Serpent, d'Ophiucus, & ceſſa d'être viſible dans la queue du Serpent, très-près de l'Equateur.

Premiere Comete de 1770.

(755) Cette Comete, celle de toutes les Cometes connues qui ait approché le plus près de la Terre, a beaucoup tourmenté les Aſtronomes qui ont entrepris d'en calculer l'orbite. Voici les élémens qui en ont été

donnés par M. Lambert; c'eſt un hommage que j'ai cru devoir payer à la mémoire de ce célebre Géometre.

Longitude du nœud aſcendant	$4^s\ 12^d\ 0'\ 0''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	11 25 57 0.
Inclinaiſon de l'orbite	1 55 0.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie.	9 Août 1770, $3^h\ 38'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,63100.

Cette Comete fut découverte par M. Meſſier, le 14 Juin 1770 au ſoir, entre la tête & l'arc du Sagittaire; elle paroiſſoit comme une nébuleuſe. Le 15 Juin, M. Meſſier obſerva ſon aſcenſion droite de $272^d\ 57'\ 52''$, & ſa déclinaiſon de $16^d\ 29'\ 5''$ auſtrale. Son mouvement n'eut d'abord rien de remarquable, mais il s'accélera enſuite & devint très-rapide. Dans l'intervalle du 30 Juin au 1er Juillet, la Comete parcourut $41^d\ 20'$ en aſcenſion droite, & $39^d\ 30'$ en déclinaiſon. Depuis le 14 Juin juſqu'au 3 Juillet, elle traverſa l'Ecu de Sobieski, la queue du Serpent, la Voie Lactée, la Lyre, un des nœuds du Dragon, Céphée, le Réene & la Girafe. Elle ceſſa de paroître le 12 Juillet, entre le Cocher & le Lynx, s'étant alors plongée dans les rayons du Soleil. Elle paſſa près des poles de l'Ecliptique & de l'Equateur. Cette Comete, d'abord très-petite, devint bientôt conſidérable à la vue ſimple, ce que l'on doit attribuer à ſa grande proximité de la Terre. Le diametre de ſa nébuloſité fut eſtimé par M. Meſſier d'environ $2^d\ 23'$; le noyau étoit brillant, d'une lumiere blanchâtre, ſans être terminé.

Cette premiere apparition de la Comete avoit donné lieu à M. Pingré de s'aſſurer qu'on pourroit la revoir le matin lorſqu'elle ſe dégageroit des rayons du Soleil; en conſéquence M. Meſſier la chercha dès le 18 Juillet, mais il ne put l'appercevoir que le 3 Août. On la voyoit à la vue ſimple; le noyau étoit brillant ſans être terminé; ſon diametre paroiſſoit de $45''$, & la nébuloſité qui l'environnoit de $15'$. Elle étoit au-deſſous de l'Ecliptique, entre les Etoiles ε & ν des Gémeaux, dans la jambe gauche de Pollux, avec une aſcenſion droite de $96^d\ 32'\ 25''$, & une déclinaiſon boréale de $22^d\ 29'\ 31''$. Elle fut obſervée juſqu'au 3 Octobre qu'elle diſparut. Elle avoit alors $132^d\ 49'\ 27''$ d'aſcenſion droite, & $16^d\ 26'\ 3''$ de déclinaiſon boréale. Son mouvement, lors de cette ſeconde apparition, ſe fit ſuivant l'ordre des ſignes, & preſque parallélement à l'Ecliptique. Elle traverſa les pieds des Gémeaux & les Etoiles de l'Ecreviſſe.

Cette Comete a beaucoup exercé les Aſtronomes qui ont entrepris d'en calculer l'orbite; & ils ont déſeſpéré de faire cadrer dans l'hypotheſe parabolique, les deux branches de ſon orbite, qu'elle a parcourues avant & après ſa grande proximité de la Terre. Quelques-uns ont penſé que cela pouvoit venir d'un petit dérangement dans les élémens, occaſionné par cette proximité; j'ai fait voir que cette opinion n'eſt pas fondée. D'autres Aſtronomes

ont cru qu'il falloit calculer la Comete dans l'Ellipse. Lexell, célebre Astronome de Péterſbourg, s'eſt livré à ce ſujet, à des calculs immenſes. Il a trouvé qu'une orbite elliptique, dont la révolution ſeroit de 5 années & demie, repréſenteroit aſſez bien toutes les obſervations de la premiere Comete de 1770.

Seconde Comete de 1770.

(756) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après les obſervations de M. Meſſier. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$3^s 18^d 42' 10''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	6 28 22 44.
Inclinaiſon de l'orbite	31 25 55.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie	22 Novembre 1770, $22^h 5' 48''$.
Diſtance périhélie	0,52824.

Quoique cette Comete n'ait été obſervée qu'en 1771, on la met cependant ſous la date de 1770, parce que le paſſage par le périhélie ſe rapporte à cette derniere année. Elle fut découverte le 10 Janvier 1771, par M. Meſſier, entre la tête de l'Hydre & le petit Chien; on la voyoit à la vue ſimple; ſon aſcenſion droite étoit alors de $122^d 28' 36''$, & ſa déclinaiſon de $5^d 4' 46''$ boréale. Elle fut obſervée juſqu'au 20 Janvier, jour auquel elle diſparut, avec $72^d 47' 32''$ d'aſcenſion droite, & $25^d 57' 4''$ de déclinaiſon boréale. Elle parcourut la partie du Ciel qui s'étend depuis la tête de l'Hydre juſqu'à la tête du Taureau, en paſſant par les pieds des Gémeaux & la maſſue d'Orion.

Comete de 1771.

(757) Cette Comete a été calculée par M. Proſpérin, d'après les obſervations de M. Meſſier. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$0^s 27^d 49' 37''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	3 13 48 21.
Inclinaiſon de l'orbite	11 16 44.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	19 Avril 1771, $0^h 39' 36''$.
Diſtance périhélie	0,90188.

Cette Comete fut découverte par M. Meſſier, le 1er. Avril 1771, au-deſſous des Pleïades, entre les Etoiles ν & ϵ du Bélier. Le noyau de la Comete étoit très-brillant. Elle étoit environnée d'une nébuloſité, avec une queue de $2^d 30'$ de longueur, dirigée vers les Pleïades. Elle fut obſervée par M. Meſſier, juſqu'au 19 Juin; ſon mouvement apparent ſe fit ſuivant l'ordre des ſignes, & fut ſenſiblement parallele à l'Ecliptique. Elle traverſa les Etoiles du Bélier, du Taureau, les pieds du Cocher, les Gémeaux, l'Ecreviſſe, & ceſſa de paroître dans le Lion,

près de l'Etoile η, audessus de Regulus. Elle fut observée à Rouen par MM. Bouin & Dulague, depuis le 12 Avril jusqu'au 24 Mai; à Stockolm par Wargentin, depuis le 18 Avril jusqu'au 16 Mai; à Marseille par M. de Saint-Jacques, depuis le 22 Avril jusqu'au 17 Juillet.

Comete de 1772.

(758) Cette Comete a été calculée par M. de la Lande, d'après les observations de M. Messier. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$8^s\ 12^d\ 43'\ 5''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 18 6 22.
Inclinaison de l'orbite	18 59 40.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie . . .	18. Février 1772, $20^h\ 50'\ 35''$.
Distance périhélie	1,01814.

Cette Comete fut découverte à Limoges par M. Montagne, le 8 Mars 1772. Elle paroissoit près de l'Etoile μ de l'Eridan. M. Messier l'observa le 26 Mars au soir; elle étoit entre le baudrier d'Orion & Syrius. Ce n'étoit qu'une simple petite nébulosité que les meilleurs instrumens pouvoient à peine faire appercevoir. Elle fut vue pour la derniere fois le 3 Avril.

Comete de 1773.

(759) Cette Comete a été calculée par M. Pingré, d'après les observations de M. Messier. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$4^s\ 1^d\ 4'\ 49''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 14 57 41.
Inclinaison de l'orbite	61 31 19.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	5 Septembre 1773, $9^h\ 12'\ 1''$.
Distance périhélie	1,12534.

Cette Comete fut découverte par M. Messier, le 13 Octobre 1773, dans une des pattes du Lion; son ascension droite étoit alors de $153^d\ 40'\ 44''$, & sa déclinaison de $6^d\ 37'\ 59''$ boréale. Elle fut observée jusqu'au 14 Avril 1774; elle avoit ce jour-là $184^d\ 2'\ 27''$ d'ascension droite, & $68^d\ 40'\ 4''$ de déclinaison boréale.

Le mouvement apparent de cette Comete s'est fait suivant l'ordre des signes, depuis le 13 Octobre 1773, jusqu'au 11 Février 1774, jour auquel la Comete commença à rétrograder. Elle traversa l'Ecliptique, le 10 Octobre 1773; & au mois d'Avril 1774, elle n'étoit plus qu'à 20^d du pole boréal de l'Equateur. Pendant la durée de son apparition, elle parcourut le Lion, la chevelure de Bérénice, les Levriers, la queue de la grande Ourse, passa très-près de l'Etoile η de cette Constellation, & cessa d'être visible à l'extrémité de la queue du Dragon.

Comete de 1774.

(760) Cette Comete a été calculée par M. Méchain. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	6s 0d 49′ 48″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 17 22 4.
Inclinaison de l'orbite	83 0 25.
Sens du mouvement.	direct.
Passage au périhélie	15 Août 1774, 10h 55′ 35″.
Distance périhélie	1,42862.

Cette Comete fut découverte à Limoges par M. Montagne, le 11 Août 1774. Il l'apperçut sur le dos du Réene, entre l'Etoile polaire & la Constellation de Cassiopée. M. Messier l'observa à Paris, depuis le 19 Août jusqu'au 25 Octobre. Dans cet intervalle, la Comete parcourut le Réene, le bras de Céphée, la chaîne d'Andromede, Pégase & l'eau du Verseau.

Comete de 1779.

(761) Cette Comete a été calculée par M. Méchain, d'après ses propres observations, Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	0s 25d 5′ 51″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 27 13 11.
Inclinaison de l'orbite	32 24 0.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	4 Janvier 1779, 2h 12′ 0″.
Distance périhélie	0,71313.

Cette Comete fut observée à Paris, par M. Messier, depuis le 18 Janvier 1779, jusqu'au 17 Mai de la même année; & par M. Méchain, depuis le 30 Janvier jusqu'au même jour 17 Mai; elle étoit très-petite. Dans cet intervalle, la Comete traversa les Constellations de la Lyre, d'Hercule, de la Couronne, du Bouvier, passa audessous de la Chevelure de Bérénice, traversa la Vierge, & cessa de paroître dans l'aile australe de cette Constellation.

Comete de 1780.

(762) Cette Comete a été calculée par M. Méchain, d'après ses propres observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	4s 4d 9′ 19″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	8 6 21 18.
Inclinaison de l'orbite	53 48 15.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie.	30 Septembre 1780, 18h 12′ 50″.
Distance périhélie	0,09926.

Cette Comete fut découverte à Paris, par M. Messier, le 27 Octobre 1780,

audessous de β du Lion. Depuis le 27 Octobre 1780, jusqu'au 28 Novembre, M. Messier l'observa quatorze fois. Dans cet intervalle, le mouvement apparent de la Comete fut de 21 degrés en longitude & de 22^d en latitude. Elle parcourut l'extrémité de la queue du Lion, les deux pattes de derriere de la grande Ourse, & cessa de paroître près de l'Etoile de cette Constellation.

Premiere Comete de 1781.

(763) Cette Comete a été calculée par M. Méchain, d'après ses propres observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s 23^d$ 0′ 38″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	7 29 11 25.
Inclinaison de l'orbite	81 43 26.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	7 Juillet 1781, 4^h 41′ 20″.
Distance périhélie	0,77587.

M. Méchain découvrit cette petite Comete, le 28 Juin 1781, dans la tête de la grande Ourse; il l'observa pour la derniere fois entre θ & δ du Lion. Elle fut toujours invisible à la vue simple; son mouvement vers le sud étoit très-rapide. Dans cet intervalle, elle parcourut la tête de la grande Ourse, la queue du petit Lion & la croupe du Lion.

Seconde Comete de 1781.

(764) Cette Comete a été calculée par M. Méchain, d'après ses propres observations; c'est celle à laquelle j'ai appliqué le calcul dans cet Ouvrage. Voici ses élémens, suivant M. Méchain.

Longitude du nœud ascendant	$2^s 17^d$ 22′ 52″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	0 16 3 28.
Inclinaison de l'orbite	27 13 8.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie . . .	29 Novembre 1781, 12^h 41′ 46″.
Distance périhélie	0,96100.

M. Méchain découvrit cette Comete le 9 Octobre 1781, près de δ de l'Ecrevisse. Son cours, très-lent d'abord, s'accéléra ensuite. Elle traversa l'Ecrevisse, la grande & la petite Ourse, le Dragon, l'aile & le cou du Cygne, le Renard, la Fleche; elle passa entre l'Aigle & le Dauphin. Elle fut observée pour la derniere fois le 25 Décembre 1781, sous la main d'Antinoüs. Le 9 Novembre, à six heures & demie du soir, sa distance au pole de l'Ecliptique n'étoit que de 42′; elle étoit alors visible à la vue simple; sa chevelure avoit quatre à cinq minutes de diametre; sa queue trois à quatre degrés de longueur.

Comete

Comete de 1783.

(765) Cette Comete a été calculée par M. Méchain, d'après ses observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$1^s 24^d 13' 50''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	1 15 24 46.
Inclinaison de l'orbite	53 9 9.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	15 Novembre 1783, $5^h 53' 23''$.
Distance périhélie	1,56535.

Cette Comete n'étoit pas visible à la vue simple; elle étoit sans queue, d'une lumiere très-foible. Elle fut découverte à Yorck, par M. Pigot, le 20 Novembre 1783, dans $1^s 9^d 2' 36''$, avec une latitude australe de $10^d 30' 55''$. Elle fut observée à Paris, par MM. Méchain & Messier, depuis le 26 Novembre jusqu'au 21 Décembre. Dans cet intervalle, elle parcourut la tête de la Baleine, le Bélier, & la pointe du grand Triangle. Il paroît que, dans cette derniere apparition, la Comete a passé le plus près qu'il est possible de la Terre, & cependant on ne pouvoit la découvrir à la vue simple. Concluons donc qu'elle peut revenir souvent sans être apperçue.

Premiere Comete de 1784.

(766) Cette Comete a été calculée par M. Méchain, d'après ses propres observations. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$1^s 26^d 49' 21''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	2 20 44 24.
Inclinaison de l'orbite	51 9 12.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	21 Janvier 1784, $4^h 56' 47''$.
Distance périhélie	0,70786.

Cette Comete fut découverte à Paris, par MM. Méchain & Cassini, le 24 Janvier 1784, près de la queue de la Baleine. On la voyoit à la vue simple. Son diametre étoit de 33″, sa queue de 2 à 3 degrés. MM. Méchain & Messier continuerent de l'observer jusqu'au 11 Mars qu'elle se perdit dans les rayons du Soleil. On l'avoit observée, dès le 15 Décembre 1783, à l'Isle-Bourbon; dès le 10 Janvier 1784, au Cap de Bonne-Espérance; & dès le 16, à la Guadeloupe. Dans cette premiere apparition, elle parcourut les Etoiles des Poissons & de Pégase.

On la revit ensuite le 9 Mai, & on continua de l'observer jusqu'au 26 du même mois. Dans cette seconde apparition, sa lumiere étoit extrêmement foible; elle passa audessus de la tête d'Andromede, & disparut près du Lézard.

Seconde Comete de 1784.

(767) Cette Comete fut découverte à Malthe, le 11 Avril 1784, par M. le Chevalier d'Angos, dans la Constellation du Renard; elle étoit très-petite & peu lumineuse. Il en a déterminé les élémens comme il suit.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 26^d\ 52'\ 9''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	10 28 54 57.
Inclinaison de l'orbite	47 55 8.
Sens du mouvement	rétrograde.
Passage au périhélie	9 Avril 1784, $21^h\ 16'\ 46''$.
Distance périhélie	0,65053.

M. le Chevalier d'Angos est le seul Astronome qui ait observé cette Comete; elle ne quitta point la Constellation du Renard. On ne peut donner cette théorie que comme très-incertaine, vu le petit nombre d'observations de la Comete.

Premiere Comete de 1785.

(768) Cette Comete fut découverte à Paris, le 7 Janvier 1785, par MM. Messier & Méchain. Ce dernier en a déterminé les élémens de la maniere suivante.

Longitude du nœud ascendant	$8^s\ 24^d\ 12'\ 15''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	3 19 51 56.
Inclinaison de l'orbite	70 14 12.
Sens du mouvement	direct.
Passage au périhélie	27 Janvier 1785, $7^h\ 58'\ 4''$.
Distance périhélie	1,14339.

Lorsque cette Comete fut découverte le 7 Janvier 1785, elle étoit sur le cou de la Baleine, entre l'Etoile ν de cette Constellation & l'Etoile α du lien des Poissons. La direction de son mouvement étoit du Nord au Sud, & presque perpendiculaire à l'Equateur. Cette Comete a été observée jusqu'au 8 Février 1785. Dans l'intervalle du 7 Janvier au 8 Février, elle parcourut la partie antérieure de la Baleine du Nord au Sud, & disparut dans les Etoiles du Fourneau.

Seconde Comete de 1785.

(769) Cette Comete fut découverte à Paris, par M. Méchain, le 11 Mars 1785. Voici ses élémens.

Longitude du nœud ascendant	$2^s\ 4^d\ 44'\ 40''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	9 27 34 30.
Inclinaison de l'orbite	87 7 0.
Sens du mouvement	rétrograde
Passage au périhélie	8 Avril 1785, $11^h\ 29'\ 0''$.
Distance périhélie	0,42759.

Cette Comete a été obſervée depuis le 11 Mars 1785, juſqu'au 16 Avril de la même année. Dans l'intervalle du 11 Mars au 16 Avril, elle parcourut la poitrine d'Andromede, l'eſpace qui eſt entre la tête d'Andromede & l'aile de Pégaſe, & diſparut dans l'aile de Pégaſe. Au commencement d'Avril, elle étoit très-brillante, & avoit une queue d'environ 20 degrés.

Comete de 1786.

(770) Cette Comete a été calculée par M. Meſſier, d'après ſes obſervations. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$6^s\ 14^d\ 22'\ 40''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	5 9 25 36.
Inclinaiſon de l'orbite	50 54 28.
Sens du mouvement	direct.
Paſſage au périhélie	7 Juillet 1786, $22^h\ 0'\ 12''$.
Diſtance périhélie	0,41010.

Cette Comete fut découverte en Angleterre, par Miſſ Caroline Herſchell, le 1er. Août 1786; elle étoit alors près des Etoiles ξ & ν de la patte de la grande Ourſe. M. Maskelyne l'obſerva à Gréenwich, depuis le 4 Août juſqu'au 26 Octobre. Cette Comete paroiſſoit comme une nébuleuſe, de maniere que le 19 Août, s'étant trouvée en conjonction avec la nébuleuſe placée entre la queue & les pattes des Chiens de Chaſſe, on les prenoit facilement l'une pour l'autre. Dans l'intervalle de ſon apparition, elle parcourut la chevelure de Bérénice, les pattes de derriere du plus auſtral des Chiens de Chaſſe, le Bouvier, le deſſous de la Couronne, la poitrine d'Hercule, & diſparut dans le Rameau.

Comete de 1787.

(771) Cette Comete a été calculée par M. de Saron. Voici ſes élémens.

Longitude du nœud aſcendant	$3^s\ 16^d\ 51'\ 35''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	0 7 44 9.
Inclinaiſon de l'orbite	48 15 51.
Sens du mouvement	rétrograde.
Paſſage au périhélie	10 Mai 1787, $19^h\ 58'\ 0''$.
Diſtance périhélie	0,34894.

Cette Comete fut découverte à Paris, par M. Méchain, le 10 Avril 1787, au ſoir; elle étoit dans la tête du Taureau. Elle fut obſervée juſqu'au 26 Avril, jour auquel elle ſe plongea dans les rayons du Soleil. On la revit enſuite le matin, le 17 Mai, & fut obſervée en Europe juſqu'au 26 Mai. Lors de ſa premiere apparition, elle parcourut depuis la tête du Taureau juſqu'aux Pléyades & la Mouche. Lors de la ſeconde apparition, elle parcourut la tête du Bélier. Cette Comete auroit ſans doute été viſible à la vue ſimple, lors de ſa réapparition, ſi ſon éclat n'avoit été effacé par le crépuſcule. Depuis la diſparition de cette Co-

mete en Europe, elle a été suivie dans l'hémisphere austral, par M. de la Nux, jusqu'au 26 Juillet. Dans cet intervalle, elle traversa le Bélier, la tête de la Baleine, l'Eridan, le Chevalet du Peintre & le Vaisseau. Elle disparut sur la croupe du Centaure, à un degré environ de distance de l'Etoile γ de la Croix. Il auroit été à desirer que les observations qui en ont été envoyées de l'Inde, fussent plus exactes; on auroit un exemple assez rare d'une Comete observée dans ses deux nœuds.

Remarque sur une Comete que l'on a prétendu avoir éclipsé la Lune en 1454.

(772) Je ne m'étendrai point ici sur une Comete que l'on a prétendu avoir éclipsé la Lune en 1454. Son apparition est attestée par George Phranza, Maître de la Garde-Robe des Empereurs de Constantinople. Voici comment il s'explique.

« Durant l'été de 1454, une Comete commença à paroître tous les » soirs après le coucher du Soleil; elle avoit la figure d'une longue épée. » La Lune ayant atteint son plein, la Comete passa devant son disque, & » l'éclipsa. Quelques-uns, faisant attention à la forme d'épée qu'ils remar- » quoient dans la Comete, voyant d'ailleurs sa direction d'Occident en » Orient, conclurent que les Princes Chrétiens, formant une puissante » ligue, attaqueroient le Trône Ottoman & le renverseroient. Ce pro- » dige ne causa pas la plus petite frayeur aux Turcs ».

George Phranza étant le seul Auteur qui parle de cette Comete, on peut révoquer en doute toute cette narration, & sur-tout l'Eclipse de Lune occasionnée par l'interposition de la Comete.

Récapitulation des Notices précédentes.

(773) Si l'on ne compte que pour une seule Comete, celles des années 1456, 1531, 1607, 1682 & 1759, ainsi que cela est évident; que l'on ne compte pareillement que pour une seule Comete, celles des années 1264 & 1556, & celles de 1532 & 1661, on ne connoît en tout que soixante-quatorze Cometes dont on ait déterminé les orbites. De ces soixante-quatorze Cometes, trente-neuf sont directes, & trente-cinq sont rétrogrades; huit ont leurs orbites inclinées depuis 0^d jusqu'à 10^d; huit depuis 10^d jusqu'à 20^d; quatre depuis 20^d jusqu'à 30^d; neuf depuis 30^d jusqu'à 40^d; sept depuis 40^d jusqu'à 50^d; neuf depuis 50^d jusqu'à 60^d; dix depuis 60^d jusqu'à 70^d; dix depuis 70^d jusqu'à 80^d; & enfin neuf depuis 80^d jusqu'à 90^d. Douze seulement ont leurs distances périhélies plus grandes que la moyenne distance du Soleil à la Terre; soixante-deux ont leurs distances périhélies plus petites. Si l'on ajoute les inclinaisons de toutes les Cometes, & que l'on divise cette somme par le nombre des Cometes observées, on aura pour inclinaison moyenne $47^d\ 32'$. Si l'on supposoit que les Cometes eussent été lancées au hasard, l'angle moyen devroit être d'environ 45^d, ce qui s'accorde assez bien avec les observations.

Il paroît donc que dans notre Syſtême Planétaire, il n'exiſte point de cauſe générale qui faſſe mouvoir les Corps Céleſtes dans un ſens plutôt que dans un autre, ni dans un plan déterminé; que le plein & les tourbillons ſont inconciliables avec les mouvemens des Cometes; qu'elles n'ont point de Zodiaque, ainſi que l'avoit penſé un Auteur illuſtre, qui leur attribuoit celui déſigné par les deux vers ſuivans :

> Antinous, Pegaſusque, Andromeda, Taurus, Orion,
> Procyon atque Hydrus, Centaurus, Scorpius, Arcus.

Si donc l'on obſerve que les Planetes & leurs Satellites ſe meuvent dans le même ſens, & à très-peu près dans le même plan, ce phénomene ſingulier tient à des cauſes particulieres qui nous ſont inconnues, mais qui ſont indépendantes du ſyſtême général de l'Univers.

(774) En comparant les orbites des différentes Cometes, on voit qu'elles ſe confondent ſenſiblement avec des Paraboles, dans les points de leurs trajectoires que l'on peut obſerver; ce qui prouve que leurs orbites ſont des Ellipſes très-alongées, & très-approchantes de la Parabole. Ce phénomene paroît ſingulier, lorſqu'on le ſoumet au calcul des probabilités; car il y a une infinité de combinaiſons de vîteſſes qui peuvent donner des Hyperboles. Pour rendre raiſon de ce Phénomene, ne peut-on pas dire que ſi primitivement il y a eu des Cometes qui aient décrit des Hyperboles autour du Soleil, elles ont dû, par cela même, totalement diſparoître de notre ſyſtême Planétaire, pour ſe fixer autour des Soleils qui, par les circonſtances particulieres du mouvement, & leur force attractive plus grande, les auront forcées de circuler autour d'eux dans des Ellipſes.

Voilà ce que l'on ſait de plus certain ſur les orbites des Cometes à l'inſtant où cet Ouvrage s'imprime. Ceux qui voudront avoir de plus grands détails ſur leurs apparitions, pourront conſulter les Ouvrages de Tycho, d'Hévélius, Riccioli, Whiſton, les différens Mémoires des Académies, la Cométographie de M. Struick, & l'Ouvrage que M. Pingré vient de publier en dernier lieu. On peut auſſi conſulter le *Theatrum Cometicum* de Lubiénits. Quoique cet Auteur ait eu uniquement pour but de prouver qu'il n'y avoit point eu de grands déſaſtres ſans Cometes, ni de Cometes ſans grands déſaſtres, il a conſervé la notice des Cometes, de la même maniere que l'Aſtrologie judiciaire a tranſmis les principes de la véritable Aſtronomie.

Il me reſte maintenant à examiner les différentes queſtions que l'on peut ſe propoſer ſur les Cometes. On peut réduire ces queſtions à cinq principales. Quelle eſt la nature des Cometes? Dans quelles trajectoires ſe meuvent-elles? Quel eſt leur nombre? Quelles ſont les Cometes dont on connoît les retours périodiques? Quels effets peuvent-elles produire ſur la Terre que nous habitons? Quelle eſt la nature de leurs queues, de leur atmoſphere? Telles ſont les queſtions que je me propoſe de diſcuter.

ARTICLE II.

De la Nature des Cometes & des trajectoires qu'elles décrivent.

(775) On disputoit encore sur la Nature des Cometes, vers la fin du dernier siecle. Quelques-uns croyoient que les Cometes avoient été créées en même tems que la Terre; qu'elles étoient en dépôt dans les régions les plus éloignées du firmament, & que la Divinité les faisoit paroître toutes les fois qu'elle vouloit donner aux hommes des signes de sa colere. Quelques-autres nioient que les Cometes existassent réellement. C'étoit, suivant eux, de simples illusions optiques, de fausses apparences causées par la réflexion, ou la réfraction de la lumiere. Quelques Philosophes prétendoient, avec Aristote, que les Cometes n'étoient que des météores formés dans la moyenne région de l'air, & qui ne suivoient aucune loi dans leurs mouvemens. D'autres enfin pensoient que les Cometes étoient des Corps Célestes, dont le mouvement devoit être éternel comme celui des autres Planetes, & assujetti comme elles à des loix constantes.

Telle avoit été, parmi les anciens, l'opinion de l'Ecole de Pytagore, d'Apollonius le Mindien, d'Hypocrate de Chio, d'Eschyle, de Diogene, de Favorin, d'Artémidore, de Démocrite & de Séneque. « On » a cru, dit ce Philosophe, que les Cometes n'étoient point des Astres, » parce qu'elles n'ont pas la rondeur des autres Corps Célestes. Ce » défaut de rondeur n'est qu'une illusion; il est uniquement dû à la » lumiere qu'elles répandent.... Elles sont, comme tous les Corps Cé- » lestes, des ouvrages éternels de la Nature. La foudre & les éclairs » brillent & s'éteignent; les Cometes ont leurs routes prescrites qu'elles » parcourent; elles s'éloignent de nous sans cesser d'exister. Leur marche » n'est point vague comme celle des météores, qui sont le jouet des » Vents.... Ne nous étonnons pas que l'on ignore encore la loi du mou- » vement des Cometes, dont les apparitions sont si rares, & qui des- » cendent d'une si énorme distance. Il n'y a pas quinze cents ans que » la Grece a divisé le Ciel en Constellations, & qu'elle connoît le » mouvement des Planetes. Combien de Nations ignorent encore par » quel méchanisme la Lune s'éclipse à nos yeux! Un jour viendra que » la Postérité s'étonnera que nous ayions ignoré des choses si faciles à dé- » couvrir; on déterminera les orbites des Cometes, leur nombre, le » tems de leurs révolutions. N'envions point à nos descendans les dé- » couvertes qu'ils pourront faire; jouissons des vérités que nous con- » noissons ».

Chacune des opinions que je viens d'exposer avoit ses partisans, lorsque la Comete de 1680 vint étonner l'Univers. Newton s'occupoit alors de ses recherches sur le systême général du monde. Il ne vit dans cette Comete, qu'un nouvel Astre soumis aux loix qu'il venoit de découvrir; il

en traça l'orbite, & fit voir qu'elle décrivoit autour du Soleil une ellipse qui se confondoit sensiblement avec une Parabole, dans la partie de la courbe que l'on pouvoit observer. Cette brillante découverte eut le sort de toutes les nouveautés à qui le tems seul imprime le sceau de la démonstration. Elle trouva des contradicteurs, même parmi les Astronomes. Dominique Cassini, qui dès 1664, avoit adopté un systême sur les Cometes, persista à penser que c'étoient des météores qui avoient la Terre pour centre de leurs mouvemens; & Jacques Bernoulli proposa un autre systême, d'après lequel la Comete de 1680 devoit reparoître au mois de Mai 1719.

Pour terminer irrévocablement cette savante dispute, il falloit entreprendre des calculs pénibles. Halley ne fut point rebuté de la longueur de ces calculs; il débrouilla le chaos des anciennes Cometes, & fit voir qu'il n'y en avoit aucune dont les mouvemens ne fussent soumis à la théorie Newtonienne. Il fit plus; parmi cette multitude de Cometes observées assez exactement pour qu'on ait pu appliquer le calcul à la détermination de leurs orbites, il démontra qu'il y en avoit une dont les retours périodiques paroissoient être d'environ 77 ans. Elle avoit paru en 1682; il osa prédire qu'on la reverroit en 1759, & l'événement a justifié sa prédiction.

Il n'est donc plus permis de douter que les Cometes ne soient des Corps Célestes, soumis, ainsi que les autres Planetes, aux loix de la pesanteur universelle, & décrivant autour du Soleil des orbites très-alongées.

(776) Il est impossible de décider d'une maniere irréfragable, si les Cometes sont habitées. Whiston ne croit pas qu'elles soient habitables. Il paroît en effet que les Cometes doivent être sujettes à de grandes vicissitudes de chaud & de froid, de lumiere & de ténebres. La Comete de 1680 éprouva, suivant Newton, lors du passage par le périhélie, une chaleur deux mille fois plus grande que celle d'un fer rouge; & de quels torrens de lumiere le Soleil ne dut-il pas inonder le corps de cette Comete? Le diametre du Soleil vu de la Comete, y paroissoit sous un angle d'environ 73^d, tandis que la même Comete, dans son aphélie, ne voit plus le Soleil que sous un angle de $14''$. Une aussi foible lumiere suffit elle alors pour l'éclairer, & quel froid rigoureux ne doit-elle pas éprouver dans son aphélie? Au reste, je ne prétends pas borner la puissance productrice de la Nature. Tout ce que l'on peut dire, c'est que s'il existe des animaux sur les Cometes, leurs organes sont sans doute fort différens de ceux des animaux terrestres.

ARTICLE III.

Du nombre des Cometes.

(777) Il n'est pas possible de déterminer le nombre des Cometes. Depuis le commencement de notre Ere jusqu'en 1783, M. Pingré ne

compte que 380 Cometes dont les apparitions lui aient paru probables. Il y en a encore, suivant lui, plusieurs autres, dont les apparitions, sans atteindre à un grand degré de probabilité, ne sont cependant pas destituées de fondement. Ajoutez-y les Cometes qui ont paru, mais dont il ne reste aucune mention dans l'Histoire; joignez-y celles qu'on a laissé passer sans les appercevoir, soit à cause de leur petitesse apparente, soit à cause de leur proximité du Soleil, soit à cause de l'éclat de la Lune, soit parce que le mauvais tems n'aura pas permis de les observer, soit enfin parce qu'elles auront été invisibles sur l'horizon de l'Europe; & l'on conviendra sans peine que le nombre des Cometes doit être très-considérable. Il faut cependant convenir que dans ce grand nombre d'apparitions de Cometes, il y en a plusieurs qui ne sont que des retours des mêmes Cometes; ainsi que je l'ai déja remarqué.

On a cru, en dernier lieu, pouvoir fixer le nombre des Cometes à trois cents, d'après le raisonnement suivant. « Si depuis quinze ans l'on » a découvert quinze Cometes, & que la durée moyenne des révolutions » des Cometes soit de trois cents ans, il est probable que le nombre » des Cometes peut être fixé à trois cents ».

On pourroit être tenté de nier la majeure, la mineure & la conséquence de ce syllogisme.

ARTICLE IV.

Du retour des Cometes.

(778) L'Astronomie nous présente deux méthodes pour s'assurer du retour des Cometes. La premiere consiste à calculer rigoureusement les véritables trajectoires des Cometes dans l'hypothese elliptique, pour en conclure le tems des révolutions; la seconde consiste à comparer les élémens de toutes les Cometes que l'on a soumises au calcul, dans l'hypothese parabolique; & de constater par la similitude de ces élémens, si telle Comete observée à une certaine époque, n'est pas identique avec telle autre Comete observée à une certaine autre époque. Chacune de ces méthodes a été employée par les Astronomes; voici le résultat de leurs travaux.

Retours des Cometes conclus par les méthodes géométriques.

(779) M. Euler a appliqué le calcul elliptique à trois Cometes; celle de 1680, celle de 1742 & celle de 1744. D'après ces calculs, la Comete de 1680, à laquelle on a coutume de donner 575 ans de révolution, acheveroit sa route en 170 $\frac{1}{2}$ ans. La Comete de 1742 n'a qu'une période de 42 ans. Quant à la Comete de 1744, son orbite est si alongée, qu'elle ne peut revenir qu'après une suite incalculable de siecles.

Les principes sur lesquels ce savant Géometre s'est fondé, sont sans

doute

doute excellens dans la théorie, mais ils supposent dans les observations, une précision dont elles ne sont pas susceptibles; & les calculs théoriques de M. Euler ne paroissent pas confirmés par les observations; au moins est-il certain que la Comete de 1742 n'a point été observée en 1784.

M. Lexell a depuis appliqué la même méthode, à deux Cometes; celle de 1769 & celle de 1770. Il a conclu qu'en supposant les observations susceptibles d'une minute d'erreur, la Comete de 1769 avoit une révolution au moins de 449 ans, & au plus de 519. Parmi les Cometes qui ont paru dans les siecles précédens, on n'en trouve aucune qui vienne décidément à l'appui des calculs de M. Lexell. Mais la détermination la plus singuliere qui ait été faite en ce genre, est celle qui a eu pour objet la premiere Comete de 1770; sa révolution périodique a été trouvée de cinq ans & demi seulement.

(780) On a fait l'objection suivante contre le résultat de M. Lexell. Si la Comete de 1770 n'a qu'une révolution de cinq ans & demi, elle a dû naturellement être observée plusieurs fois avant l'apparition de 1770; elle auroit dû également être observée depuis cette époque. M. Lexell ne s'est point dissimulé la force de ce raisonnement. Suivant lui, la révolution de la Comete étoit probablement plus longue avant 1770; mais la Comete ayant passé en Mai 1767, fort près de Jupiter, son orbite aura été sensiblement altérée par l'action de cette Planete, & cette altération aura amené la période de cinq ans & demi. Depuis, & en Août 1779, la Comete aura éprouvé dans la sphere d'activité de Jupiter, une nouvelle perturbation qui aura détruit l'effet de la perturbation précédente. Quant au retour de 1776, il aura été invisible, parce que la Comete aura passé par le périhélie en Mars 1776.

Tels sont les résultats de la premiere méthode, relativement aux retours des Cometes, passons aux résultats de la seconde méthode.

Résultats de la seconde méthode, relativement aux retours des Cometes.

(781) La similitude de quelques orbites Cométaires a fait penser assez généralement aux Astronomes, que l'on connoît la révolution de trois de ces Astres; & l'on a sur plusieurs autres des conjectures qui paroissent fondées.

La premiere des trois Cometes dont on croit connoître la révolution, est celle de 1682; la même qui avoit paru en 1456, en 1531 & en 1607, & que l'on a vue depuis en 1759. Il ne peut y avoir aucun doute sur cette Comete; sa période est d'environ 77 ans.

La seconde Comete dont on croit connoître la révolution, est celle de 1661, la même, à ce que l'on pense, que celle de 1532; sa période moyenne seroit, dans cette hypothese, de 128 à 129 ans. Cette Comete n'ayant encore été observée que deux fois, on n'a pas à son égard la

même certitude que par rapport à celle de 1682. Comme elle doit reparoître vers 1789 ou 1790, on saura bientôt à quoi s'en tenir sur le tems de sa révolution.

La troisieme Comete, dont on attend également le retour, est celle de 1556, la même à ce que l'on croit, que celle de 1264; sa révolution seroit d'environ 292 ans, & elle reparoîtroit vers 1848.

On croit aussi connoître, d'après les faits historiques, la révolution de la fameuse Comete de 1680. Elle seroit de 575 ans, quoique Euler, d'après sa théorie, ne lui donne qu'une période de 170 ans. En effet, si l'on remonte dans les siecles passés, par des intervalles d'environ 575 ans, on retrouve des apparitions formidables de Cometes à ces différentes époques. On peut voir ce que nous avons dit à ce sujet dans le §. 721.

Opinion de M. Struick sur les révolutions de plusieurs Cometes.

(782) Struick, dans un ouvrage publié en 1740, a donné de savantes conjectures sur les révolutions de plusieurs Cometes. Il pense, par exemple, que la révolution de la Comete de 1652 est d'environ 138 ans. On l'a déja observée suivant lui, dans ses différens retours, depuis l'an 146 avant l'Ere Chrétienne, jusqu'en 1652; & elle doit reparoître vers l'an 1790. M. Pingré n'est pas de l'avis de cet Auteur. Comme l'époque de la réapparition de la Comete est prochaine, attendons que le tems décide entre ces deux habiles Astronomes.

Struick pensoit également que la révolution de la Comete de 1677 est de 95 ans. Suivant ses calculs, la Comete auroit dû reparoître vers 1772; l'événement a décidé contre son opinion.

En 1740, Struick avoit déterminé la révolution périodique de quinze autres Cometes. Depuis il a reconnu qu'il s'étoit trop avancé, & que ce qu'il avoit donné d'abord comme des résultats certains, ne doit être regardé que comme des conjectures. Voici au surplus en quoi elles consistent.

Suivant cet Astronome, il y a du rapport entre les Cometes de 1538 & de 1337; de 1577 & de 1399; de 1676 & de 1596; de 1665 & de 1066; de 1684 & de 1110; de 1686 & 1512; de 1702 & de 1402; de 1707 & de 1557; de 1739 & la premiere Comete de 1618; entre la seconde Comete de 1618 & une Comete de 1315; entre celle de 1750 & celle de 1672; celle de 1718 & celle de 1299; celle de 1737 & celle de 1539; la seconde Comete de 1743 & celle de 1582; celle de 1744 & celle de 1538.

Nous remarquerons que la plupart des Cometes dont on vient de parler ont été trop mal observées pour que l'on ait pu déterminer leurs orbites; il est donc difficile de prononcer avec certitude sur l'identité de ces Cometes. D'ailleurs M. Pingré, après avoir examiné ces questions avec la critique qui lui est propre, a fait de fortes objections contre les résultats de M. Struick. Il n'y a que l'identité entre la Comete de 1684 &

celle de 1110 qui lui paroiſſe fondée. Telles ſont les connoiſſances que l'on a ſur les retours des Cometes; paſſons aux effets qu'elles peuvent produire ſur la Terre.

ARTICLE V.

Opinions de quelques Philoſophes ſur les effets que peuvent produire les Cometes ſur la Terre.

(783) Dès qu'on n'a pu douter que les Cometes ne fuſſent des corps ſemblables aux Planetes, parcourant en tout ſens les différentes régions de notre ſyſtême planétaire, on a cru que quelques-unes pourroient un jour rencontrer la Terre; que peut-être d'autres l'avoient déja rencontrée, & avoient occaſionné ces bouleverſemens dont on croyoit découvrir les veſtiges. Cette terreur, auſſi ancienne que l'époque la plus reculée des connoiſſances humaines, dont l'origine ſe perd dans la nuit des tems, & dont les peuples paroiſſent avoir été ſaiſis à l'aſpect des Cometes, favoriſoit cette opinion. Ainſi donc les Cometes, après avoir été long-tems des ſignes de la colere céleſte, devinrent, aux yeux de quelques Philoſophes, les inſtrumens dont l'Etre ſuprême ſe ſervoit pour changer la face de l'Univers. C'eſt ainſi que Whiſton prétendit expliquer le Déluge, par l'inondation de la Queue d'une Comete qu'il croit être celle de 1680.

Non-ſeulement l'Auteur dont nous parlons, a tenté d'expliquer ainſi le Déluge; il penſe qu'une Comete, & peut-être la même que celle qui a occaſionné le Déluge, revenant un jour du Soleil, cauſera aux habitans de la Terre tous les malheurs qui leur ſont prédits à la fin du monde, & la *conflagration univerſelle* qui doit conſumer notre Planete.

(784) Si l'on en croit Maupertuis, ces dangers ne ſont pas les ſeuls que nous courons de la part des Cometes. Leurs Queues, en ſe mêlant à notre atmoſphere, peuvent y cauſer des changemens nuiſibles aux Plantes & aux Animaux; leur attraction peut nous obliger à tourner autour d'elles, ou du moins déranger notre orbite, au point d'expoſer la Terre aux plus grandes viciſſitudes; tantôt brûlée dans ſon périhélie, tantôt glacée par le froid des régions les plus éloignées du Soleil. Leur choc peut occaſionner un bouleverſement général ſur notre globe; & leur approche, en élevant les eaux de la Mer, peut occaſionner un nouveau Déluge univerſel.

D'autres Philoſophes ont eu des idées plus conſolantes; Voltaire eſt de ce nombre. Frappés de l'harmonie qui regne dans toutes les parties de l'Univers, ils ont cru trouver dans la bonté de l'Auteur de la Nature, un préſervatif contre ces craintes.

Examen des opinions précédentes.

(785) Avant de répondre aux queſtions que l'on s'eſt propoſées ſur les effets que peuvent produire les Cometes ſur la Terre, il ne ſeroit peut-

être pas inutile d'examiner si ces questions ont dû être agitées ; car s'il étoit démontré, par exemple, qu'il est contre toute probabilité qu'aucune Comete puisse approcher de notre globe à une distance nuisible, pourquoi examiner ce qui auroit lieu dans un cas métaphysique? Pourquoi inspirer aux hommes des terreurs qui n'ont aucun fondement? Au surplus, je ne pourrois répéter sur cette question, que ce que j'ai dit dans les §. 523, 524, 525, 526, 527, de cet Ouvrage, auxquels je renvoie ; & conclure comme dans ces paragraphes, que si dans la rigueur géométrique il n'est pas physiquement démontré qu'aucune Comete ne peut rencontrer la Terre, au moins la probabilité morale de cet événement est presque nulle.

(786) Je ne dirai que peu de mots sur l'opinion de Whiston qui attribue à la Queue de la Comete de 1680, le Déluge universel, & qui pense que la même Comete, en revenant un jour du Soleil, pourra, par son incandescence, occasionner la conflagration qui doit réduire notre Planete en cendres. J'ai déja fait voir (§. 526 & 527), ce que l'on doit penser de l'opinion de Whiston, relativement au Déluge. Quant à la conflagration universelle qui doit réduire notre globe en cendres, lors de la consommation des siecles, certainement si la Comete conserve les élémens qu'on lui connoît, elle ne peut occasionner cette conflagration ; car ce n'est qu'avant son passage par le *périhélie*, que la grande proximité de cet Astre à la Terre a lieu. Après son périhélie, sa plus grande approximation est de neuf millions de lieues ; & quelque incandescence que l'on supppose à la Comete, sa chaleur ne seroit point sensible à cette distance.

(787) Je ne m'étendrai pas davantage sur le danger que nous courrions, si les Queues des Cometes, en se mêlant à notre atmosphere, y causoient des changemens nuisibles aux Plantes & aux Animaux. On doit sentir qu'il est impossible de rien dire de satisfaisant à ce sujet. Contentons-nous d'examiner si les Cometes peuvent nous obliger de tourner autour d'elles, à la maniere des satellites ; ou du moins déranger notre orbite au point d'exposer la Terre aux plus grandes vicissitudes. N'oublions pas au surplus que ces questions sont subordonnées à la condition très-improbable que des Cometes puissent approcher très-près de la Terre.

Sur la premiere de ces deux questions, je ferai voir, dans le Chapitre treizieme, qu'aucune Comete ne peut, ni devenir satellite de la Terre, ni obliger la Terre à circuler autour d'elle. Quant aux dérangemens occasionnés dans notre orbite par la présence d'une Comete, les recherches que je mettrai sous les yeux du Lecteur, & l'application de mes calculs à une Comete dont la masse seroit égale à celle de la Terre, & qui d'ailleurs, sans les perturbations, approcheroit de 13000 lieues de notre globe, ne permettront point de douter que le danger que nous courons à cet égard est absolument nul. Au surplus, de toutes les Cometes connues, celle qui a approché le plus près de la Terre, est constamment celle de 1770. Le phénomene a eu lieu de nos jours le 1er. Juillet 1770, sans qu'il y ait eu la moindre altération dans la Nature. Nous pouvons donc at-

tefter à nos defcendans, que relativement aux Cometes, nous nous fommes trouvés dans la circonftance la plus critique que l'Hiftoire de l'Aftronomie nous ait tranfmife, qu'il ne nous eft arrivé aucun défaftre, & que fuivant toutes les probabilités, ils n'ont abfolument rien à redouter de ces Corps Céleftes.

ARTICLE VI.

De l'atmofphere & des Queues des Cometes.

Chevelure des Cometes.

(788) Le noyau ou la tête des Cometes en eft la partie la plus brillante; on croit avec fondement que c'eft un corps folide, mais affez petit. Cette tête eft quelquefois éclatante; le plus fouvent terne, obfcure & mal terminée. On a même obfervé des variations dans les différens retours d'une même Comete; ces variations ne peuvent être rapportées qu'à la différente conftitution de l'atmofphere de la Comete. Cette atmofphere fe préfente à nos yeux fous la figure d'un brouillard qui l'environne de toutes parts; elle paroît d'autant plus denfe qu'elle eft plus voifine du noyau. On a vu quelquefois des Etoiles au travers de cette *Chevelure*; car c'eft ainfi qu'on nomme l'atmofphere des Cometes. Il paroît que cette atmofphere éprouve des variations analogues à celle de la Terre, & qu'elle eft fouvent ternie par des brouillards & des nuages.

Queues des Cometes.

(789) Outre la Chevelure des Cometes, on a remarqué que la plupart de ces Aftres étoient accompagnés d'une longue trace de lumiere que l'on a appellé Queue. Voici les principaux phénomenes qu'on a obfervé dans les Queues des Cometes depuis qu'on les obferve avec quelque attention.

Quelques Cometes ont été vues fans aucune apparence de Queues, mais feulement avec une Chevelure qui les environnoit; ce font en général celles qui paffent à une très-grande diftance du Soleil dans leur périhélie.

Toutes les Queue des Cometes font oppofées au Soleil; cette direction n'eft cependant pas toujours bien précife; on y a remarqué des déviations affez fenfibles. En obfervant attentivement ces déviations, on a conftamment remarqué que la déviation eft d'autant plus petite que la Queue de la Comete fait un plus petit angle avec le mouvement de la Comete dans fon orbite; que cette même déviation, fur-tout à la naiffance de la Queue, eft d'autant moindre que la Comete approche plus près du Soleil; que la déviation fe fait toujours du côté que quitte la Comete.

Non-feulement la Queue dévie fouvent de la direction oppofée au Soleil, mais on a remarqué de plus qu'alors elle n'étoit pas droite; & qu'elle

se courboit à son extrémité, d'autant plus sensiblement que la déviation étoit plus grande à sa naissance. On a cependant observé que cette courbure étoit nulle, lorsque la Terre se trouvoit dans le plan de l'orbite de la Comete.

Inégalités observées dans les Queues des Cometes.

(790) On a remarqué des inégalités très-sensibles, non-seulement dans les Queues de différentes Cometes, mais même dans celle d'une même Comete; voici les phénomenes que l'on a observés.

On a vu des Cometes sans Queues; ce sont celles qui passent à de très-grandes distances du Soleil; d'autres ont eu des Queues fort petites; d'autres en ont traîné d'extrêmement longues.

Si, comme il n'y a pas lieu d'en douter, la Queue des Cometes est toujours dirigée vers le côté opposé au Soleil, il est évident que la situation de la Comete, par rapport au Soleil, doit beaucoup influer sur la grandeur apparente de sa Queue. Si la Comete est en conjonction ou en opposition avec le Soleil, on ne verra que la largeur de sa Queue; on ne pourra point en estimer la longueur; au contraire, si elle est en quadrature avec le Soleil, la longueur s'offrira à nos regards sous le plus grand angle possible. La Comete de 1769 étoit à 55^d du Soleil, lorsqu'elle fut observée par M. Pingré, avec une Queue de 90^d.

La distance de la Comete à la Terre influe pareillement sur la longueur de la Queue.

(791) On a constamment observé qu'une Comete tendante à son périhélie, ne commence à prendre une Queue que lorsqu'elle approche du Soleil. La belle Comete de 1680 n'avoit point de Queue, 34 jours avant son passage au périhélie. A l'approche du périhélie, la longueur réelle de la Queue augmente de jour en jour, & la Chevelure qui environne la tête semble au contraire diminuer. La Queue parvient à sa plus grande longueur, peu après le passage par le périhélie; elle diminue ensuite par degrés, de maniere cependant qu'à égale distance du périhélie, la Queue est plus longue après le passage qu'auparavant. On a de plus observé que les Cometes dont la distance périhélie excédoit de beaucoup la distance moyenne de la Terre au Soleil, ne prenoient point de Queues; & que les Queues des Cometes étoient d'autant plus belles, tout étant d'ailleurs égal, que la distance périhélie étoit moindre.

Les Queues des Cometes se terminent ordinairement en une pointe presque imperceptible, son éclat s'affoiblissant toujours par dégradation. On a cependant vu la Queue de la Comete de 1744 se terminer en éventail. On a aussi observé quelques Cometes avec plusieurs Queues.

(792) La clarté de quelques Cometes a été assez grande pour que ces Cometes aient été vues en plein jour. Telle a été la Comete qui pa-

rut à la mort de Jules César; telles ont été celle de 1402, celle de 1618, celle de 1744 & quelques autres.

La Queue d'une même Comete ne paroît ni également brillante, ni également longue, à ceux qui l'observent en différentes parties de la Terre. La Queue de la Comete de 1680 n'excéda pas 60^d à Paris; elle fut trouvée de 90^d à Constantinople.

Le 9 Septembre 1769, la Comete de 1769 fut vue à Londres avec une Queue de 43^d; le même jour elle fut observée de 55^d à Paris, de 60^d à l'Île-Bourbon; de 75^d à Ténériffe. La constitution de notre atmosphere contribue donc à l'éclat & à la longueur apparente de la Queue des Cometes.

On remarque dans les Queues des Cometes, non-seulement des inégalités de direction, de largeur, d'éclat, mais encore des mouvemens sensibles, des jets de lumiere semblables à ceux qu'on a coutume d'observer dans les Aurores boréales. « Ceux qui ont observé avec quelque » attention la Comete de 1607, dit Képler, témoigneront que la Queue, » courte d'abord, devint longue en un clin d'œil ». La Queue de la Comete de 1618 paroissoit comme agitée par le Vent; des rayons paroissoient comme s'élancer de la chevelure & y revenir aussitôt. Képler, Wendelin, Snellius remarquerent ces ondulations. Hévelius observa des mouvemens analogues dans la Queue des Cometes de 1652 & de 1661. M. Pingré appperçut les mêmes phénomenes dans la Queue de la Comete de 1769.

Tels sont les phénomenes que présentent les Chevelures & les Queues des Cometes; passons à l'explication de ces phénomenes.

Explication des Phénomenes précédens.

Opinions d'Euler & de Le Mairan.

(793) On a proposé différens systêmes pour expliquer les Phénomenes des Queues des Cometes. Je n'entreprendrai point de les exposer ici. Plusieurs de ces systêmes tiennent à des opinions actuellement abandonnées. Je me contenterai donc de présenter rapidement celles de ces explications qui, par la célébrité de leurs auteurs, ou par la singularité des principes, m'ont paru mériter quelque attention.

Pour expliquer les phénomenes des Queues des Cometes, M. Euler imagina, que tandis que la chaleur du Soleil éleve des vapeurs très-ténues du corps des Cometes, ces vapeurs sont chassées à l'opposite du Soleil par l'impulsion des rayons solaires. Il expliquoit par-là, & la raison pour laquelle les Queues se dirigent toujours à l'opposite du Soleil, & la petite déviation de ces Queues, qui semblent suivre la diagonale du parallélogramme formé par le mouvement de la Comete & par la direction des rayons solaires.

Cette explication rentre beaucoup dans l'explication Newtonienne; elle en differe cependant, ainsi que nous le verrons par la suite, en ce qu'elle admet une impulsion des rayons solaires, sur la matiere des Queues des Cometes.

M. le Mairan substitue à la substance qui s'éleve de la Comete, la matiere Zodiacale, dont la Comete, suivant lui, s'impreigne à l'approche du Soleil. Le reste de l'explication est conforme à celle d'Euler.

Opinion de Newton.

(794) Suivant Newton, la Queue des Cometes n'est autre chose qu'une matiere très-déliée que la chaleur du Soleil met en expansion, & qui gravitant moins sur la Comete que son atmosphere, s'éleve, à-peu-près comme l'on voit sur la Terre la fumée s'élever, non en vertu d'une légéreté absolue, mais parce qu'elle est moins pesante que l'air dans lequel elle nage. Cette matiere, mise en expansion, s'éleve principalement à l'opposite du Soleil, parce que l'atmosphere solaire étant moins dilatée & par conséquent plus dense dans la partie opposée au Soleil que dans la partie tournée vers cet Astre, cette plus grande densité favorise davantage l'élévation des vapeurs. Newton remarque que ce systême est entiérement d'accord avec les observations; car de même que si l'on donne du mouvement au corps fumant, la fumée ne s'élevera plus perpendiculairement à l'horizon, mais prendra une direction moyenne entre la direction perpendiculaire & celle du corps en mouvement, de même la Queue des Cometes n'est pas dirigée précisément à l'opposite du Soleil, mais prend une direction moyenne qui participe du mouvement de la Comete & de l'ascension des vapeurs dans la partie opposée au Soleil.

On pourroit être étonné que l'atmosphere des Cometes puisse fournir assez de matiere pour former des Queues aussi brillantes, aussi étendues, aussi volumineuses que celles qu'on a quelquefois observées aux Cometes, sur-tout à celles qui approchent le plus près du Soleil dans leur périhélie. L'étonnement doit cesser, si l'on fait attention à l'extrême dilatabilité de l'air. Newton a prouvé qu'un globe de l'air que nous respirons, d'un pouce de diametre seulement, peut être dilaté de maniere à remplir une sphere dont le diametre seroit égal au diametre de l'orbite de Saturne. Sans doute un air aussi raréfié seroit peu capable de nous réfléchir les rayons de lumiere; mais il s'en faut beaucoup qu'une aussi grande dilatation soit nécessaire, pour que l'atmosphere des Cometes puisse fournir à la formation & à l'entretien des Queues de ces Astres;

CHAPITRE

CHAPITRE DOUZIEME

De l'état actuel de notre Systême Planétaire, & des différentes recherches que l'on peut se proposer sur cet objet.

ARTICLE PREMIER.

Exposition du sujet.

(795) JE me propose, dans ce Chapitre, de donner un précis de l'état actuel de notre Systême Planétaire, & des différentes recherches que l'on peut se proposer sur cet objet.

Si chacune des Planetes circuloit seule autour du Soleil, cette Planete décriroit, dans un plan immobile, une ellipse immuable autour du Soleil; de sorte que, si l'on rapportoit la position du plan de l'orbite, à un cercle déterminé, par exemple, à l'Ecliptique, l'inclinaison de ce plan sur l'Ecliptique seroit toujours la même, & son intersection avec l'Ecliptique répondroit perpétuellement aux mêmes Etoiles. Mais il en est autrement lorsque l'on considere plusieurs Planetes dont les masses ne sont pas rigoureusement nulles, relativement à celle du Soleil. La théorie des forces centrales & les observations nous apprennent également, que, dans ce cas, les orbites primitives sont altérées; les Planetes décrivent une courbe à double courbure dans l'espace; de maniere que si l'on veut conserver la forme elliptique des orbites & la supposition des mouvemens dans un même plan, il faut alors supposer un petit mouvement dans le plan, & une petite variation dans les élémens.

L'on voit, d'après cet exposé, que les élémens d'une certaine époque ne sont pas rigoureusement les mêmes que ceux d'une autre époque. L'art de construire les Tables astronomiques consiste: 1°. à bien connoître les élémens des Planetes lors d'une certaine époque primitive, origine des mouvemens; 2°. à bien déterminer la loi des variations de ces élémens, dans un intervalle donné.

Tel est le problême que les Géometres se sont proposé relativement aux Planetes. Il faut convenir qne si l'on n'a pas encore atteint le degré de perfection que le tems seul peut donner aux Tables astronomiques, l'on est au moins parvenu à représenter les mouvemens des Planetes avec une exactitude que la multiplicité des élémens & l'incertitude sur les masses perturbatrices, pouvoient à peine laisser espérer. Laissons à la postérité à donner la derniere main à ce grand édifice; qu'il nous suffise d'avoir tracé la route que l'on doit suivre; & si le tems découvre que

les Tables actuelles cessent un jour de représenter les mouvemens célestes, nos descendans nous devront au moins la véritable forme de ces Tables ; & ils n'auront d'autre mérite que d'avoir demêlé des effets prévus, qu'une longue suite de siecles aura rendu sensibles.

L'exposition que je viens de faire des questions que présente notre Systême Planétaire, servira de base à la division de ce Chapitre. J'exposerai d'abord l'état actuel de notre Systême Planétaire ; je donnerai ce que l'on sait de plus certain sur chaque Planete, sur les dimensions de leurs orbites, leurs volumes, leurs masses, leurs densités, leurs diametres, la chute des graves, la longueur du pendule qui bat les secondes à leurs surfaces, & leurs satellites. Je donnerai ensuite la forme des équations d'après lesquelles on pourra dans la suite, perfectionner les Tables, au moyen des observations. Je parlerai enfin d'un petit mouvement que l'on a soupçonné dans l'ensemble de notre Systême ; mais je dois auparavant dire un mot sur les équations dont je ferai usage pour déterminer la chute des graves & la longueur du pendule qui bat les secondes, à la surface de chaque Planete.

Article II.

Equations dont on fera usage pour déterminer les masses & les densités des Planetes, ainsi que la chute des graves, & la longueur du pendule qui bat les secondes à leurs surfaces.

Je dois remettre sous les yeux du Lecteur les équations dont je ferai usage pour déterminer les masses des Planetes, leurs densités respectives, la chute des graves, & la longueur du pendule qui bat les secondes à leurs surfaces. Ces équations sont tirées des §. 423, 424, 425 & 426.

Détermination des masses des Planetes.

(796) Pour déterminer le rapport des masses de deux Planetes, il faut que chacune de ces Planetes ait une autre Planete qui tourne autour d'elle. Soit en effet

m la masse d'une Planete ;
a le demi-grand axe de la trajectoire du Satellite, ou de la Planete qui tourne autour de cette premiere Planete ;
T le tems de la révolution ;
m' la masse d'une autre Planete ;
a' le demi-grand axe de la trajectoire du Satellite qui tourne autour de la seconde Planete ;
T′ le tems de la révolution ;

Il suit du §. 425, que l'on a, pour déterminer le rapport des masses des deux Planetes,

$$(1)\ \frac{m}{m'} = \frac{a^3}{a'^3} \times \frac{T'^2}{T^2}.$$

Il est facile, au moyen de cette équation, de comparer la masse du Soleil à la masse de la Terre, ou à la masse de toute autre Planete qui a un Satellite. En effet, si l'on entend par m la masse du Soleil, & par m' la masse de la Terre, ou de toute autre Planete qui a un Satellite; que l'on entende par $\frac{a}{a'}$ le rapport de l'axe de la trajectoire de la Terre ou de la Planete, à l'axe de la trajectoire du Satellite; par $\frac{T'}{T}$, le rapport du tems de la révolution du Satellite, au tems de la révolution de la Terre ou de la Planete autour du Soleil, l'équation (1) exprimera le rapport des masses.

Prenons pour exemple la Terre & le Soleil. La Terre a la Lune pour Satellite; le rapport de la distance de la Terre au Soleil, à la distance de la Lune à la Terre $= 387,609$; donc $\frac{a}{a'} = 387,609$. La durée de la révolution de la Lune est à la durée de la révolution de la Terre autour du Soleil, comme $39343,2$ à $525969,2$; donc $\frac{T'}{T} = 0,074801$; donc $\frac{m}{m'} = 325833$.

On pourroit également comparer la masse de toute autre Planete qui a un Satellite, à celle du Soleil; ou même comparer directement la masse de cette Planete à celle de la Terre, en entendant par $\frac{a}{a'}$ le rapport des axes des orbites des Satellites, & par $\frac{T'}{T}$ le rapport des tems des révolutions. Ainsi, par exemple, si l'on suppose que le demi-grand axe de la trajectoire d'Herschell $=19,0818$, que cette Planete ait un Satellite dont le rayon de l'orbite soutende un angle d'environ $44'',23$, & dont la révolution s'acheve en $13^{\text{jours}}\ 11^{\text{h}}\ 5'$; on aura $\frac{a}{a'} = 1,5924$; $\frac{T'}{T} = 2,0296$; & par conséquent $\frac{m'}{m} = 16,633$. La masse d'Herschell sera donc égale à $16,633 \times$ masse de la Terre; égale à $0,00005104 \times$ masse du Soleil.

Détermination des densités des Planetes.

(797) Soit

ρ le demi-diametre de la Planete dont m est la masse;
ρ' le demi diametre de la Planete dont m' est la masse;
D la densité de la Planete dont m est la masse;
D' la densité de la Planete dont m' est la masse;

Comme les densités sont en raison directe des masses & en raison inverse des volumes; c'est-à-dire en raison inverse des cubes des demi-diametres des Planetes, l'on a

$$(1)\ \frac{D}{D'} = \frac{m}{m'} \times \frac{\rho'^3}{\rho^3}.$$

Détermination du nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface des Planetes, & de la longueur du pendule qui bat les secondes, à cette même surface.

(798) Soit maintenant

δ le nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface de la Planete dont m est la masse & ρ le demi-diametre ;

δ' le nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface de la Planete dont m' est la masse & ρ' le demi-diametre ;

Il suit du §. 423 que l'on a

$$(1)\ \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\rho'^2}{\rho^2} \times \frac{m}{m'}.$$

C'est au moyen de cette équation que, connoissant le nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface de la Terre, on détermine le nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface d'une Planete quelconque ; en supposant toutefois que l'on connoisse le rapport de la masse de la Planete à celle de la Terre, ainsi que le rapport du demi-diametre de la Planete à celui de la Terre.

C'est par cette raison que quand même l'on connoîtroit parfaitement la masse de la Planete d'Herschell, l'on ne pourra cependant point déterminer le nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface de la Planete pendant la premiere seconde de sa chute, tant que l'on n'aura point mesuré son diametre.

Au reste, on peut déterminer plus directement encore le nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface d'une Planete, pourvu toutefois qu'elle ait un Satellite ; l'on a en effet (§. 423) en conservant les définitions de a, de T & de ρ des §. 796 & 797, & en nommant

$\frac{2\mu}{\nu}$ le rapport de la circonférence du cercle au rayon ;

$$(2)\ \delta = \frac{2\mu^2}{\nu^2} \times \frac{a^2}{\rho^2} \times \frac{a}{T^2}.$$

Dans le facteur $\frac{a}{T^2}$, la quantité a doit être évaluée en pieds, & T doit être évalué en secondes horaires. Quant à $\frac{a}{\rho}$, cette quantité exprime le rapport du rayon de la trajectoire du Satellite, au demi-diametre de la Planete.

Soit enfin

l la longueur du pendule qui bat les secondes à la surface de la Planete ;

L'on a (§. 426)

$$(3)\ l = \frac{\nu^2}{\mu^2} \times 2\delta = 0{,}202642\,\delta.$$

Remarque ſur une méthode pour déterminer les différences entre les années tropiques & les années ſidérales des Planetes.

(799) Nous remarquerons ici, quoique cela ne paroiſſe pas avoir un rapport bien direct à nos recherches, que lorſque l'on connoît la différence entre l'année tropique & l'année ſidérale pour une Planete, il eſt facile d'avoir cette différence pour une autre Planete quelconque. En effet, ces différences ſont comme les quarrés des révolutions. La raiſon en eſt ſimple; pendant le tems, par exemple, que Saturne fait ſa révolution, les équinoxes rétrogradent d'une quantité, qui eſt à la préceſſion annuelle, dans le rapport de la révolution de Saturne à la révolution de la Terre; mais Saturne emploie à parcourir cet eſpace, un tems qui eſt encore dans le même rapport; les différences des années tropiques & des années ſidérales ſont donc comme les quarrés des tems des révolutions.

ARTICLE III.

Notice abrégée de ce que l'on connoît ſur les Planetes.

(800) Notre Syſtême Planétaire eſt actuellement compoſé de ſept Planetes principales & de douze Satellites; je dis actuellement, car peut-être un jour ce nombre ſera-t-il augmenté par la découverte de quelque nouvelle Planete. Les Planetes principales connues à l'époque où cet Ouvrage s'imprime, ſont Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Herſchell. Ces Planetes ont le Soleil pour centre de leurs mouvemens, ou pour parler plus exactement, elles tournent autour du centre commun de gravité de notre Syſtême, centre, qui attendu l'immenſe ſupériorité de la maſſe du Soleil ſur les maſſes réunies des autres Planetes, s'éloigne infiniment peu du centre du Soleil. Des douze Satellites qui compoſent pareillement notre Syſtême, quatre tournent autour de Jupiter, cinq autour de Saturne, deux autour de la Planete d'Herſchell; & la Lune enfin accompagne notre Terre. Entrons dans quelque détail ſur chacune des planetes principales. Je comparerai, dans ces recherches, les volumes, les maſſes, les denſités des différentes Planetes, à celles de la Terre que je nommerai 1; j'évaluerai leurs diſtances en moyenne diſtance de la Terre au Soleil que je ſuppoſerai = 1; je ſuppoſerai pareillement que la parallaxe du Soleil, lors des moyennes diſtances, eſt de 8″,813.

Le Soleil.

(801) Le Soleil eſt le centre des mouvemens de notre Syſtême Planétaire, ou plutôt, ſoumis lui-même à la loi générale qui régit l'Univers, il décrit autour du centre commun de gravité de notre Syſtême, une petite courbe réſultante des actions des différentes Planetes. Son diametre

dépouillé de l'irradiation & obſervé avec de fortes lunettes, eſt de 32′ 32″,3 lors du périgée; de 31′ 27″,3 lors de l'apogée; de 31′ 58″,8, lors des moyennes diſtances; & comme dans la même circonſtance le petit axe de la Terre vu du Soleil eſt de 17″,626, le demi-diametre du Soleil = 108,6 demi-petit axe de la Terre. Son volume = 1290120 volume de la Terre; ſa maſſe = 325833 maſſe de la Terre; ſa denſité = 0,25256 denſité de la Terre. Un corps grave, à la ſurface du Soleil, parcourroit 415,17 pieds, dans la premiere ſeconde de ſa chute; la longueur du pendule qui bat les ſecondes eſt de 84,130 pieds. La Nature du Soleil eſt celle du feu; il éclaire, il échauffe. Il a un mouvement de rotation qui s'acheve en 25 jours 14^h 8′ environ, par rapport aux fixes. On voit preſque toujours des Taches à ſa ſurface; on croit le plus communément, que ce ſont des eſpeces de nuées qui s'élevent du Soleil. Sa diſtance moyenne à la Terre eſt de 23413 demi-petits axes de la Terre. Cette diſtance augmente, lors de l'apogée, dans le rapport de 1952,3 à 1918,8; elle diminue dans le rapport inverſe, lors du périgée. Cet Aſtre a une atmoſphere ſenſible que l'on apperçoit dans les Eclipſes totales de Soleil, ſous la forme d'une couronne lumineuſe qui environne le diſque lunaire. L'exiſtence de cette atmoſphere eſt prouvée d'ailleurs par l'affoibliſſement qu'elle occaſionne dans la lumiere des bords du diſque du Soleil, ainſi que M. Bouguer l'a conſtaté. C'eſt cette atmoſphere qui paroît produire la lumiere Zodiacale.

Mercure.

(802) Mercure eſt la plus petite des Planetes connues; elle eſt d'ailleurs celle qui circule à la plus petite diſtance du Soleil. La durée de ſa révolution par rapport aux fixes, eſt de 87 jours 23^h 15′ 37″; ſa révolution tropique eſt de 87 jours 23^h 14′ 25″,9; ſon mouvement diurne de 4^d 5′ 32″,570376. Le demi grand axe de ſon orbite = 0,3870988; l'excentricité de l'orbite = 0,0796000; le parametre du grand axe = 0,7414426. La longitude de Mercure étoit, ſuivant les nouvelles Tables de M. de la Lande, de 7^s 19^d 5′ 55″, à l'époque du 1er. Janvier 1789. La longitude du nœud aſcendant étoit à la même époque de 1^s 15^d 48′ 51″; le lieu de l'aphélie dans 8^s 14^d 10′ 32″ ſur l'orbite; l'inclinaiſon de l'orbite, de 7^d 0′ 0″. Cette inclinaiſon eſt variable, & augmente d'environ 18″ par ſiecle. Le mouvement apparent du nœud eſt de 43″ par an, ſuivant l'ordre des ſignes; & comme la préceſſion des Equinoxes eſt de 50″,25, le mouvement réel annuel du nœud eſt de 7″,25, rétrograde. Le mouvement de l'aphélie paroît être de 56″ par année; ce mouvement n'eſt qu'en partie réel, puiſqu'une partie eſt due à la préceſſion des équinoxes. L'excentricité de l'orbite n'eſt ſujette qu'à quelques petites altérations inſenſibles dans l'eſpace de pluſieurs ſiecles. Le diametre de Mercure = 0,3889 diametre de la Terre; ſon volume = 0,05881 volume de la Terre; ſa maſſe, ſa denſité, ſa rotation, la chute des graves, la longueur du pendule qui bat les ſecondes à ſa ſurface, ſont inconnus. Il peut y

avoir encore quelque incertitude dans ces déterminations; une longue suite de siecles pourra seule éclaircir les doutes à ce sujet.

Vénus.

(803) Vénus est la plus brillante de toutes les Planetes. Sa lumiere est si vive, dans de certaines positions, qu'on l'apperçoit à la vue simple en plein midi. La durée de sa révolution par rapport aux fixes est de 224 jours $16^h\ 49'\ 12'',7$; sa révolution tropique est de 224 jours $16^h\ 41'\ 32'',4$; son mouvement diurne de $1^d\ 36'\ 7'',806488$. Le demi grand axe de son orbite $= 0,723332$; l'excentricité de l'orbite $= 0,005104$; le parametre du grand axe $= 1,4465928$; l'excentricité de l'orbite diminue, par siecle, de 0,00004388. La longitude moyenne de Vénus étoit, suivant les nouvelles Tables de M. de la Lande, de $6^s\ 9^d\ 14'\ 16''$ à l'époque du 1er. Janvier 1789; la longitude du nœud ascendant étoit, à la même époque, de $2^s\ 14^d\ 46'\ 27''$; le lieu de l'aphélie sur l'orbite étoit dans $10^s\ 8^d\ 20'\ 6''$; l'inclinaison de l'orbite de $3^d\ 23'\ 20''$; cette inclinaison varie d'une maniere insensible dans un siecle. Le mouvement apparent du nœud est de $31''$ par an, suivant l'ordre des signes; & comme la précession des équinoxes est de $50'',25$, le mouvement réel du nœud est de $19'',25$ rétrograde. Le mouvement de l'aphélie paroît être de $49''$ par année, relativement aux points équinoxiaux; & comme la précession des équinoxes est de $50'',25$, le mouvement réel de l'aphélie est de $1'',25$ rétrograde. Le diametre de Vénus $= 0,92965$ petit axe de la Terre; son volume $= 0,80531$ volume de la Terre. Comme cette Planete n'a point de Satellite, l'on n'a pu déterminer, d'une maniere bien certaine, sa masse, sa densité, la chute des graves, & la longueur du pendule qui bat les secondes à sa surface. On croit cependant, d'après son action présumée sur l'orbite terrestre, que sa masse $= 0,781$ masse de la Terre $= 0,0000002397$ masse du Soleil. Sa densité seroit dans cette hypothese égale à 0,62749 densité de la Terre. Un corps grave à la surface de Vénus parcourroit 10,2 pieds pendant la premiere seconde de sa chute; & la longueur du pendule qui bat les secondes seroit de 2,065 pieds. La rotation de Vénus n'est pas parfaitement connue; on soupçonne cependant, d'après les observations de Bianchini, que sa durée est de 24 jours 8^h. Il peut y avoir encore quelque incertitude sur ces déterminations. Une longue suite de siecles pourra seule les éclaircir.

La Terre.

(804) La Terre que nous habitons, cet objet des complaisances de l'Auteur de la Nature, du moins si l'on en croit notre vanité, n'est cependant en effet qu'une des plus petites Planetes de notre Systême. Considérée sous ce point de vue, voici quels sont ses élémens. La durée de sa révolution par rapport aux fixes est de 365 jours $6^h\ 9'\ 11''$; sa révolution

tropique est de 365 jours 5^h 48′ 45″5. Son mouvement diurne est de 0^d 59′ 8″,330458; son mouvement séculaire de 0^s 0^d 46′ 0″ par-delà cent révolutions entieres. Le demi-grand axe de l'orbite terrestre étant 1, l'excentricité de cette orbite=0,0167905; cette excentricité est sujette à une petite diminution de 0,0000465 2 par siecle. Le parametre du grand axe = 1,999944. Suivant M. l'Abbé de Lambre, à l'époque du 1er. Janvier 1789, la longitude moyenne du Soleil étoit de 9^s 10^d 33′ 18″, & par conséquent, la longitude de la Terre vue du Soleil étoit de 3^s 10^d 33′ 18″. La longitude de l'aphélie de la Terre vue du Soleil étoit de $9^s 9^d$ 17′ 38″ à la même époque, & par conséquent l'apogée du Soleil vu de la Terre étoit dans 3^s 9^d 17′ 38″. Le mouvement de l'aphélie paroît être de 1^d 43′ 35″ par siecle, & conséquemment de 1′ 2″,15 par an; mais ce mouvement n'est qu'en partie réel, puisque 50″,25 sont dues à la précession des équinoxes. Son orbite annuelle étoit inclinée sur l'Equateur, de 23^d 28′ 19″ en 1750; cette inclinaison diminue d'environ 50″ par siecle; elle est d'ailleurs sujette à une petite oscillation périodique, dont la période est d'environ 18 ans, la même que celle des nœuds de l'orbite lunaire dont elle dépend, & dont l'étendue est de 18″. L'intersection de l'Equateur & de l'orbite terrestre, ou le premier point d'*Ariès*, rétrograde de 50″,25 par année; cette rétrogradation est presque entiérement due à l'action du Soleil & de la Lune sur l'Equateur terrestre; elle n'est point uniforme; elle est sujette à une petite inégalité dépendante de la période des nœuds de l'orbite lunaire, & dont la plus grande valeur est de 16″,8. Quoique la précession des Equinoxes soit presqu'entiérement due à l'action du Soleil & de la Lune, une petite partie cependant est due à l'action des Planetes; & comme cette petite partie est variable dans les différens siecles, il en résulte que l'année tropique n'est pas constamment d'une égale durée, quoique la durée de l'année sidérale soit constante. Le diametre de la Terre est à celui du Soleil comme 1 à 108,6; son volume est au volume du Soleil comme 1 à 1290120; sa masse est à celle du Soleil comme 1 à 325833; sa densité est à celle du Soleil comme 1 à 0,25256; un corps grave à sa surface parcourt 15,1 pieds pendant la premiere seconde de sa chute; & la longueur du pendule qui bat les secondes sous l'Equateur est de 3,0599 pieds. La Terre tourne sur elle-même en 24 heures. Son petit axe qui répond au pole, est au grand axe qui répond à l'Equateur, dans le rapport de 320 à 321. La figure de ses méridiens est à très-peu près elliptique, mais comme elle est recouverte en grande partie par les eaux de la mer, cette figure n'est pas rigoureusement constante; elle est assujettie, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune, à de petites variations que l'on observe sous le nom de flux & reflux de la mer. La Terre est entourée d'une atmosphere qui s'étend à une assez grande distance, en diminuant de densité à mesure qu'elle s'éleve; cette atmosphere a une force réfractive d'environ 32′ 20″ à l'horizon. Tels sont à peu-près les élémens de la Terre, sur lesquels cependant il peut rester encore quelque légere incertitude. Une longue suite de siecles pourra seule éclaircir ces doutes.

Mars.

Mars.

(805) Mars eſt la plus petite des Planetes ſupérieures; ſa lumiere eſt rougeâtre. Comme elle approche aſſez près de la Terre, lors des oppoſitions, elle paroît alors avec beaucoup d'éclat. Elle diminue enſuite de grandeur & de lumiere, à meſure qu'elle s'éloigne de la Terre. La durée de ſa révolution par rapport aux fixes eſt de 686 jours 23^h 30′ 43″; ſa révolution tropique eſt de 686 jours 22^h 18′ 27″; ſon mouvement diurne de 31′ 26″,656536. Le demi-grand axe de ſon orbite = 1,5236927; l'excentricité de l'orbite = 0,14218; le parametre du grand axe = 3,0208510; la variation ſéculaire de l'excentricité de Mars = 0,00008969 croiſſante. Suivant les nouvelles Tables de M. de la Lande, la longitude moyenne de Mars étoit de 9^f 17^d 22′ 29″ à l'époque du 1er. Janvier 1789; la longitude du nœud aſcendant étoit à la même époque, de 1^f 17^d 56′ 50″; & le lieu de l'aphélie ſur l'orbite dans 5^f 2^d 11′ 47″; l'inclinaiſon de l'orbite de 1^d 51′ 0″. Le mouvement apparent du nœud eſt de 28″ par an, ſuivant l'ordre des ſignes; & comme la préceſſion des équinoxes eſt de 50″,25, le mouvement réel du nœud eſt de 22″,25 rétrograde. Le mouvement de l'aphélie paroît être de 1′ 7″ par année; ce mouvement n'eſt qu'en partie réel, puiſque 50″,25 ſont dues à la préceſſion des équinoxes. La variation ſéculaire de l'inclinaiſon de l'orbite eſt inſenſible. Le diametre de Mars = 0,6333 diametre de la Terre; ſon volume = 0,2540 volume de la Terre. Comme cette Planete n'a point de Satellites, que d'ailleurs ſon action ſur l'orbite terreſtre eſt inſenſible, l'on n'a pu déterminer ſa maſſe, ſa denſité, la chute des graves & la longueur du pendule qui bat les ſecondes à ſa ſurface. On croit que ſa rotation eſt de 24^h 39′.

Jupiter.

(806) Jupiter eſt la plus groſſe, & la plus brillante après Vénus, de toutes les Planetes. La durée de ſa révolution par rapport aux fixes eſt de 4332 jours 14^h 24′ 0″; ſa révolution tropique eſt de 4330 jours 14^h 31′ 2″; ſon mouvement diurne de 4′ 59″,281314. Le demi-grand axe de ſon orbite = 5,2027900. L'excentricité de l'orbite = 0,25013; cette excentricité eſt ſujette à une petite augmentation ſéculaire de 0,0006982; le parametre du grand axe = 10,3816790. Suivant les derniers réſultats de M. de la Place, la longitude moyenne de Jupiter étoit de 0^f 3^d 42′ 29″ à l'époque du 1er. Janvier 1750; la longitude du nœud aſcendant étoit à la même époque, de 3^f 7^d 54′ 22″; le lieu de l'aphélie ſur l'orbite dans 6^f 10^d 21′ 4″; l'inclinaiſon de l'orbite de 1^d 19′ 2″; cette inclinaiſon diminue de 22″,4 par ſiecle. Le mouvement apparent du nœud eſt de 35″,75 par an, ſuivant l'ordre des ſignes; & comme la préceſſion des équinoxes eſt de 50″,25, le mouvement réel du nœud eſt de 14″,50 rétrograde. Le mouvement de l'aphélie paroît être de 56″,7 par année, dont 50″,25 ſont

dues à la préceſſion des équinoxes. Le diametre de Jupiter = 10,761 diametres de la Terre; ſon volume = 1242 volume de la Terre; ſa maſſe = 0,0008706 maſſe du Soleil = 283,68 maſſe de la Terre; ſa denſité = 0,22765 denſité de la Terre. Un corps grave, à la ſurface de Jupiter, parcourroit 36,99 pieds dans la premiere ſeconde de ſa chute; & la longueur du pendule qui bat les ſecondes à ſa ſurface, eſt de 7,4958 pieds. La durée de la rotation de Jupiter eſt de $9^h\ 55'\ 33''$; ſon petit axe qui répond au pole, eſt au grand axe qui répond à l'Equateur, dans le rapport de 15,3 à 16,3. L'on voit à la ſurface de Jupiter des bandes paralleles à ſon Equateur; on croit que ce ſont des nuages qui s'élevent de la Planete. Elle auroit dans ce cas une atmoſphere comme la Terre.

Les élémens elliptiques de l'orbite de Jupiter, que nous venons de mettre ſous les yeux du Lecteur, ſont fort loin de repréſenter les obſervations; car cette Planete eſt ſoumiſe par l'action de Saturne, à de grandes inégalités dont la principale eſt de $20'\ 49'',5$, avec une période d'environ 918 ans. C'eſt cette inégalité, juſqu'à préſent inconnue, qui avoit porté les Aſtronomes à croire que le mouvement de Jupiter s'accéléroit de ſiecle en ſiecle. J'ai parlé de ce phénomene dans le §. 405.

Saturne.

(807) Saturne eſt, après la Planete d'Herſchell, le plus éloigné des Corps Céleſtes à qui nous avons donné le nom de Planetes. Suivant les derniers réſultats de M. de la Place, la durée de ſa révolution par rapport aux fixes, eſt de 10759 jours $2^h\ 23'\ 45''$; ſa révolution tropique eſt de 10746 jours $19^h\ 8'\ 50''$; ſon mouvement diurne de $2'\ 0'',456514$. Le demi-grand axe de ſon orbite = 9,540725; ſon excentricité étoit de 0,053641 à l'époque de 1750; cette excentricité diminue de 0,002547 par ſiecle; le parametre du grand axe = 19,075128. Suivant M. de La Place, la longitude moyenne de Saturne étoit de $7^f\ 21^d\ 20'\ 20''$ à l'époque du 1^er^. Janvier 1750. La longitude du nœud aſcendant de $3^f\ 21^d\ 30'\ 22''$; le lieu de l'aphélie ſur l'orbite dans $8^f\ 28^d\ 9'\ 7''$; l'inclinaiſon de l'orbite de $2^d\ 29'\ 55''$. Cette inclinaiſon diminue de $16''$ par ſiecle. Le mouvement apparent du nœud eſt de $31'',50$ par an, ſuivant l'ordre des ſignes; & comme la préceſſion des équinoxes eſt de $50'',25$, le mouvement réel du nœud eſt de $18'',75$ rétrograde. Le mouvement de l'aphélie paroît être de $1'\ 6''$ par an, dont $50'',25$ ſont dues à la préceſſion des équinoxes. Le diametre de Saturne = 10,1 diametres de la Terre; ſon volume = 10303 volume de la Terre; ſa maſſe = 0,0003503 maſſe du Soleil = 114,14 maſſe de la Terre; ſa denſité = 0,13946 denſité de la Terre. Un corps grave, à la ſurface de Saturne, parcourroit 16,895 pieds dans la premiere ſeconde de ſa chute; la longueur du pendule qui bat les ſecondes à ſa ſurface eſt de 3,4237 pieds. La durée de la rotation de Saturne eſt inconnue.

Les élémens elliptiques de l'orbite de Saturne, que nous venons de mettre ſous les yeux du Lecteur, ſont plus loin encore de repréſenter les

obſervations, que les élémens elliptiques de Jupiter; car Saturne, en vertu de l'action de Jupiter, eſt ſujet à de très-grandes inégalités dont la principale eſt de 48′ 44″, avec une période de 918 ans. Je renvoie le Lecteur aux §. 404, 405 & 406 de cet Ouvrage, dans leſquels ces irrégularités ſont indiquées.

Herſchell.

(808) Le nombre des Planetes principales paroiſſoit fixé à ſix, lorſqu'au mois de Mai 1781, M. Herſchell apperçut un Aſtre dont l'apparence différoit ſenſiblement de celle que préſentent ordinairement les Cometes. Son mouvement, preſque nul en latitude, étoit d'environ 1′ 30″ en longitude par jour. Lorſque cette découverte parvint en France, on chercha à appliquer à l'Aſtre, les méthodes des Cometes; mais ce fut en vain. Les variations que de nouvelles obſervations apportoient ſans ceſſe dans les élémens paraboliques déterminés d'après les anciennes obſervations, firent bientôt ſoupçonner que l'orbite du nouvel Aſtre étoit preſque circulaire. M. de Saron avoit reconnu le premier que l'Aſtre circuloit à une très-grande diſtance de la Terre; on calcula donc les obſervations dans le cercle, & l'on trouva que les élémens de l'orbite, déduits de cette ſuppoſition, ſatisfaiſoient aux obſervations faites en 1781; cet accord ſe ſoutint une grande partie de l'année 1782; mais ſur la fin de cette même année, des obſervations faites avec ſoin commencerent à s'éloigner de l'hypotheſe circulaire, & à indiquer l'ellipticité de l'orbite. Ce fut alors que M. de La Place ayant appliqué ſa méthode aux obſervations de la Planete d'Herſchell, parvint aux réſultats ſuivans. Demi-grand axe de l'orbite = 19,0818; excentricité de l'orbite = 0,907919; parametre du grand axe = 38,2772; longitude moyenne à l'époque du 1er. Janvier 1782, $3^s\ 12^d\ 59'\ 31''$; longitude du nœud aſcendant à la même époque, $2^s\ 13^d\ 1'\ 0''$; lieu de l'aphélie ſur l'orbite $11^s\ 23^d\ 22'\ 59''$; inclinaiſon de l'orbite $0^d\ 46'\ 12''$; durée de la révolution par rapport aux fixes 30445,75 jours; durée de la révolution tropique 30348,25 jours; mouvement diurne 42″,56759. Ces élémens ſont ſuſceptibles de quelques corrections.

Quoique cette Planete ait deux Satellites; comme l'on n'a pu encore meſurer exactement ſon diametre, ſon volume, ſa denſité, la chute des corps & la longueur du pendule qui bat les ſecondes à ſa ſurface, ſont inconnus. La maſſe de la Planete paroît être égale à 16,633 maſſe de la Terre, égale à 0,00005104 maſſe du Soleil (§. 796).

Dès que l'on a reconnu que l'Aſtre découvert par Herſchell étoit une Planete, on a ſoupçonné que cet Aſtre avoit été obſervé comme Etoile. En effet, on ſait que pluſieurs des Etoiles Zodiacales indiquées dans les catalogues, ne ſe retrouvent plus dans le Ciel. M. Bode, Aſtronome de Berlin, remarqua que la neuf cent ſoixante-quatrieme Etoile du Catalogue Zodiacal de Mayer, n'eſt plus dans l'endroit où elle a été obſervée en 1756. Et comme la poſition de l'Etoile coincide avec celle

que devoit avoir la Planete d'Herſchell, lors de l'obſervation de Mayer, M. Bode en conclut que la Planete d'Herſchell avoit réellement été obſervée par Mayer, le 25 Septembre 1756 10^h $21'$ $18''$ tems moyen à Paris. M. de La Place a vérifié que la poſition de l'Etoile déterminée par Mayer, s'éloignoit à peine de quelques ſecondes du lieu de la Planete d'Herſchell conclu de ſes élémens; ce qui établit deux choſes; 1°. que la conjecture de M. Bode étoit fondée; 2°. que les élémens de M. de La Place ſont fort approchés.

Remarque ſur le nombre des Planetes principales.

(809) On demande quelquefois ſi le nombre des Planetes principales de notre Syſtême eſt irrévocablement fixé à ſept; voici la réponſe à cette queſtion. L'on ſe ſeroit trompé évidemment, ſi, avant la découverte de la Planete d'Herſchell, l'on avoit affirmé qu'il n'exiſtoit que ſix planetes principales. Il n'y a pas maintenant plus de certitude que le nombre des Planetes ſoit fixé à ſept, qu'il n'y en avoit autrefois que ce nombre fût fixé à ſix. On peut même ajouter que la diſparition de pluſieurs petites Etoiles qui ne ſe retrouvent plus dans les lieux où elles ont été obſervées, fait ſoupçonner, avec vraiſemblance, l'exiſtence de nouvelles Planetes. L'on doit dire cependant que comme ces Planetes ſont certainement très-petites, qu'elles ont peu de mouvement, qu'elles ſe confondent avec les Etoiles les plus imperceptibles; ce ne ſera probablement qu'au baſard que l'on devra leur découverte.

ARTICLE IV.

Notice abrégée de ce que l'on connoît sur les Satellites.

Satellites de la Planete d'Herſchell.

(810) On croit que la Planete d'Herſchell a deux Satellites. Ces Satellites ont cela de remarquable que leurs orbites ſont preſque perpendiculaires à l'orbite de la Planete; de ſorte que, vus de la Terre, *ils* paroiſſent décrire, du moins quant à préſent, c'eſt-à-dire en 1788, une orbite circulaire autour de la Planete, la Planete parcourant d'ailleurs les derniers degrés de l'Ecreviſſe. Le rayon de l'orbite du Satellite qui paroît le plus proche d'Herſchell, ſoutend dans le ciel un angle d'environ $33'',09$; ſa révolution s'acheve en 8 jours 17^h $1'$ $19''$; le rayon de l'orbite du plus éloigné, ſoutend un angle d'environ $44'',23$; ſa révolution s'acheve en 13 jours 11^h $5'$ $1''$. C'eſt d'après ces données que j'ai calculé la maſſe d'Herſchell (§. 796).

Satellites de Saturne.

(811) Indépendamment de l'anneau de Saturne, dont j'ai donné la

théorie, cette Planete eſt accompagnée de cinq Satellites, dont les diſtances au centre de Saturne, & les tems des révolutions, ſont repréſentés dans la Table ſuivante.

	Tems des révolutions périodiques.	Tems des révolutions ſynodiques.	Diſtances au centre de Saturne.
1er. Satellite.	1j 21h 18′ 26″	1j 21h 18′ 55″	4,893.
2	2 17 44 52	2 17 45 52	6,268.
3	4 12 25 11	4 12 27 53	8,754.
4	15 22 41 23	15 23 4 13	20,295.
5	79 7 49 11	79 21 51 36	59,154.

Ces diſtances ſont évaluées en demi-diametres de Saturne. Si l'on vouloit avoir ces diſtances en valeurs du demi-petit axe de la Terre, il faudroit les multiplier par 10,1 ; ſi l'on vouloit avoir ces diſtances en expreſſion de la moyenne diſtance de la Terre au Soleil, il faudroit multiplier les nombres de la Table par 0,0004313.

Les quatre premiers Satellites ſe meuvent dans le plan de l'anneau; leurs orbites ſont inclinées d'environ 30d ſur l'orbite de Saturne, & de 31d 20′ ſur l'Ecliptique; l'orbite du cinquieme n'eſt inclinée que de 15 à 16 degrés ſur l'Ecliptique. Le premier & le ſecond Satellite ſe voient avec peine avec des lunettes de 40 pieds; le troiſieme eſt un peu plus gros; le quatrieme eſt le plus gros de tous; on le voit avec une lunette de dix pieds; le cinquieme eſt fort petit.

Satellites de Jupiter.

(812) Jupiter a quatre Satellites dont les diſtances au centre de la Planete & les tems des révolutions ſont repréſentés dans la Table ſuivante.

	Tems des révolutions périodiques.	Tems des révolutions ſynodiques.	Diſtances au centre de Jupiter.
1er. Satellite.	1j 18h 27′ 33″	1j 18h 28′ 36″	5,965.
2	3 13 13 42	3 13 17 52	9,494.
3	7 3 42 33	7 3 59 36	15,141.
4	16 16 32 8	16 18 5 7	26,630.

Ces diſtances ſont évaluées en demi-petits axes de Jupiter. Si l'on

vouloit avoir ces diſtances en valeurs du demi-petit axe de la Terre, il faudroit multiplier les nombres de la Table, par 10,761; ſi l'on vouloit avoir ces mêmes diſtances en expreſſion de la moyenne diſtance de la Terre au Soleil, il faudroit multiplier les nombres de la Table par 0,0004596.

Je n'entrerai point dans un grand détail ſur les Satellites de Jupiter; cet objet appartient principalement à l'Aſtronomie-Phyſique. On peut conſulter à cet égard, les Ouvrages de MM. Wargentin, Maraldi, La Grange, Bailli, de La Place; voici au ſurplus un abrégé de ce que l'on ſait de plus précis.

Quoique l'on n'ait pu encore déterminer rigoureuſement les véritables orbites des Satellites, on ne peut douter qu'elles ne ſont point circulaires. D'ailleurs l'action mutuelle des Satellites les uns ſur les autres, & la figure applatie de Jupiter, doivent néceſſairement occaſionner de grandes perturbations dans leurs mouvemens, dans l'inclinaiſon des orbites, dans la poſition des nœuds, ſoit ſur l'orbite de Jupiter, ſoit ſur leurs orbites reſpectives. L'on doit à M. Wargentin d'avoir débrouillé le premier le cahos de cette théorie, & d'avoir, à l'aide ſeule des obſervations, démélé des effets dont les forces centrales ont enſuite rendu la raiſon la plus ſatisfaiſante.

Il réſulte de ſes recherches & de la théorie, que le lieu moyen du nœud du premier Satellite étoit, à l'époque de 1760, dans $10^s\,14^d\,30'$; que le lieu moyen du nœud du ſecond Satellite étoit à la même époque, dans $10^s\,13^d\,45'$; que le lieu moyen du nœud du troiſieme Satellite étoit dans $10^s\,14^d\,24'$; & qu'enfin le lieu moyen du nœud du quatrieme Satellite étoit dans $10^s\,16^d\,39'$.

Le moyen mouvement annuel du nœud du premier Satellite eſt nul, ainſi que la variation de l'inclinaiſon de ſon orbite; cette orbite eſt conſtamment inclinée ſur l'orbite de Jupiter de $3^d\,18'\,38''$. La théorie nous apprend d'ailleurs que cette inclinaiſon eſt exactement la même que celle de l'Equateur de Jupiter ſur ſon orbite.

L'inclinaiſon du ſecond Satellite varie depuis $2^d\,36'\,0''$ juſqu'à $3^d\,31'\,42''$, dans une période d'environ 30 ans. La poſition du nœud de ce Satellite eſt pareillement aſſujettie à une oſcillation dont la période eſt également de 30 ans.

L'inclinaiſon du troiſieme Satellite varie depuis $2^d\,49'\,0''$ juſqu'à $3^d\,11'\,14''$, dans une période d'environ 390 ans; la poſition du nœud de ce Satellite eſt auſſi aſſujettie à une oſcillation dont la période eſt également de 390 ans.

Enfin l'inclinaiſon & la poſition des nœuds du quatrieme Satellite ſont aſſujetties à des oſcillations dont la durée n'eſt pas encore connue. Au reſte, tous ces élémens demandent à être rectifiés par une théorie plus exacte que celle qu'on a donnée juſqu'ici.

Quant aux mouvemens des Satellites dans leurs orbites, on a reconnu

par l'obſervation & par la théorie, que le premier eſt ſoumis à une inégalité dépendante du double de ſa diſtance au ſecond Satellite, & dont l'étendue eſt de 59′ 21″.

Que le ſecond Satellite eſt pareillement aſſujetti à une inégalité dépendante de ſa diſtance au premier Satellite, & dont l'étendue eſt de 2ᵈ 19′ 24″.

Que le troiſieme Satellite eſt aſſujetti à une inégalité dépendante de ſa diſtance au ſecond Satellite, & dont l'étendue eſt de 10′ 4″.

Qu'enfin le quatrieme Satellite a une équation du centre d'environ 54′.

M. de La Place a encore reconnu par la théorie, les propriétés ſuivantes dans les mouvemens des trois premiers Satellites.

En vertu de leurs actions mutuelles, leurs mouvemens ſont ordonnés de maniere que le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troiſieme, eſt exactement égal à trois fois le moyen mouvement du ſecond Satellite.

La longitude moyenne du premier Satellite, plus deux fois celle du troiſieme, moins trois fois celle du ſecond, eſt exactement & conſtamment égale à 180ᵈ.

J'ai donné, dans mon premier Volume, des méthodes pour conclure la poſition des orbites des Satellites, d'après les durées de leurs éclipſes; on peut relire ce que j'ai dit à ce ſujet dans les paragraphes *690* & ſuivans du premier Volume.

La Lune.

(813) La Terre a un Satellite; c'eſt la Lune. Cet Aſtre a long-tems exercé la ſagacité des Aſtronomes. L'irrégularité apparente de ſes mouvemens lui avoit fait donner le nom d'*Aſtre rébele*; mais depuis les ſublimes découvertes de Newton, cet Aſtre rébele eſt devenu une des plus brillantes conquêtes des Géometres, & une des preuves les plus frappantes du principe admirable de la peſanteur univerſelle.

La révolution ſidérale de la Lune eſt de 27 jours 7ʰ 43′ 11″,5069; ſa révolution tropique eſt de 27 jours 7ʰ 43′ 4″,6480; ſa révolution ſynodique de 29 jours 12ʰ 44′ 2″,8921. La moyenne diſtance de la Lune à la Terre eſt, ſuivant M. de la Lande, de 85393 lieues, chacune de 2283 toiſes; l'excentricité moyenne de l'orbite, ſuivant Halley & Clairaut, = 0,05505; la moyenne diſtance étant 1. Suivant Mayer, cette excentricité = 0,05508. Le diametre de la Lune = 0,3141 diametre de la Terre; ſon volume = 0,02036 volume de la Terre. D'après l'influence de la Lune ſur les Marées, l'on croit que ſa maſſe = 0,01399 maſſe de la Terre. Sa denſité ſeroit alors égale à 0,68706 denſité de la Terre. Un corps grave, à la ſurface de la Lune, parcourroit 2,83 pieds pendant la premiere ſeconde de ſa chute; la longueur du pendule qui bat les ſecondes ſeroit de 0,5734 pieds.

Suivant Mayer, la longitude moyenne de la Lune étoit de $10^s 26^d 3' 40''$, à l'époque du 1er. Janvier 1789; la longitude du nœud étoit de $8^s 5^d 58' 22''$; le lieu de l'apogée sur l'orbite, de $10^s 17^d 56' 30''$ Le moyen mouvement du nœud, par rapport aux Equinoxes, est de $19^d 19' 43''$ par an, rétrograde; le moyen mouvement de l'apogée est de $1^s 10^d 39' 50''$ direct. Ces mouvemens sont sujets à différentes oscillations. L'inclinaison moyenne de l'orbite Lunaire est de $5^d 8' 46''$; elle varie depuis $4^d 50' 30''$ jusqu'à $5^d 17' 30''$. Je ne parlerai point de toutes les inégalités de la Lune; ces discussions m'écarteroient de mon objet. Je me contenterai de parler des quatre grandes inégalités qui affectent le mouvement de la Lune; l'Equation de l'orbite; la Variation; l'Evection; l'Equation annuelle.

L'Equation de l'orbite dépend de l'excentricité de l'orbite lunaire; c'est la différence entre le lieu calculé dans l'Ellipse & le lieu moyen calculé dans le cercle. La plus grande valeur moyenne de cette Equation est de $6^d 16' 32''$. Cette premiere inégalité dépend de la forme elliptique de l'orbite lunaire; les trois inégalités suivantes dépendent de l'action du Soleil sur la Lune.

La Variation dépend du double de la distance de la Lune au Soleil; cette équation, suivant Mayer, peut aller jusqu'à $37' 4''$.

L'Evection dépend de la distance de la Lune au Soleil, moins la distance du Soleil à l'apogée de l'orbite lunaire. Selon Mayer, cette équation peut aller jusqu'à $1^d 20' 34''$.

L'Equation annuelle dépend de la distance du Soleil à son apogée. La marche de cet élément est contraire à l'équation du centre du Soleil. Cette équation, suivant Mayer, peut aller jusqu'à $11' 16''$.

Les observations modernes comparées aux anciennes, ont fait connoître dans les mouvemens de la Lune une accélération proportionnelle au tems, & dont on n'avoit pu déterminer la cause par la loi seule de la pesanteur universelle; mais M. de la Place ayant examiné de nouveau ce phénomene, l'a ramené à cette loi générale dont il est une confirmation frappante. Il a fait voir que cette accélération du mouvement de la Lune est due à l'action du Soleil sur ce Satellite, combinée avec la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre. Le mouvement de la Lune s'accélere quand cette excentricité diminue; il se rallentit au contraire, quand cette excentricité vient à croître. Ainsi ces variations successives du mouvement de la Lune sont périodiques comme celles de l'excentricité de l'orbite terrestre. Elles sont très-considérables; mais comme leur période renferme un très-grand nombre de siecles, elles n'ont produit, depuis l'Eclipse la plus ancienne qui nous soit connue, qu'un degré & demi d'altération dans le mouvement de la Lune.

La Lune nous présente toujours le même aspect; son mouvement de rotation autour d'un axe presque perpendiculaire au plan de son orbite, est absolument égal à son mouvement autour de la Terre. Ce phénomene a pour cause la figure alongée de la Lune, dont le grand diametre est

dirigé

dirigé vers la Terre, en vertu de l'action de la Terre sur ce Satellite. C'est cette même action qui, ramenant sans cesse le grand axe de la Lune vers le centre de la Terre, a rendu parfaitement égaux les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, quoiqu'ils aient pu différer dans l'origine.

La différence entre les mouvemens vrais & les mouvemens moyens de la Lune, ainsi que la position du nœud de l'orbite lunaire, occasionnent ce que l'on appelle la libration & la nutation de la Lune. Ces mouvemens deviennent sensibles, par de petites portions du disque lunaire qui tantôt se découvrent & tantôt se dérobent à nos regards, vers les bords du limbe.

La Lune ne paroît point avoir d'atmosphere; la petitesse des réfractions horizontales en est la preuve. Le double de cette réfraction, connue sous le nom d'*inflexion des rayons qui rasent le limbe de la Lune*, est à peine de 3″,5. La lumiere que la Lune nous renvoie ne produit aucune chaleur sensible.

Remarque sur les résultats précédens.

(814) Tel est à-peu-près le résultat des grandes découvertes qui ont été faites depuis un siecle sur le Systême du monde. Je terminerai ce tableau par une remarque intéressante de M. de la Place sur les loix conservatrices de l'Univers. Voici comment s'exprime ce Géometre.

Au milieu de toutes les inégalités auxquelles sont assujettis les Corps qui composent notre Systême, les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ces Corps sont uniformes; leurs distances moyennes au foyer des forces qui les animent, sont constantes, & leurs inégalités séculaires sont périodiques. Ainsi le Systême général ne fait qu'osciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une très-petite quantité. Il jouit, en vertu de sa construction & des loix de la pesanteur, d'une stabilité qui ne peut être détruite que par des causes étrangeres; & nous sommes certains que leur action est insensible, depuis les observations les plus anciennes jusqu'à nos jours. Cette stabilité du Systême du monde est un des phénomenes les plus dignes de l'attention des Philosophes, en ce qu'il démontre qu'il existe dans le Ciel, pour maintenir l'ordre de l'Univers, les mêmes vues que la Nature a si admirablement déployées sur la Terre, pour conserver les individus & perpétuer les especes.

ARTICLE V.

Sur la forme des Equations que l'on peut employer pour perfectionner les Tables des Planetes.

(815) Je me propose, dans cet Article, de présenter quelques réflexions sur la forme des équations que l'on peut employer pour perfectionner les Tables des Planetes.

La théorie des forces centrales nous a appris que, relativement aux Planetes qui composent notre Systême, deux seuls élémens sont immuables ; les grands axes de leurs orbites, & les tems de leurs révolutions par rapport aux fixes. Tous les autres élémens des orbites, leur excentricité, le lieu de l'aphélie, le lieu de la Planete, la longitude du nœud, l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Ecliptique, éprouvent des altérations de la part des actions mutuelles des Planetes les unes sur les autres. Lors donc que l'on a construit des Tables pour une Planete, on peut demander si l'on connoissoit parfaitement les élémens correspondans à l'époque dont on est parti, le lieu de la Planete, la longitude du nœud ascendant, l'inclinaison du plan de l'orbite, l'instant du passage par le périhélie, le moyen mouvement de la Planete, l'excentricité de l'orbite. On peut demander également si l'on connoissoit assez parfaitement la loi des variations de ces élémens dues aux perturbations des Planetes, pour les représenter avec une égale justesse, après un intervalle donné.

Si l'on pouvoit répondre d'une maniere affirmative à ces deux questions, les Tables astronomiques auroient le degré de perfection dont elles sont susceptibles ; mais si la certitude n'est pas aussi grande qu'on pourroit le desirer, l'on doit encore chercher à perfectionner les Tables.

Lorsque l'on compare les lieux observés d'une Planete avec les lieux calculés d'après de bonnes Tables ; j'entends celles où l'on a employé tous les termes indiqués par la théorie ; les différences entre ces lieux peuvent être attribuées à deux causes ; l'inexactitude des élémens correspondans à l'époque dont on est parti ; l'incertitude de la loi de la variation de ces élémens. C'est principalement à démêler ces deux effets que consiste l'art de rectifier les Tables. D'ailleurs les lieux de la Terre influent sur les lieux observés des Planetes ; il faut donc, avant tout, avoir des Tables exactes du Soleil, pour ne point attribuer à la théorie des Planetes, des erreurs qui ne seroient dues qu'à l'inexactitude des Tables Solaires. Examinons d'abord ce qui est relatif aux Tables du Soleil.

Des équations relatives aux Tables du Soleil.

(816) L'orbite terrestre, considérée dans l'espace, est sujette à quelques altérations occasionnées par l'action de Jupiter, de Vénus & de la Lune sur la Terre. En vertu des actions réunies de ces Planetes, l'obliquité de l'Ecliptique diminue d'environ 0″,5 par an ; l'excentricité de l'orbite diminue de 0,00004652 par siecle, ou de 0,0000004652 par année. La précession des Equinoxes est de 50″,25 par an, avec une petite oscillation en plus & en moins, dont la période est de 18 ans. Le mouvement de l'aphélie est de 1′ 2″,15 par an. On connoît les travaux multipliés des Géometres pour déterminer les perturbations des Planetes, & les succès qui les ont couronnés ; de sorte qu'il est vrai de dire que dans l'état actuel de l'Astronomie, la partie des perturbations est finie,

& qu'il reſte uniquement à vérifier les élémens elliptiques ; c'eſt-à-dire, l'excentricité de l'orbite, la longitude exacte de l'aphélie, la longitude de la Planete, pour les inſtans des époques. C'eſt d'après ces principes que j'ai dirigé mes recherches.

De la forme des équations qui ſerviroient à rectifier les Tables du Soleil, ſi les orbites n'étoient point troublées.

(817) Soit

1 le demi-grand axe de l'orbite terreſtre ;

E l'excentricité de cette orbite ;

A la longitude du Soleil vue de la Terre ;

Ω la longitude du périgée du Soleil vue de la Terre ;

t le tems écoulé depuis l'époque des Tables juſqu'à un inſtant quelconque ; je ſuppoſe que ce tems eſt évalué en minutes horaires, & que l'on a pris pour époque le paſſage du Soleil par le périgée.

n le nombre d'années completes écoulées depuis l'époque des mouvemens.

Il ſuit des recherches précédentes, que ſi l'on nomme

ϕ un angle dont le ſinus $= \frac{\text{ſin}(A-\Omega)\sqrt{(1-E^2)}}{1+E\,\text{coſ}(A-\Omega)}$;

T le nombre de minutes horaires écoulées depuis l'époque des mouvemens donné par les Tables ;

L'on a

(1) T $= n \times$ révolutions de la Terre exprimées en minutes de tems $+ \frac{\phi - E\,\text{ſin}\,\phi}{\text{arc } 360^d}$ révolution de la Terre exprimée en minutes de tems.

Si l'on différencie l'équation précédente, & que l'on nomme

$d\Omega$ l'erreur ſur la longitude ſuppoſée de l'apogée, lors de l'époque des Tables ;

dE l'erreur ſur l'excentricité ſuppoſée de l'orbite à la même époque ;

L'on aura

$$dT = \frac{d\phi - E\,d\,\text{ſin}\,\phi - \text{ſin}\,\phi\, dE}{\text{arc } 360^d} \text{ révolution de la Terre.}$$

Mais $\text{ſin}\,\phi = \frac{\text{ſin}(A-\Omega)\sqrt{(1-E^2)}}{1+E\,\text{coſ}(A-\Omega)}$; $\text{coſ}\,\phi = \frac{E+\text{coſ}(A-\Omega)}{1+E\,\text{coſ}(A-\Omega)}$;

$$d\phi - E\,d\,\text{ſin}\,\phi = \frac{(1-E\,\text{coſ}\,\phi)}{\text{coſ}\,\phi}\,d\,\text{ſin}\,\phi = \frac{(1-E^2)\,d\,\text{ſin}\,\phi}{E+\text{coſ}(A-\Omega)}.$$

D'ailleurs

$$d\,\text{ſin}\,\phi = -\frac{E+\text{coſ}(A-\Omega)}{(1+E\,\text{coſ}(A-\Omega))^2\sqrt{(1-E^2)}}((1-E^2)\,d\Omega + \text{ſin}(A-\Omega)\,dE) ;$$

Donc

$$d\phi - E\,d\,\text{ſin}\,\phi = -\frac{(1-E^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+E\,\text{coſ}(A-\Omega))^2}\,d\Omega - \frac{\text{ſin}(A-\Omega)\,(1-E^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+E\,\text{coſ}(A-\Omega))^2}\,dE.$$

Mais $dT = \frac{d\varphi - E\,d\,\text{fin}\,\varphi - \text{fin}\,\varphi\,dE}{\text{arc } 360^d}$. Si l'on réduit cette expreſſion en ſérie, & que l'on néglige les puiſſances de E ſupérieures à la ſeconde, elle deviendra

$$dT = -\frac{\text{révolut. Terre}}{\text{arc } 360^d}\Big((1 - 2E\,\text{coſ}(A-\Omega) - E^2(\tfrac{3}{2} - 3\,\text{coſ}^2(A-\Omega))\Big)d\Omega$$
$$+ (2 - 3\,E\,\text{coſ}(A-\Omega) - E^2(1 - 4\,\text{coſ}^2(A-\Omega)))\,\text{fin}(A-\Omega)\,dE).$$

Si donc l'on nomme

dt le nombre de minutes horaires dont, lors de l'époque, l'inſtant vrai où le Soleil avoit une certaine longitude, a précédé l'inſtant où l'on a ſuppoſé qu'il avoit cette même longitude;

Et que l'on ſuppoſe d'ailleurs

$$\beta = 1 - 2\,E\,\text{coſ}(A-\Omega) - E^2(\tfrac{3}{2} - 3\,\text{coſ}^2(A-\Omega));$$
$$\gamma = (2 - 3\,E\,\text{coſ}(A-\Omega) - E^2(1 - 4\,\text{coſ}^2(A-\Omega)))\,\text{fin}(A-\Omega);$$

l'on aura

$$dT = -\frac{\text{révolution de la Terre}}{\text{arc } 360^d}(\beta\,d\Omega + \gamma\,dE);$$

Mais $dT = t + dt - T$; donc enfin

(1) $(t + dt - T)\,\text{arc } 360^d + \text{révolution de la Terre}\,(\beta\,d\Omega + \gamma\,dE) = 0.$

Telle eſt la forme des équations que l'on pourroit employer pour rectifier les Tables du Soleil, dans le cas où le Soleil n'éprouveroit point de perturbations de la part des Planetes; voici quel en feroit l'uſage.

(818) Je ſuppoſe qu'à un certain inſtant quelconque éloigné de l'époque des mouvemens, d'un nombre t de minutes horaires, l'on ait obſervé une longitude A du Soleil; on auroit calculé par les Tables, la longitude du Soleil pour le même inſtant. Si les Tables euſſent donné la même longitude que celle obſervée, elles euſſent été exactes dans ce point de l'orbite. Mais ſi la longitude eût été différente; au moyen du mouvement horaire, on auroit calculé le tems employé par le Soleil, à parcourir l'excès de la longitude obſervée ſur la longitude des Tables, & l'on auroit eu par-là l'expreſſion de $t - T$. L'on auroit donc eu l'équation particuliere qui eût repréſenté l'erreur des Tables pour ce point de l'orbite. L'on auroit recommencé la même opération pour d'autres points de l'orbite, & l'on auroit eu de nouvelles équations de la forme de l'équation (1). Au moyen de ces différentes équations, l'on auroit déterminé les valeurs de dt, $d\Omega$, dE, c'eſt-à-dire les erreurs des élémens elliptiques de l'orbite. Voyons maintenant quels changemens les perturbations des Planetes apportent aux équations précédentes. Nous remarquerons que l'arc de l'orbite Solaire correſpondant au tems dt, eſt l'erreur du lieu ſuppoſé du Soleil à l'inſtant de l'époque; cette erreur eſt une conſtante qui affecte tous les lieux calculés.

De la forme des Equations qui peuvent fervir à rectifier les Tables du Soleil, en fuppofant les orbites troublées.

(819) Si l'on fuppofe les mouvemens de la Terre troublés par les Planetes, on pourroit croire, au premier coup-d'œil, que les équations qui fervent à rectifier les Tables, devroient avoir une forme différente de celle du §. 817; la réflexion la plus légere va cependant ramener la même forme d'équations.

En effet, fi l'on jette les yeux fur de bonnes Tables Solaires, j'entends celles qui contiennent tous les termes qui completent le lieu du Soleil; on verra facilement que ces Tables ont d'abord de très-grands termes; ce font ceux qui donnent le lieu du Soleil dans l'orbite elliptique. Ces Tables ont de plus une fuite de petits termes qui expriment les perturbations, & qui font reconnoiffables, attendu qu'ils ont pour argumens, des élongations du Soleil à la Lune, à Jupiter, à Vénus. Le vrai lieu du Soleil, d'après les Tables, eft égal au lieu dans l'ellipfe, plus à la fomme des petits termes qui expriment les perturbations; de forte que

Lieu Elliptique du Soleil = vrai lieu du Soleil — fomme des petits termes.

Et fi l'on nomme

A le vrai lieu du Soleil;

δA la fomme des petits termes qui repréfentent les perturbations;

L'on a

(1) Lieu dans l'Ellipfe $= A - \delta A$.

Nous avons déja remarqué que la théorie des perturbations eft actuellement tellement avancée, que la quantité δA eft connue, au moyen des Tables, avec toute l'exactitude que l'on peut defirer.

De plus, fi l'on nomme

Ω la longitude du périgée du Soleil, lors de l'époque des Tables;

E l'excentricité de l'orbite Solaire, à la même époque;

$\delta \Omega$ la variation de la longitude du périgée depuis la même époque; ou plutôt l'excès du mouvement de l'apogée fur la préceffion des Equinoxes, dans l'intervalle écoulé entre l'époque des mouvemens & l'inftant de l'obfervation;

δE la variation de l'excentricité de l'orbite dans le même intervalle;

L'on aura, attendu que la préceffion des Equinoxes affecte également le lieu du périgée du Soleil & la longitude elliptique de cet Aftre,

(2) Longitude elliptique — longitude du périgée pour l'inftant de l'obfervation $= A - \delta A - \Omega - \delta \Omega$.

L'on aura pareillement

(3) Excentricité de l'orbite lors de l'obfervation $= E + \delta E$.

Si donc l'on conserve les définitions de T, t, dt du §. 817; que l'on suppose

$$\beta = 1 - 2(E + \delta E)\cos(A - \delta A - \Omega - \delta\Omega) - (E + \delta E)^2\left(\tfrac{3}{2} - 3\cos^2(A - \delta A - \Omega - \delta\Omega)\right);$$

$$\gamma = (2 - 3(E + \delta E)\cos(A - \delta A - \Omega - \delta\Omega))\sin(A - \delta A - \Omega - \delta\Omega) - (E + \delta E)^2(1 - 4\cos^2(A - \delta A - \Omega - \delta\Omega))\sin(A - \delta A - \Omega - \delta\Omega);$$

Et que l'on nomme

$t - T$ le nombre de minutes horaires employées par le Soleil à parcourir l'excès de la longitude vraie du Soleil sur la longitude donnée par les Tables;

l'on aura pour résoudre la question proposée, dans le cas de l'orbite troublée,

$$(4)\quad (t + dt - T)\ \text{arc}\ 360^d + \text{révolution de la Terre}\ (\beta d\Omega + \gamma\, dE) = 0.$$

De la forme des équations propres à rectifier les orbites des Planetes.

(820) Le Problême relatif à la rectification des orbites, est plus compliqué pour les Planetes que pour le Soleil. En effet, indépendamment de ce que les mouvemens des Planetes dans leurs orbites, se combinent avec les mouvemens de la Terre, ces mouvemens se passent d'ailleurs dans un plan incliné à l'Ecliptique. Il faut donc déterminer deux élémens de plus que pour la Terre; l'inclinaison du plan de l'orbite & la position du nœud pour les différentes époques. Voyons cependant si cette complication est aussi réelle qu'elle le paroît d'abord.

Soit

a le demi-grand axe de l'orbite de la Planete;

E l'excentricité de l'orbite, lors de l'époque des Tables;

Ω le lieu du périhélie de la Planete sur l'orbite, lors de l'époque;

u l'angle du rayon vecteur de la Planete avec la ligne des nœuds, à l'instant de l'observation; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Planete, en partant du nœud ascendant.

t le nombre de minutes horaires écoulées depuis l'époque jusqu'à l'instant de l'observation; je suppose que l'on a pris pour époque, l'instant d'un passage de la Planete par le périhélie;

δu la somme des petits termes qui expriment les perturbations qu'éprouve la Planete; je suppose que les Tables que l'on veut vérifier contiennent ces petits termes, car autrement elles seroient incompletes.

$\delta\Omega$ l'excès du mouvement de l'apogée sur la précession des équinoxes, dans l'intervalle écoulé entre l'époque des mouvemens & l'instant de l'observation;

δE la variation de l'excentricité dans le même intervalle;

n le nombre d'années écoulées dans cet intervalle;

$t - T$ le nombre de minutes horaires employées par la Planete à parcourir l'excès du lieu vrai dans l'orbite sur le lieu donné par les Tables;

dt le nombre de minutes horaires dont, lors de l'époque, l'instant vrai où la Planete avoit un certain lieu dans l'orbite, a précédé l'instant supposé où elle avoit ce lieu.

Si l'on suppose d'ailleurs

$$\beta = 1 - 2\left(\frac{E}{a} + \frac{\delta E}{a}\right)\cos(u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)$$
$$-\left(\frac{E}{a} + \frac{\delta E}{a}\right)\left(\tfrac{3}{2} - 3\cos^2(u + \delta u - \Omega - \delta\Omega)\right);$$

$$\gamma = \left(2 - 3\left(\frac{E}{a} + \frac{\delta E}{a}\right)\cos(u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)\sin(u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)\right)$$
$$-\left(\frac{E}{a} + \frac{\delta E}{a}\right)^2\left(1 - 4\cos^2(u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)\right)\sin(u - \delta u - \Omega - \delta\Omega).$$

On démontrera, par les mêmes raisonnemens que pour la Terre, que l'on résoudra le Problême proposé, au moyen de l'équation suivante,

(1) $(t + dt - T)$ arc 360^d + révolution de la Planete $(\beta\, d\Omega + \gamma\, dE = 0$.

Il ne s'agit que de conclure l'angle u, d'après les observations.

(821) Nous remarquerons ici que, relativement aux différentes Planetes, l'on a

Mercure.

$$\frac{E}{a} = 0{,}20563\,;\ \frac{\delta E}{a} = 0\,;\ \delta\Omega = n \times 5'',75.$$

Vénus.

$$\frac{E}{a} = 0{,}06884\,;\ \frac{\delta E}{a} = -n \times 0{,}0000005931\,;\ \delta\Omega = -n \times 1'',25.$$

La Terre.

$$E = 0{,}0167905\,;\ \delta E = -n \times 0{,}0000004652\,;\ \delta\Omega = n \times 11'',90.$$

Mars.

$$\frac{E}{a} = 0{,}9328\,;\ \frac{\delta E}{a} = n \times 0{,}0000005886;\ \delta\Omega = n \times 16'',75.$$

Jupiter.

$$\frac{E}{a} = 0{,}048088\,;\ \frac{\delta E}{a} = n \times 0{,}000001342\,;\ \delta\Omega = n \times 6'',50.$$

Saturne.

$$\frac{E}{a} = 0{,}056223\,;\ \frac{\delta E}{a} = -n \times 0{,}000002670;\ \delta\Omega = n \times 15'',75.$$

Quant à la Planete d'Herschell, sa théorie n'est pas assez connue pour que l'on ait pu déterminer dE & $d\Omega$;

(822) Il nous reste maintenant à déterminer l'angle u pour chaque observation. Pour y parvenir, on se rappellera que si l'on nomme

r le rayon vecteur de la Terre;

R le rayon vecteur de la Planete;

I l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Ecliptique;

A la longitude du Soleil vue de la Terre;

B la longitude géocentrique de la Planete ;

ζ la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Planete ;

L'on a (§. 448)

(1) $(r\cos(A-\zeta)+R\cos u)\tang(B-\zeta)-r\sin(A-\zeta)-R\sin u\cos I=0.$

L'on conclura l'angle u au moyen de l'équation (1), bien entendu que dans cette équation, l'on évaluera la distance R de la Planete au Soleil, au moyen des Tables. On aura donc la valeur de u conclue des observations. On comparera cette valeur, au lieu dans l'orbite déduit des Tables, dont on soustraira la longitude du nœud ascendant, & l'on aura autant d'équations que l'on voudra de la forme de l'équation (1) du §. 820. Au moyen de ces équations, on déterminera les erreurs des élémens elliptiques.

Remarque sur les solutions précédentes, & sur la maniere de déterminer les inclinaisons des orbites des Planetes, ainsi que la position de leurs nœuds.

(823) Les équations précédentes supposent que l'on connoît la position exacte du nœud de la Planete, & l'inclinaison de son orbite sur l'Ecliptique. La petitesse de l'inclinaison des orbites Planétaires sur l'Écliptique, la grande précision avec laquelle on connoît la position des nœuds, les recherches théoriques sur la variation de ces élémens, m'ont paru légitimer cette supposition. J'ai donc pensé qu'au lieu de compliquer la vérification des orbites, des difficultés relatives aux inclinaisons & à la position des nœuds, il étoit préférable d'emprunter des Tables même ; j'entends celles qui sont construites d'après les véritables principes, le lieu du nœud & l'inclinaison de l'orbite pour chaque observation.

Au reste, nous avons vu, à l'Article des passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, avec quelle précision ces passages peuvent déterminer & le lieu du nœud & les mouvemens séculaires des nœuds, par rapport à ces Planetes. L'on peut donc affirmer, relativement aux Planetes inférieures, que si la position des nœuds n'est pas encore rigoureusement connue, cette position ne peut manquer de l'être par la suite, avec la derniere précision.

(824) Quant aux Planetes supérieures, il seroit à desirer que les oppositions de ces Planetes concourussent avec les passages par les nœuds; l'on auroit par-là pour ces Planetes, une méthode analogue à celle que l'on emploie pour les Planetes inférieures, lors de leurs passages sur le disque du Soleil. Au défaut de cette méthode, supposons que l'on observe la Planete dans son nœud. A cause de $\sin u=0$ & de $\cos u=\pm 1$, l'équation (1) du paragraphe précédent deviendra

$$(1)\quad (r\cos(A-\zeta)\pm R)\tang(B-\zeta)-r\sin(A-\zeta)=0.$$

L'on voit donc que l'on conclura facilement la valeur de ζ; & que dans cette solution on ne sera obligé d'emprunter des Tables que la distance R

de la Planete au Soleil. En effet si dans l'équation (1) l'on substitue à Tang (B — ζ) sa valeur $\frac{\sin(B-\zeta)}{\cos(B-\zeta)}$, cette équation deviendra

$$r\cos(A-\zeta)\sin(B-\zeta) - r\sin(A-\zeta)\cos(B-\zeta) \pm R\sin(B-\zeta) = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\quad r\sin(B-A) \pm R\sin(B-\zeta) = 0.$$

C'est par cette méthode que l'on a déterminé la position des nœuds; l'on peut apprécier son exactitude.

(825) Lorsque l'on connoît la position du nœud, la méthode la plus directe pour déterminer l'inclinaison de l'orbite est d'observer la latitude de la Planete, lorsque le Soleil est dans le nœud de la Planete; en effet l'on a en général (§. 548 équation (10))

$$(1)\quad (R\sin u\cos I + r\sin(A-\zeta))\tang L - R\sin u\sin I\sin(B-\zeta) = 0.$$

Si dans cette équation l'on suppose $\sin(A-\zeta) = 0$, elle deviendra

$$(2)\quad \text{Tang } L - \tang I \sin(B-\zeta) = 0;$$

d'où l'on voit avec quelle facilité on détermine l'inclinaison de l'orbite. Comme ces méthodes ont été employées par les plus célebres Astronomes, qu'ils ont apporté dans ces observations les attentions les plus scrupuleuses, j'ai dû penser que les inclinaisons des orbites & la position des nœuds des Planetes étoient connues avec toute l'exactitude desirable.

Remarques sur ce que l'on doit entendre par l'époque des Tables; & sur les quantités δA, δu des équations précédentes.

(826) Pour employer les formules précédentes, il faut avoir une idée nette de ce que l'on doit entendre par l'époque des Tables. Cette époque est arbitraire, pourvu toutefois que l'on parte d'un passage du Soleil ou de la Planete, par la basse apside; mais comme cette explication ne présente pas encore une idée bien précise, prenons un exemple particulier.

Supposons que l'on veuille vérifier les Tables Solaires de Mayer ou de l'Abbé de la Caille. On calculera arbitrairement un passage du Soleil par le périgée, pour une année quelconque, en n'ayant égard qu'aux termes qui appartiennent à l'Ellipse; c'est-à-dire, en négligeant tous les termes qui expriment les perturbations; on aura par-là le passage du Soleil par le périgée, pour une année particuliere, & ce passage sera le passage du Soleil par le périgée, dans l'orbite purement elliptique. Cet instant ainsi déterminé est ce que j'ai appellé l'époque des Tables. Le lieu du Soleil calculé en faisant abstraction des perturbations, sera le lieu moyen des Tables pour cette époque. L'on calculera pour la même époque, la longitude du périgée & l'excentricité de l'orbite, en faisant toujours abstraction des perturbations. Ces résultats détermineront les valeurs de E & de Ω qui entrent dans les formules; & c'est à partir de cette époque que l'on doit évaluer les quantités dE, $d\Omega$.

On ne doit point oublier auſſi que δA & δu ſont la ſomme de tous les petits termes réſultans des perturbations qui affectent la longitude du Soleil ou le lieu des Planetes. Ces quantités doivent les contenir tous. Ainſi, par exemple, M. de la Place ayant démontré en dernier lieu, que les lieux de Saturne & de Jupiter ſont affectés d'une petite inégalité périodique dont on n'avoit point tenu compte juſqu'à préſent; il faut avoir égard à cette petite inégalité; ſans quoi on courroit riſque, ainſi que cela eſt arrivé, d'attribuer à des inégalités dans le mouvement moyen, ce qui véritablement ne doit être attribué qu'à cette inégalité périodique. Et comme une ſemblable inégalité affecte les mouvemens des autres Planetes d'une maniere à la vérité moins ſenſible, il conviendra de faire entrer dans les Tables, le calcul de ces inégalités; autrement elles ſeront incompletes, & il ſeroit inutile de chercher à rectifier les mouvemens elliptiques. Au reſte, tous ces calculs ſont du reſſort de l'Aſtronomie-Phyſique.

Il y a cependant une petite quantité que les obſervations ſeules peuvent donner, & qui eſt contenue dans l'expreſſion de δA & δu; c'eſt une quantité proportionnelle au tems que je déſignerai par $n\delta'$, & qui a ſa ſource dans l'inexactitude ſur la connoiſſance préciſe des révolutions par rapport aux fixes. On aura égard à cette quantité, en ſubſtituant dans les formules précédentes,

$\sin(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)-n\delta'\cos(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)$ à $\sin(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)$,

$\cos(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)+n\delta'\sin(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)$ à $\cos(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)$,

$\sin(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)-n\delta'\cos(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)$ à $\sin(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)$,

$\cos(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)+n\delta'\sin(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)$ à $\cos(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)$,

$\cos^2(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)+n\delta'\sin 2(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)$ à $\cos^2(A-\delta A-\Omega-\delta\Omega)$,

$\cos^2(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)+n\delta'\sin 2(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)$ à $\cos^2(u-\delta u-\Omega-\delta\Omega)$.

Cette remarque pourroit avoir ſon application, s'il étoit queſtion de former des Tables de la Planete d'Herſchell.

Remarques ſur la vérification des Tables de la Lune.

(827) Si les inégalités de l'orbite lunaire dépendantes des perturbations, ne s'élevoient qu'à un petit nombre de ſecondes comme dans le cas des Planetes, les méthodes précédentes pourroient s'employer ſans ſcrupule, pour vérifier les Tables de la Lune. Mais ſans parler des autres inégalités, l'on a vu que la Variation peut aller juſqu'à 37′ 4″; que l'Évection peut aller juſqu'à 1ᵈ 20′ 34″; que l'Équation annuelle peut aller juſqu'à 11′ 36″. Je ne penſerois donc pas que l'on doive appliquer la théorie précédente à la Lune; je croirois au contraire que relativement à cet Aſtre, le ſeul parti qu'il y a à prendre pour vérifier les Tables, eſt de faire uſage de la formule même qui a ſervi à les conſtruire; de vérifier les coefficiens de chacun des termes; de déduire, s'il eſt poſſible, la véritable valeur de ces coefficiens, de la comparaiſon des lieux

calculés avec les lieux obſervés. Au reſte, c'eſt le parti que l'on a pris pour donner à ces Tables le degré de perfection dont elles ſont ſuſceptibles ; & il ſera peut-être difficile de rien ajouter aux travaux qui ont été exécutés à ce ſujet.

ARTICLE VI.

Remarques ſur une nouvelle forme que l'on peut donner aux équations qui ſervent à déterminer les orbites des Cometes.

(828) Je ne puis paſſer ſous ſilence les remarques ſuivantes ſur les équations qui ſervent à déterminer les orbites des Cometes ; & ſur une forme plus applicable au calcul, que l'on peut donner à ces équations, pour les cas où on les emploie le plus ordinairement.

Si l'on conſerve les définitions de r', r'', r''', R', R'', R''', Δ', Δ'', Δ''', B', B'', B''', L', L'', L''', t, F, Z des §. 592, 593 & 594 ; que l'on ſubſtitue $\frac{R'+R'''}{2}$ à R'', & que l'on ſuppoſe,

$$b = r''^3 (\sin L'' \cos L''' \sin (B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \sin (B'' - A''))$$
$$- 2 \times 0{,}01680 \left(\frac{R'+R'''}{2}\right)^3 \sin Z (\sin L'' \cos L''' \cos (B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \cos (B'' - A''));$$
$$c = r''^3 (\sin L' \cos L'' \sin (B'' - A'') - \sin L'' \cos L' \sin (B' - A''))$$
$$- 2 \times 0{,}01680 \left(\frac{R'+R'''}{2}\right)^3 \sin Z (\sin L' \cos L'' \cos (B'' - A'') - \sin L'' \cos L' \cos (B' - A''));$$
$$M = 1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{b} (\cos L' \cos L''' \cos (B''' - B') + \sin L' \sin L''');$$
$$N = \cos L' (r''' \cos (B' - A''') - r' \cos (B' - A'))$$
$$+ \frac{c}{b} \cos L''' (r' \cos (B''' - A') - r''' \cos (B''' - A'''));$$
$$Q = r'^2 + r'''^2 - 2 r' r''' \cos (A''' - A') - \text{corde}^2;$$

Nous avons vu (§. 635) que l'on a

$$(1)\ \Delta'^2 + \frac{2N}{M} \Delta' + \frac{Q}{M} = 0;$$
$$(2)\ \Delta''' - \frac{c}{b} \Delta' = 0.$$

L'on a d'ailleurs

$$(3)\ R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2 \Delta' r' \cos L' \cos (B' - A'))};$$
$$(4)\ R' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2 \Delta''' r''' \cos L''' \cos (B''' - A'''))}.$$

Expreſſions de b & de c.

(829) Les cas qui ſe préſentent le plus ordinairement, ſur-tout d'après la condition de ne conſidérer que des intervalles de tems aſſez courts, ſont ceux où les angles L'''— L', L''—L', L'''— L'', A'''— A', B'''— B', &c. ſont fort petits. Alors une des difficultés du Problême conſiſte à évaluer

exactement les quantités b, c, M, N, Q. Voyons si dans cette hypothese l'on ne peut point donner aux expressions de b, c, M, N, Q, une forme plus commode que celle du §. précédent, bien entendu que l'on pourra toujours avoir recours aux expressions de ce paragraphe, si l'on croit ces expressions préférables.

Prenons d'abord l'expression de b; nous avons vu que cette quantité avoit pour expression

$$b = r''^3 \left(\sin L'' \cos L''' \sin (B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \sin (B'' - A'')\right)$$
$$- 2 \times 0{,}01680 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3 \sin Z \left(\sin L'' \cos L''' \cos (B''' - A'') - \sin L''' \cos L'' \cos (B'' - A'')\right);$$

Soit

α un angle tel que $\tan \alpha = \frac{\tan L'''}{\tan L''} \times \frac{\sin (B'' - A'')}{\sin (B''' - A'')}$;

α' un angle tel que $\tan \alpha' = \frac{\tan L'''}{\tan L''} \times \frac{\cos (B'' - A'')}{\cos (B''' - A'')}$;

L'on voit tout de suite que $\sin (B''' - A'') = \frac{\tan L'''}{\tan L''} \times \frac{\sin (B'' - A'')}{\tan \alpha}$; $\cos (B''' - A'') = \frac{\tan L'''}{\tan L''} \times \frac{\cos (B'' - A'')}{\tan \alpha'}$; & l'expression de b devient

$$b = r''^3 \sin L''' \cos L'' \sin (B'' - A'') \left(\frac{1}{\tan \alpha} - 1\right)$$
$$- 2 \times 0{,}01680 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3 \sin Z \sin L''' \cos L'' \cos (B'' - A'') \left(\frac{1}{\tan \alpha'} - 1\right).$$

Mais $\frac{1}{\tan \alpha} - 1 = \frac{\sqrt{2} \sin (45^d - \alpha)}{\sin \alpha}$; $\frac{1}{\tan \alpha'} - 1 = \frac{\sqrt{2} \sin (45^d - \alpha')}{\sin \alpha'}$; donc, attendu que $\sqrt{2} = \frac{1}{\sin 45^d}$,

$$(1)\ b = \frac{\sin L''' \cos L''}{\sin 45^d} \left(\frac{r''^3 \sin (B'' - A'') \sqrt{(45^d - \alpha)}}{\sin \alpha} - \frac{2 \times 0{,}01680 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3 \sin Z \cos (B'' - A'') \sin (45^d - \alpha')}{\sin \alpha'}\right).$$

Soit pareillement

β un angle tel que $\text{Tang}\, \beta = \frac{\tan L''}{\tan L'} \times \frac{\sin (B' - A'')}{\sin (B'' - A'')}$;

β' un angle tel que $\text{Tang}\, \beta' = \frac{\tan L''}{\tan L'} \times \frac{\cos (B' - A'')}{\cos (B'' - A'')}$;

L'on aura

$$(2)\ c = \frac{\sin L'' \cos L'}{\sin 45^d} \left(\frac{r''^3 \sin (B' - A'') \sqrt{(45^d - \beta)}}{\sin \beta} - \frac{2 \times 0{,}01680 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3 \sin Z \cos (B' - A'') \sin (45^d - \beta')}{\sin \beta'}\right).$$

Expreſſions de M, N, Q.

(830) Puiſque $\cos(B''' - B') = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(B''' - B')$, la valeur de M aura la forme ſuivante

$$M = 1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{b}(\cos L' \cos L'''(1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(B''' - B')) + \sin L' \sin L''')$$
$$= 1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c}{b}(\cos(L' - L''') - 2\cos L' \cos L''' \sin^2\tfrac{1}{2}(B''' - B')).$$

Mais $\cos(L' - L''') = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(L' - L''')$; donc enfin

$$(1)\quad M = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2 + \frac{4c}{b}(\sin^2\tfrac{1}{2}(L' - L''') + \cos L' \cos L''' \sin^2\tfrac{1}{2}(B''' - B')).$$

Soit

ϵ un angle tel que $\tang \epsilon = \frac{r' \cos(B' - A')}{r''' \cos(B' - A''')}$;

ϵ' un angle tel que $\tang \epsilon' = \frac{r''' \cos(B''' - A''')}{r' \cos(B''' - A')}$;

L'on aura facilement l'expreſſion ſuivante de N,

$$(2)\quad N = \frac{r''' \cos L' \cos(B' - A''') \sin(45^d - \epsilon)}{\cos \epsilon \sin 45^d}$$
$$+ \frac{c}{b} \times \frac{r' \cos L''' \cos(B''' - A') \sin(45^d - \epsilon')}{\cos \epsilon' \sin 45^d}.$$

Enfin puiſque $\cos(A''' - A') = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(A''' - A')$, la valeur de Q pourra avoir la forme ſuivante,

$$(3)\quad Q = (r' - r''')^2 + 4r'r''' \sin^2\tfrac{1}{2}(A''' - A') - \text{corde}^2.$$

Il ne s'agit maintenant que d'évaluer la corde.

Expreſſion de la corde dans la Parabole.

(831) Nous avons précédemment ſubſtitué à corde², l'expreſſion ſuivante, $\text{corde}^2 = \frac{16Ft^2}{R' + R'''}$; mais nous n'avons point laiſſé ignorer que, quoique cette expreſſion, tirée de la théorie des forces centrales, ſoit ſuffiſamment exacte dans les cas que nous conſidérons, elle eſt cependant, dans la rigueur géométrique, affectée de quelque inexactitude que nous avons indiquée (§. 446). Voici une nouvelle expreſſion de cette quantité.

L'on a vu (§. 689) que ſi l'on nomme

$2t$ le tems écoulé entre deux obſervations quelconques; je ſuppoſe ce tems évalué en minutes horaires;

R', R''' les rayons qui terminent l'arc de la Parabole;

c la corde correſpondante de la Parabole;

L'on a rigoureuſement, & pour tous les cas,

$$(1)\quad 2t = \frac{1}{8\sqrt{2}} \times 109{,}6153 \times 1440'((R' + R''' + c)^{\frac{3}{2}} - (R' + R''' - c)^{\frac{3}{2}}).$$

Si l'on réduit en série chacune des quantités $(R' + R''' + c)^{\frac{3}{2}}$, $(R' + R''' - c)^{\frac{3}{2}}$, l'on aura, en négligeant seulement les puissances de c supérieures à la quatrieme;

$$(2)\ 2t = 41855',1\,(R'+R''')^{\frac{1}{2}}\,c - 1743',93\,\frac{c^3}{(R'+R''')^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on s'arrête au premier terme de cette série, l'on aura

$$2t = 41855',1\,(R'+R''')^{\frac{1}{2}}\,c.$$

D'où l'on conclura

$$(3)\ c = \frac{0{,}0000477837 \times t}{(R'+R''')^{\frac{1}{2}}}; \qquad (4)\ c^2 = \frac{0{,}00000000228328 \times t^2}{R'+R'''}.$$

Et l'expression de Q deviendra

$$(5)\ Q = (r' - r''')^2 + 4r'r'''\sin^2\tfrac{1}{2}(A''' - A') - \frac{0{,}00000000228328 \times t^2}{R'+R'''}.$$

C'est cette expression que nous avons employée dans le §. 635.

(832) Si l'on veut avoir une expression plus approchée de c & de Q; l'on mettra l'équation (2) du §. précédent sous la forme suivante,

$$(1)\ c = \frac{0{,}0000477837 \times t}{(R'+R''')^{\frac{1}{2}}} + \frac{0{,}0416667 \times c^3}{(R'+R''')^2}.$$

Dans cette équation, à c^3 l'on substituera sa valeur tirée de l'équation (3) du paragraphe précédent, & l'expression de c deviendra

$$(2)\ c = \left(0{,}0000477837 + \frac{0{,}0000000000000004546 \times t^2}{(R'+R''')^3}\right)\frac{t}{(R'+R''')^{\frac{1}{2}}};$$

D'où l'on conclura

$$(3)\ c^2 = \left(0{,}00000000228328 + \frac{0{,}000000000000000000043445 \times t^2}{(R'+R''')^3}\right)\frac{t^2}{R'+R'''},$$

$$(4)\ Q = (r' - r''')^2 - 4r'r'''\sin^2\tfrac{1}{2}(A''' - A')$$
$$-\left(0{,}00000000228328 + \frac{0{,}000000000000000000043445 \times t^2}{(R'+R''')^3}\right)\frac{t^2}{R'+R'''}.$$

Pour faciliter l'usage des équations précédentes, nous remarquerons que

$$\text{Log}\begin{cases} 41855',1 = 4\cdot6217500; \\ 1743,97 = 3\cdot2415388; \\ 0{,}0000477837 = 5\cdot6792800; \\ 0{,}00000000228328 = 1\cdot3585600; \\ 0{,}0000000000000004546 = 5\cdot6576288; \\ 0{,}000000000000000000043445 = 1\cdot6379388. \\ 0{,}0000000057082 = 0\cdot7565000. \end{cases}$$

L'on pourroit avoir une expression encore plus approchée de la corde,

dans la Parabole; en effet, si l'on développe de plus en plus l'équation (1) du §. 831, elle deviendra

$$(5)\ 2t = 41855',1\ (R'+R''')^{\frac{1}{2}} c - 1743',93 \frac{c^3}{(R'+R''')^{\frac{3}{2}}} - 326',994 \frac{c^5}{(R'+R''')^{\frac{7}{2}}} - 122',623 \frac{c^3}{(R'+R''')^{\frac{11}{2}}};$$

D'où l'on conclura

$$(6)\ c = \frac{0,0000477837 \times t}{(R'+R''')^{\frac{1}{2}}} + \frac{0,04166667 \times c^3}{(R'+R''')^2} + \frac{0,0078125\ c^5}{(R'+R''')^4} + \frac{0,0029287 \times c^7}{(R'+R''')^6}.$$

Si dans cette derniere équation l'on élimine c^3, c^5, c^7, au moyen de l'équation (3) du §. 831, l'on aura une valeur très-approchée de c, qui ne dépendra que du tems & des rayons vecteurs extrêmes R', R'''.

Expression de la corde dans l'Ellipse.

(833) Les expressions de c & de Q que nous venons de donner conviennent à la Parabole. Mais si la Comete décrivoit une trajectoire elliptique dont l'arc ne pût se confondre avec un arc de Parabole, les expressions précédentes ne seroient plus suffisamment exactes; voici dans ce cas une méthode pour évaluer la corde.

Soit

a le demi-grand axe de l'orbite;
E l'excentricité;
P le parametre;
1 la moyenne distance du Soleil à la Terre;
R', R''' les rayons vecteurs qui terminent un arc;
M, m les masses du Soleil & de la Comete;

Si dans l'équation (6) du §. 412, l'on substitue à aP, sa valeur $2(a^2 - E^2)$; cette équation deviendra $\frac{a^2}{E^2} - 1 - \frac{M+m}{a} = 0$. Maintenant, dans l'équation (4) du §. 418, si à $1 - \frac{a^2}{E}$ l'on substitue sa valeur $-\frac{M+m}{a}$, & $\frac{1}{2}(R'+R''')$ à R'', l'équation deviendra

$$(1)\ \text{Vîtesse}^2 = \frac{4(M+m)}{R'+R'''} - \frac{M+m}{a};$$

Cette expression est commune à toutes les trajectoires.

Si la trajectoire est une Parabole; attendu que dans ce cas a est infini, l'expression précédente deviendra $\text{Vîtesse}^2 = \frac{4(M+m)}{R'+R'''}$.

Supposons maintenant que l'on considere une ellipse dont l'arc soit terminé par les rayons vecteurs R', R''', qui terminent pareillement l'arc

de la Parabole; l'on aura Vîteſſe² dans l'ellipſe eſt à Vîteſſe² dans la Parabole, comme $\frac{4(M+m)}{R'+R'''} - \frac{M+m}{a}$ eſt à $\frac{4(M+m)}{R'+R'''}$, comme $1 - \frac{R'+R'''}{4a}$ eſt à 1. Mais ſi l'arc n'eſt pas grand, les cordes reſpectives ſont ſenſiblement comme les vîteſſes tangentielles; l'on a donc

$$\text{Corde}^2 \text{ dans l'ellipſe} = \text{corde}^2 \text{ dans la Parabole} \left(1 - \frac{R'+R'''}{4a}\right);$$

D'ailleurs $\text{corde}^2 \text{ dans la Parabole} = \frac{0{,}000000000228328 \times t^2}{R'+R'''}$; donc

$$(2)\ \text{Corde}^2 \text{ dans l'Ellipſe} = \frac{0{,}000000000228328 \times t^2}{R'+R'''}$$
$$- \frac{0{,}0000000000\,7082 \times t^2}{a};$$

Donc

$$(1)\ Q = (r'-r''')^2 + 4r'r''' \sin^2 \tfrac{1}{2}(A'''-A') + \frac{0{,}00000000005\,7082 \times t^2}{a}$$
$$- \frac{0{,}000000000228328 \times t^2}{R'+R'''}.$$

Remarque ſur un uſage de la méthode du §. 624 pour rectifier les erreurs des obſervations.

(834) Nous avons vu (§. 624) que ſi l'on a en général
$y = \text{fonction de } x$;
& que l'on ſuppoſe d'ailleurs que $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha''''$, &c. ſoient des valeurs de x; a, a', a'', a''', a'''', les valeurs correſpondantes de y; que l'on ſuppoſe enfin

$$\beta = \frac{\alpha'-\alpha}{a'-a};\ \beta' = \frac{\alpha''-\alpha'}{a''-a'};\ \beta'' = \frac{\alpha'''-\alpha''}{a'''-a''};\ \beta''' = \frac{\alpha''''-\alpha'''}{a''''-a'''};\ \&c.$$
$$\gamma = \frac{\beta'-\beta}{a''-a};\ \gamma' = \frac{\beta''-\beta'}{a'''-a'};\ \gamma'' = \frac{\beta'''-\beta''}{a''''-a''};\ \&c.$$
$$\delta = \frac{\gamma'-\gamma}{a'''-a};\ \delta' = \frac{\gamma''-\gamma'}{a''''-a'};\ \&c.\ \epsilon = \frac{\delta'-\delta}{a''''-a};\ \&c.$$

& ainſi de ſuite; l'on a, en entendant par

Y la valeur particuliere de y relativement à laquelle l'on cherche la valeur correſpondante de x;

$$(1)\ x = \alpha + (Y-a)\beta + (Y-a)(Y-a')\gamma + (Y-a)(Y-a')(Y-a'')\delta$$
$$+ (Y-a)(Y-a')(Y-a'')(Y-a''')\epsilon + \&c.$$

Nous avons fait voir en même tems l'application de la méthode à la détermination des lieux des Planetes & des Cometes.

Si les obſervations aſtronomiques étoient exactes, il eſt hors de doute que les obſervations moyennes que l'on en conclut, ſeroient également exactes; mais ſi les obſervations aſtronomiques ſont inexactes, les obſervations moyennes participent de cette inexactitude. Voyons s'il ne

ſeroit

seroit pas possible de faire servir l'équation (1) à découvrir cette inexactitude. Soient

$d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$ &c. les erreurs des observations;

L'on aura dans ce cas

$$\beta = \frac{\alpha' - \alpha + d\alpha' - d\alpha}{a' - a}; \quad \beta' = \frac{\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha'}{a'' - a'};$$

$$\beta'' = \frac{\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''}{a''' - a''}; \quad \beta''' = \frac{\alpha'''' - \alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha'''}{a'''' - a'''};$$

(2) $x = \alpha + d\alpha + (Y - a)\beta + (Y - a)(Y - a')\gamma + (Y - a)(Y - a')(Y - a'')\delta + (Y - a)(Y - a')(Y - a'')(Y - a''')\varepsilon + \&c.$

Les valeurs de γ, γ', γ'' &c. δ, δ' &c. ε &c. ayant d'ailleurs la même forme que ci-dessus.

Si donc l'on suppose, par exemple, d'après l'ensemble des observations, & le peu d'intervalle entre ces observations, que les différences troisiemes & quatriemes doivent être nulles; l'on aura $\varepsilon = 0$; $\delta = 0$; mais puisque $\varepsilon = 0$, & $\delta = 0$, l'on en conclura pareillement $\delta' = 0$. Maintenant, à cause de $\delta = 0$, & de $\delta' = 0$, l'on aura $\gamma' - \gamma = 0$; $\gamma'' - \gamma' = 0$; d'où l'on conclura $(a'' - a) \times (\beta'' - \beta') - (a'' - a') \times (\beta' - \beta) = 0$; $(a''' - a') \times (\beta''' - \beta'') - (a''' - a'') \times (\beta'' - \beta') = 0$; ou, enfin,

$$(3)\ (a'' - a)\left(\frac{\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''}{a''' - a''} - \frac{\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha'}{a'' - a'}\right) - (a''' - a')\left(\frac{\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha'}{a'' - a'} - \frac{\alpha' - \alpha + d\alpha' - d\alpha}{a' - a}\right) = 0;$$

$$(4)\ (a''' - a')\left(\frac{\alpha'''' - \alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha'''}{a'''' - a'''} - \frac{\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''}{a''' - a''}\right) - (a'''' - a'')\left(\frac{\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''}{a''' - a''} - \frac{\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha'}{a'' - a'}\right) = 0.$$

Ces deux équations, combinées avec la suivante,

$$(5)\ d\alpha + d\alpha' + d\alpha'' + d\alpha''' + d\alpha'''' = 0,$$

résultante de la supposition que la somme des erreurs en plus & en moins se détruisent, donneront des lumieres sur les erreurs des observations.

Si l'on croyoit pouvoir supposer de plus $\gamma = 0$; l'on aura pareillement $\gamma' = 0$; $\gamma'' = 0$; d'où l'on conclura

(6) $(a' - a)(\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha') - (a'' - a')(\alpha' - \alpha + d\alpha' - d\alpha) = 0$;

(7) $(a'' - a')(\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha'') - (a''' - a'')(\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha') = 0$;

(8) $(a''' - a'')(\alpha'''' - \alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha''') - (a'''' - a''')(\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha'') = 0$.

L'on pourroit aussi supposer que la somme des erreurs, au lieu de se détruire, fût égale à s; l'on auroit alors

$$(7)\ d\alpha + d\alpha' + d\alpha'' + d\alpha''' + d\alpha'''' - s = 0.$$

(835) Il est difficile de se dissimuler, lorsque l'on a calculé beaucoup d'orbites Cométaires, que les observations que l'on soumet au calcul,

ne sont pas toujours exemptes d'erreur. Chacune de ces erreurs sera, si l'on veut, peu considérable; mais comme l'on est obligé de déterminer de grandes dimensions au moyen de petites différences observées, ces erreurs influent nécessairement sur les résultats. Il n'est donc pas inutile d'avoir des équations qui puissent faire découvrir les erreurs probables des observations, d'après la marche même de ces observations, & qui donnent en même tems les lumieres nécessaires pour les rectifier.

L'on fera au surplus la réflexion suivante. Lorsque nous avons considéré cinq observations, nous avons nommé $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$, les erreurs de chaque observation, & nous avons eu les équations (3), (4) & (5) du §. précédent; car nous craindrions de prescrire dans tous les cas l'usage des équations (6), (7) & (8). L'on a donc, dans le cas dont il s'agit, deux équations de moins que de quantités à déterminer; & en général, si l'on considéroit un nombre n d'observations, l'on n'auroit qu'un nombre $n - 2$ d'équations de la forme des équations (3), (4) & (5) du §. précédent. Le Problême a donc véritablement deux degrés d'indétermination; mais il est aisé de sentir que sous un autre point de vue, ces deux degrés d'indétermination peuvent se réduire à un. En effet, si l'on vouloit moins connoître les erreurs absolues des observations, que les différences des erreurs des observations consécutives considérées deux à deux, alors les inconnues du Problême ne seroient plus $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$; mais $d\alpha' - d\alpha$; $d\alpha'' - d\alpha'$; $d\alpha''' - d\alpha''$; $d\alpha'''' - d\alpha'''$; & le Problême n'auroit qu'un degré d'indétermination.

Je ne sçais cependant si, malgré cette simplification apparente, il n'est pas préférable de traiter séparément les quantités $d\alpha, d\alpha', d\alpha'', d\alpha''', d\alpha''''$.

Nous remarquerons enfin que l'équation (5) du §. précédent peut être mise sous la forme suivante

$$2d\alpha + d\alpha' + d\alpha'' + d\alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha'''' - d\alpha + d\alpha' - d\alpha' + d\alpha'' - d\alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''' + d\alpha'''' = 0;$$

Mais par la supposition $d\alpha + d\alpha' + d\alpha'' + d\alpha''' + d\alpha'''' = 0$; donc

$$(1)\quad d\alpha - d\alpha'''' - d\alpha + d\alpha' - d\alpha' + d\alpha'' - d\alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''' + d\alpha'''' = 0.$$

Article VII.

Sur un petit mouvement que l'on a soupçonné dans le centre de gravité de notre Systême Planétaire.

Je terminerai ce Chapitre par quelques recherches sur un petit mouvement que l'on a soupçonné dans le centre de gravité de notre Systême Planétaire. Voici l'objet de ces recherches.

Newton a démontré, dans les principes de la Philosophie Naturelle, que les actions réciproques de tant de corps que l'on voudra d'un même systême, n'alterent en aucune façon le mouvement particulier du centre commun de gravité de tous ces corps; & que ce centre est, ou dans un repos absolu, ou continue de se mouvoir d'un mouvement uniforme en

ligne droite dans l'eſpace. On ſait que quelques Etoiles telles que Arcturus & α de l'Aigle, paroiſſent avoir des mouvemens particuliers. Le deſir de démeler, dans ces mouvemens, ceux qui ſont propres à ces Etoiles, d'avec ceux qui peuvent appartenir à notre ſyſtême, avoient engagé de nos jours quelques Aſtronomes à entreprendre des calculs à ce ſujet. Les premiers réſultats ont fait ſoupçonner que notre Syſtême Planétaire tend vers la partie du Ciel où l'on obſerve l'Etoile α d'Hercule. Examinons juſqu'à quel point cette aſſertion eſt fondée.

Conſtruction fondamentale.

(836) Pour réſoudre la queſtion propoſée, j'imagine un plan immuable, par exemple, le plan de l'Ecliptique à une certaine époque. Sur ce plan, & par le Soleil, je mene une droite indéfinie dont la poſition eſt pareillement immuable; ce ſera la droite qui paſſe par le premier d'Ariès à l'époque dont il s'agit; je mene une perpendiculaire à cette droite; je mene pareillement une perpendiculaire au plan immuable dont je viens de parler; c'eſt à ces trois coordonnées perpendiculaires entre elles que je rapporterai tous les mouvemens.

Soient

D la diſtance de l'Etoile au Soleil; je n'entreprendrai point de déterminer cette diſtance; tout ce que l'on ſait, c'eſt qu'elle eſt preſque infinie, pris dans le ſens rigoureux.

L la latitude de l'Etoile lors d'une premiere obſervation; j'entends par la latitude de l'Etoile, ſon élévation au-deſſus du plan immuable auquel je rapporte tous les mouvemens;

L' la latitude de l'Etoile lors d'une ſeconde obſervation;

L'' la latitude de l'Etoile lors d'une troiſieme obſervation;

L''' la latitude de l'Etoile lors d'une quatrieme obſervation; & ainſi de ſuite.

l la longitude de l'Etoile lors de la premiere obſervation; j'entends par la longitude de l'Etoile, ſa diſtance angulaire ſur le plan auquel je rapporte les mouvemens, au point du Ciel correſpondant à l'extrémité de la ligne des abſciſſes;

l' la longitude de l'Etoile lors de la ſeconde obſervation;

l'' la longitude de l'Etoile lors de la troiſieme obſervation;

l''' la longitude de l'Etoile lors de la quatrieme obſervation; & ainſi de ſuite.

t le tems écoulé entre la premiere & la ſeconde obſervation;

t' le tems écoulé entre la premiere & la troiſieme obſervation;

t'' le tems écoulé entre la premiere & la quatrieme obſervation; il eſt inutile de dire que ces intervalles doivent être grands.

X le chemin du Soleil dans la direction de la ligne des abſciſſes, dans l'intervalle de la premiere à la ſeconde obſervation;

Y le chemin du Soleil dans la direction de la ligne des ordonnées, pendant le même intervalle;

Z le chemin du Soleil perpendiculairement au plan, pendant le même intervalle;

X' le chemin du Soleil dans la direction de la ligne des abſciſſes, dans l'intervalle de la premiere à la troiſieme obſervation;

Y' le chemin du Soleil dans la direction de la ligne des ordonnées, pendant le même intervalle;

Z' le chemin du Soleil perpendiculairement au plan, pendant le même intervalle;

X'' le chemin du Soleil dans la direction de la ligne des abſciſſes, dans l'intervalle de la premiere à la quatrieme obſervation;

Y'' le chemin du Soleil dans la direction de la ligne des ordonnées, pendant le même intervalle;

Z'' le chemin du Soleil perpendiculairement au plan, pendant le même intervalle; & ainſi de ſuite.

x le chemin de l'Etoile dans la direction de la ligne des abſciſſes, dans l'intervalle de la premiere à la ſeconde obſervation;

y le chemin de l'Etoile dans la direction de la ligne des ordonnées, pendant le même intervalle;

z le chemin de l'Etoile perpendiculairement au plan, pendant le même intervalle;

x' le chemin de l'Etoile dans la direction de la ligne des abſciſſes, dans l'intervalle de la premiere à la troiſieme obſervation;

y' le chemin de l'Etoile dans la direction de la ligne des ordonnées, pendant le même intervalle;

z' le chemin de l'Etoile perpendiculairement au plan, pendant le même intervalle;

x'' le chemin de l'Etoile dans la direction de la ligne des abſciſſes, dans l'intervalle de la premiere à la quatrieme obſervation;

y'' le chemin de l'Etoile dans la direction de la ligne des ordonnées, pendant le même intervalle;

z'' le chemin de l'Etoile perpendiculairement au plan, pendant le même intervalle; & ainſi de ſuite.

Il eſt d'abord évident que, relativement à la premiere obſervation, l'on a les équations ſuivantes,

(1) Diſtance de l'Etoile au plan auquel on rapporte les mouvemens $= D \sin L$;

(2) Diſtance du Soleil à la projection de l'Etoile ſur le plan auquel on rapporte les mouvemens $= D \cos L$;

(3) Diſtance de la projection de l'Etoile à la ligne des abſciſſes comptée ſur la ligne des ordonnées $= D \cos L \sin l$;

(4) Diſtance de la projection de l'Etoile au Soleil comptée ſur la ligne des abſciſſes $= D \cos L \cos l$.

Si l'on conſidere maintenant les différentes obſervations, par exemple, la ſeconde; il eſt clair que l'on aura pour cette ſeconde obſervation:

(5) Diſtance de la projection de l'Etoile au Soleil comptée ſur la ligne des abſciſſes $= D \cos L \cos l + x - X$;

(6) Diſtance de la projection de l'Etoile à la ligne des abſciſſes, comptée ſur la ligne des ordonnées $= D \cos L \sin l + y - Y$;

(7) Diſtance du Soleil à la projection de l'Etoile $= \dfrac{D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x - X}{\operatorname{cof} l'}$;

(8) Diſtance de l'Etoile au plan mené par le Soleil parallélement à celui auquel on rapporte les mouvemens $= D \operatorname{fin} L + z - Z$;

D'où l'on conclura

(9) $D \operatorname{cof} L \operatorname{fin} l + y - Y - (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x - X) \operatorname{tang} l' = o$;

(10) $\operatorname{Tang} L' (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x - X) - \operatorname{cof} l' (D \operatorname{fin} L + z - Z) = o$;

Et ſi l'on conſidere un nombre quelconque d'obſervations, l'on aura pareillement

(11) $D \operatorname{cof} L \operatorname{fin} l + y' - Y' - (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x' - X') \operatorname{tang} l'' = o$;

(12) $\operatorname{Tang} L'' (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x' - X') - \operatorname{cof} l'' (D \operatorname{fin} L + z' - Z') = o$;

(13) $D \operatorname{cof} L \operatorname{fin} l + y'' - Y'' - (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x'' - X'') \operatorname{tang} l''' = o$;

(14) $\operatorname{Tang} L''' (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x'' - X'') - \operatorname{cof} l''' (D \operatorname{fin} L + z'' - Z'') = o$;

& ainſi de ſuite.

Maintenant, puiſque d'après le théorême de Newton, le centre commun de gravité ſe meut en ligne droite d'un mouvement uniforme, on a

$$X' = \frac{t'}{t} X;\ Y' = \frac{t'}{t} Y;\ Z' = \frac{t'}{t} Z;\ x' = \frac{t'}{t} x;\ y' = \frac{t'}{t} y;\ z' = \frac{t'}{t} z;$$

$$X'' = \frac{t''}{t} X;\ Y'' = \frac{t''}{t} Y;\ Z'' = \frac{t''}{t} Z;\ x'' = \frac{t''}{t} x;\ y = \frac{t''}{t} y;\ z'' = \frac{t''}{t} z.$$

Et les équations (9), (10), (11), (12), (13), & (14) deviendront

(15) $D \operatorname{cof} L \operatorname{fin} l + y - Y - (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x - X) \operatorname{tang} l' = o$;

(16) $\operatorname{Tang} L' (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + x - X) - \operatorname{cof} l' (D \operatorname{fin} L + z - Z) = o$;

(17) $D \operatorname{cof} L \operatorname{fin} l + \frac{t'}{t} (y - Y) - (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + \frac{t'}{t} (x - X)) \operatorname{tang} l'' = o$;

(18) $\operatorname{Tang} L'' (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + \frac{t'}{t} (x - X)) - \operatorname{cof} l'' (D \operatorname{fin} L + \frac{t'}{t} (z - Z)) = o$;

(19) $D \operatorname{cof} L \operatorname{fin} l + \frac{t''}{t} (y - Y) - (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + \frac{t''}{t} (x - X)) \operatorname{tang} l''' = o$;

(20) $\operatorname{Tang} L''' (D \operatorname{cof} L \operatorname{cof} l + \frac{t''}{t} (x - X)) - \operatorname{cof} l''' (D \operatorname{fin} L + \frac{t''}{t} (z - Z)) = o$;

& ainſi de ſuite.

Les équations précédentes renferment ſept variables D, X, Y, Z, x, y, z; & ſi l'on vouloit déterminer toutes ces variables, on pourroit croire qu'il faudroit employer ſept équations, & par conſéquent quatre obſervations, non compris la premiere; car chaque obſervation complette donne deux équations. Mais outre que les déterminations que l'on obtiendroit par ce procédé, ne feroient bonnes qu'en théorie, nous allons propoſer quelques réflexions qui dérangeront ce premier apperçu.

Il eſt d'abord évident que par la forme des équations précédentes, on ne peut ſéparer la variable x de la variable X, la variable y de la

variable Y, la variable z de la variable Z; de forte que le nombre de variables que l'on auroit pu d'abord croire être au nombre de sept, D, X, Y, Z, x, y, z, se réduit réellement à quatre, D, $x - X$, $y - Y$, $z - Z$. Mais, par la même raison il n'est pas possible de séparer les mouvemens qui appartiennent au Soleil, de ceux qui appartiennent à l'Etoile. Supposons donc que l'on fasse usage des équations (15), (16), (17), (18) de ce paragraphe. Au moyen des équations (15) & (17) l'on aura à la vérité une premiere valeur de $x - X$; au moyen des équations (16) & (18) l'on aura une seconde valeur de $x - X$; & égalant ces deux expressions, l'on aura l'expression de la distance D de l'Etoile au Soleil; mais n'est-il pas sensible que l'on ne doit pas avoir une grande confiance à une pareille détermination conclue d'observations dont les différences sont si petites? Il faut donc abandonner ce premier point de vue. Il reste alors à conclure les relations entre $x - X$, $y - Y$, $z - Z$, au moyen d'équations de la forme des équations (15) & (16).

Je n'entrerai dans aucun détail sur l'usage de ces formules; & toutes les méthodes que l'on peut employer rentrent dans ces équations. Je laisse aux Géometres & aux Astronomes à prononcer sur l'incertitude des résultats, quelque multipliés que soient d'ailleurs les calculs & les applications que l'on pourroit faire à plusieurs Etoiles. De plus, les bonnes observations sont d'une époque trop récente pour rien affirmer à ce sujet. Et comment démêler d'ailleurs avec certitude le mouvement qui appartient à l'Etoile d'avec celui qui appartient au Soleil?

Remarques sur les résultats précédens.

(837) Je finirai cet Article par la remarque suivante. Quand on viendroit à constater dans la suite des siecles, que l'ensemble de notre Systême paroît avoir un mouvement en ligne droite, il ne faudroit pas croire cependant que ce mouvement fût véritablement rectiligne. Il en est probablement de notre Systême particulier, relativement à l'assemblage des êtres, comme d'une Planete particuliere relativement à notre Soleil. Et de même que les Planetes décrivent une courbe autour du centre de gravité de leur Systême particulier, de même l'ensemble de notre Systême décrit une trajectoire autour du centre commun de gravité de tous les Systêmes. La ligne droite que l'on auroit déterminée, ne seroit en effet qu'un très-petit arc d'une trajectoire immense qui seroit décrite dans une suite incalculable de siecles. Au reste, cette réflexion paroît être d'autant mieux fondée, que l'on ne connoît que deux especes de mouvemens dans le Ciel; des mouvemens oscillatoires qui se rétablissent au bout d'une époque plus ou moins grande, mais déterminée, & des mouvemens circulaires qui se continuent indéfiniment. Ces deux especes de mouvemens sont les principes simples que la Nature semble avoir choisis pour assurer à son ouvrage une inaltérable stabilité.

CHAPITRE TREIZIEME.

Des altérations que les orbites des Cometes peuvent éprouver en vertu des actions réciproques de la Terre & des Cometes ; & des questions relatives à cet objet.

DANS les Chapitres précédens, j'ai déterminé la nature des trajectoires que les Cometes décrivent autour du Soleil ; j'ai donné la notice des différentes orbites Cométaires calculées d'après les apparitions des différentes Cometes. Je me propose, dans ce Chapitre, de donner une idée des altérations que les actions réciproques de la Terre & des Cometes peuvent faire éprouver aux orbites de ces Astres, lors de leurs approximations. On ne doit pas s'attendre à trouver la solution rigoureuse de cette question ; il faudroit résoudre le Problême des trois corps dans sa plus grande généralité. Mais sans donner à la solution cette extrême exactitude qu'on ne peut obtenir que par des calculs compliqués, je ferai usage d'une méthode facile & qui me paroît suffisante pour donner une idée fort approchée des perturbations, pour toutes les Planetes dont les masses sont très-petites en comparaison de celle du Soleil ; c'est-à-dire, pour Mercure, Vénus, Mars & la Terre.

ARTICLE PREMIER.

Principes dont on fera usage dans ces recherches.

(838) Je supposerai, dans les recherches suivantes, que lorsqu'une Comete s'engage dans la sphere d'activité de la Terre, la différence des attractions que le Soleil exerce sur la Comete & sur la Terre, est si petite qu'on peut la regarder comme nulle ; je supposerai pareillement que l'intervalle de tems pendant lequel la Comete est engagée dans la sphere d'activité de notre globe, est assez petit pour qu'on puisse regarder comme rectiligne, son orbite relative par rapport à la Terre. Examinons d'abord la légitimité de ces suppositions.

Soit F un centre d'attraction dont la sphere d'activité ne s'étende pas au delà de la circonférence BTbt. Quoique cette supposition ne soit pas Fig. 23.
rigoureusement vraie, puisque l'on ne peut point assigner de terme où finisse véritablement l'action de la gravité, il est aisé d'apprécier la légitimité de la supposition. Je suppose d'ailleurs qu'un corps B entre, suivant la direction Bβ, dans la sphere d'attraction du corps F ; je suppose de plus que dans tout le tems où le corps B est dans cette sphere

d'attraction, les corps B & F sont assez peu éloignés l'un de l'autre pour que l'attraction du Soleil sur le corps B, par exemple, differe infiniment peu de l'attraction du Soleil sur le corps F; de sorte que sans l'attraction du corps F, le corps B décriroit d'un mouvement relatif, une ligne qui différeroit infiniment peu de la ligne droite; il s'agit de déterminer dans cette hypothese la trajectoire décrite par le corps B autour du centre F d'attraction.

Fig. 23.

Soit TFt la direction du mouvement du corps F dans son orbite; Bβ la direction du mouvement du corps B dans sa trajectoire; F le point où le corps F se trouve dans son orbite, lorsque le corps B entre dans la sphere d'attraction. Pour pouvoir regarder le corps F comme immobile; lorsque le corps B entre dans la sphere d'attraction du corps F, je suppose qu'on imprime au corps B un mouvement BK' égal & parallele au mouvement du corps F, mais dans une direction opposée; la diagonale BK sera le mouvement relatif du corps B par rapport au corps F. Par la supposition, on connoîtra le rayon vecteur FB égal au rayon de la sphere d'activité de la Terre; on connoîtra de plus l'angle FBK du rayon vecteur FB, avec la tangente BK, à l'orbite relative BAb, & la vîtesse tangentielle au point B; on pourra donc déterminer par les formules des §. 414 & 415, toutes les dimensions de la trajectoire relative BAb décrite autour du point F comme centre des forces; son excentricité, son grand axe, le parametre du grand axe, la distance AF du foyer F à l'apside A, l'angle AFB du premier rayon vecteur FB, avec le grand axe, &c.

Lorsqu'après avoir parcouru la trajectoire relative BAb, le corps B se trouvera à l'extrémité b de la sphere d'activité du corps F; pour le dépouiller de la partie de son mouvement relatif due au mouvement du corps F, soit bL la vîtesse tangentielle du corps B au point b de son orbite relative BAb; par le point b menons la droite bm parallele & égale au mouvement du corps F, mais dans une direction opposée. Par la nature des mouvemens composés, la droite BL sera la diagonale du parallélogramme bmLn, dont le côté bn sera le mouvement vrai du corps B dans la nouvelle orbite qu'il décrira autour du Soleil; on pourra donc determiner ce mouvement vrai; d'ailleurs on connoîtra le rayon vecteur de la nouvelle orbite autour du Soleil, correspondant au point b de cette trajectoire; on connoîtra de plus l'angle de la tangente à cette nouvelle orbite avec le rayon vecteur, & la vîtesse tangentielle; on pourra donc déterminer, par les formules des §. 414 & 415 les dimensions de cette nouvelle orbite. L'application de ces principes développera les préceptes que je n'ai fait qu'indiquer.

ARTICLE II.

Examen de la légitimité de l'hypotheſe précédente; & détermination du rayon que l'on peut donner à la ſphere d'attraction de la Terre.

(839) Je vais faire voir maintenant que dans le calcul des perturbations des orbites Cométaires par l'action de la Terre, lorſque les Cometes approchent fort près de notre globe, on peut ſuppoſer ſans erreur ſenſible, une ſphere d'attraction d'une étendue limitée; de ſorte que lorſque la Comete & la Terre ne ſont point engagées dans cette ſphere, elles n'éprouvent que l'action du Soleil; mais quand elles y ſont engagées, elles ſe meuvent l'une autour de l'autre, comme ſi le Soleil n'agiſſoit point ſur elles.

Pour le démontrer, je ſuppoſerai les maſſes de la Terre & de la Comete infiniment petites par rapport à celle du Soleil; cette ſuppoſition n'eſt pas fort éloignée de la vérité, puiſque la maſſe de la Terre eſt environ 325833 fois plus petite que celle du Soleil, & que l'on peut probablement faire la même ſuppoſition pour la maſſe de la Comete qui n'eſt pas connue.

Soit

T la Terre;
S le Soleil;
C la Comete;

Je me ſervirai des mêmes lettres pour exprimer les maſſes de ces Corps. D'après cette conſtruction, ſi l'on repréſente par ST la diſtance du Soleil à la Terre, par SC la diſtance du Soleil à la Comete, & par TC la diſtance de la Terre à la Comete; l'action du Soleil ſur la Terre Fig. 24. ſera exprimée par $\frac{S}{ST^2}$; l'action du Soleil ſur la Comete ſera exprimée par $\frac{S}{SC^2}$; & celle de la Terre ſur la Comete ſera exprimée par $\frac{T}{TC^2}$. Or T étant, par la ſuppoſition, infiniment petit par rapport à S, on voit que lorſque TC eſt fini on peut conſidérer la Comete comme n'éprouvant que l'action du Soleil; on ne doit donc avoir égard à l'action de la Terre que lorſque TC étant infiniment petit, $\frac{T}{TC^2}$ eſt comparable à $\frac{S}{SC^2}$; donc, 1°. on ne doit ſuppoſer à la Terre & à la Comete, qu'une ſphere d'attraction d'une étendue très-limitée.

Maintenant, dans le cas où TC eſt infiniment petit, je décompoſe l'action du Soleil ſur la Comete, ſuivant deux directions, dont la premiere eſt parallele & égale à la force que le Soleil exerce ſur la Terre, & la ſeconde eſt la force perturbatrice. Il eſt viſible que la premiere force

ne troublera point les mouvemens relatifs de la Terre & de la Comete, qui résultent de leur action réciproque, mais ces mouvemens seront troublés par la seconde force; cherchons conséquemment l'expression de celle-ci.

Fig. 24.

Pour y parvenir, soit

1 le sinus total;

Ω l'angle CST du rayon vecteur SC mené du Soleil à la Comete, avec le rayon vecteur ST mené du Soleil à la Terre;

Ω' l'angle CTK formé à la Terre par le rayon vecteur TC mené de la Terre à la Comete, & par le prolongement TK du rayon vecteur ST mené du Soleil à la Terre.

J'observe que TC étant infiniment petit par rapport à SC, l'angle Ω doit pareillement être infiniment petit. Représentons maintenant par SM la force $\frac{S}{SC^2}$ que le Soleil exerce sur la Comete, & par SN la force $\frac{S}{ST^2}$ qu'il exerce sur la Terre. Si du point M l'on abaisse sur SN la perpendiculaire MQ, & que l'on joigne les points M, N, il est clair que la droite MN exprimera la force perturbatrice du Soleil pour troubler les mouvemens relatifs de la Terre & de la Comete. En effet, la droite MQ représente évidemment l'action du Soleil sur la Comete, dans le sens de la perpendiculaire au rayon vecteur de la Terre; la droite SQ représente l'action du Soleil sur la Comete dans le sens du rayon vecteur de la Terre; la droite QN représente la différence des actions du Soleil sur la Terre & sur la Comete, dans le sens du rayon vecteur de la Terre; la résultante MN représente donc, ainsi que nous l'avons dit, la force perturbatrice du Soleil pour troubler les mouvemens relatifs de la Terre & de la Comete; il s'agit d'avoir l'expression de MN.

Pour y parvenir, nous remarquerons que, d'après les constructions précédentes, l'on aura $QM = \frac{S}{SC^2}\sin\Omega$; $SQ = \frac{S}{SC^2}\cos\Omega = \frac{S}{SC^2}$, attendu que $\cos\Omega$ peut être supposé égal à 1; donc $QN = \frac{S}{ST^2} - \frac{S}{SC^2} = S\left(\frac{SC^2 - ST^2}{ST^2 \times SC^2}\right)$. De la Comete C abaissons sur le prolongement du rayon vecteur ST mené du Soleil à la Terre, la perpendiculaire CK; l'on aura $SC^2 = SK^2 + CK^2 = (ST + TK)^2 + CK^2$; mais $CK = TC \times \sin\Omega'$; $TK = TC \times \cos\Omega'$; donc $(ST + TK)^2 + CK^2 = ST^2 + 2ST \times TC \times \cos\Omega' + TC^2$; donc $SC^2 - ST^2 = 2ST \times TC \times \cos\Omega' + TC^2 = 2ST \times TC \times \cos\Omega'$, attendu que l'on peut négliger le quarré de TC; donc $QN = \frac{S}{SC^2} \times \frac{2TC \times \cos\Omega'}{ST}$. Mais $MN = \sqrt{(QM^2 + QN^2)}$; donc

$$(1)\quad MN = \frac{S}{SC^2}\sqrt{\left(\sin^2\Omega + \frac{4TC^2 \times \cos^2\Omega'}{ST^2}\right)} = \frac{S}{ST^2}\sqrt{\left(\sin^2\Omega + \frac{4TC^2 \times \cos^2\Omega'}{ST^2}\right)}$$

en ſubſtituant dans le dénominateur de la fraction, ST^2 à SC^2, attendu que ces deux quantités different d'une quantité infiniment petite. Fig. 24.

(840) Dans la ſuppoſition que Ω & TC ſont infiniment petits, la force précédente eſt évidemment infiniment petite; mais la Terre n'exerce ſur la Comete une action finie, que lorſque TC & Ω ſont infiniment petits; donc, lorſque la Terre exerce ſur la Comete une action finie, l'action du Soleil ne peut troubler les mouvemens relatifs de la Comete & de la Terre. L'hypotheſe ſeroit même rigoureuſement exacte, s'il étoit vrai que la Comete & la Terre euſſent véritablement une maſſe infiniment petite relativement au Soleil; donc cette ſuppoſition eſt à très-peu près exacte dans la Nature, attendu la très-grande différence entre la maſſe du Soleil & celle de la Terre.

On peut même faire varier aſſez conſidérablement l'étendue de la ſphere d'attraction de la Terre, ſans que cela trouble ſenſiblement les réſultats du calcul. Il y a cependant des limites au-delà deſquelles on ne peut l'étendre. Si on lui donne, par exemple, trop d'étendue, il eſt à craindre que la force perturbatrice du Soleil dont nous venons de donner l'expreſſion, & que l'on néglige, ne devienne trop conſidérable par l'accroiſſement des quantités TC & ſin Ω; & ſi on lui donne trop peu d'étendue, il eſt à craindre que la force $\frac{T}{TC^2}$ que l'on néglige tant que la Comete n'eſt point engagée dans la ſphere d'activité de la Terre, ne ſoit cependant pas dans le cas d'être négligée. La limite de la ſphere d'activité de la Terre doit donc être telle qu'au-delà de cette limite, $\frac{T}{TC^2}$ ſoit conſidérablement moindre que $\frac{S}{ST^2}$, & qu'en-deçà, $\frac{T}{TC^2}$ ſoit conſidérablement plus grand que la plus grande valeur de MN, c'eſt-à-dire, que $\frac{2S \times TC}{ST^3}$; d'où il ſemble que la limite la plus naturelle que l'on puiſſe choiſir eſt celle dans laquelle $\frac{T}{TC^2}$ ſeroit moyenne proportionnelle géométrique entre $\frac{S}{ST^2}$ & $\frac{2S \times TC}{ST^3}$; on a donc

$$(1)\quad TC = ST\sqrt[5]{\left(\frac{T^2}{2S^2}\right)}.$$

Détermination du rayon que l'on peut donner à la ſphere d'attraction de la Terre.

(841) Si l'on ſuppoſe la parallaxe du Soleil de 8″,813, le rapport de 360^d à 8″,813 exprimera le nombre de fois que le rayon de la Terre eſt contenu dans la circonférence de l'orbite terreſtre; ſi donc l'on multiplie ce nombre par le rapport du rayon à la circonférence du cercle, on aura le nombre de fois que le demi-diametre de la Terre eſt contenu

Fig. 24. dans le rayon de l'orbite terrestre; la distance du Soleil à la Terre évaluée en demi-diametres terrestres est donc de 23413 demi-diametres terrestres; d'ailleurs la masse du Soleil est à la masse de la Terre comme 325833 est à 1; donc dans l'équation (1) du §. précédent $T = 1$; $S = 325833$; $ST = 23413$; donc

(1) $TC = 121{,}38$ demi-diametres terrestres.

Confirmation de la légitimité de l'hypothese précédente.

(842) Pour démontrer de plus en plus la légitimité de l'hypothese précédente, appliquons le calcul au cas dont il s'agit. La distance de la Terre au Soleil étant de 23413 demi-diametres de la Terre; 121,38 demi-diametres de la Terre sont la cent quatre-vingt-treizieme partie de la distance de la Terre au Soleil = 0,00518135. Supposons donc une Comete qui entre dans la sphere d'attraction de la Terre, & dont la vîtesse relative soit la plus petite possible; cette vîtesse, pour une seconde de tems, ne peut être plus petite que de 0,000000081475, la moyenne distance de la Terre au Soleil étant 1; c'est le cas d'une Comete directe dont le mouvement vrai seroit parallele à celui de la Terre, & dont par conséquent le mouvement relatif seroit égal à la différence des mouvemens vrais de la Terre & de la Comete; ce mouvement réduit en pieds seroit de 39025 pieds par seconde de tems. Supposons d'ailleurs les actions du Soleil sur la Terre & sur la Comete les plus différentes qu'il est possible. Puisque les distances respectives de la Terre & du Soleil à la Comete sont, par la supposition, comme 1 à 193 — 1; que d'ailleurs les masses de la Terre & du Soleil sont comme 1 à 325833, l'action du Soleil sur la Comete étant exprimée par $\frac{325833}{(193-1)^2}$, celle du Soleil sur la Terre sera exprimée par $\frac{325833}{193^2}$, celle de la Terre sur la Comete sera exprimée par 1; & la différence des actions du Soleil sur la Terre & sur la Comete, sera exprimée par $\frac{325833\,(193^2-(193-1)^2)}{193^2\times(193-1)^2} = 0{,}10245$. A la surface de la Terre, un corps grave parcourt 15,098 pieds dans la premiere seconde de sa chute; donc à la distance de 121,38 demi-diametres, un corps grave parcourroit 0,1390 ligne dans la premiere seconde de sa chute; & comme nous avons vu précédemment que la force perturbatrice du Soleil pour troubler la trajectoire relative, est à l'attraction de la Terre sur la Comete, comme 0,10245 est à 1, la force perturbatrice du Soleil n'est à l'extrémité de la sphere d'attraction de la Terre, que de 0,0139 ligne par seconde de tems, sur une vîtesse tangentielle de 39025 pieds. Il est donc évident que l'on peut la négliger.

Je me suis confirmé dans les idées que je viens de développer, par la remarque suivante. La distance de la Lune à la Terre est d'environ 60 demi-diametres terrestres; le rayon que j'ai supposé à la sphere d'at-

traction de la Terre est de 121,38 demi-diametres de la Terre; ce rayon n'est donc qu'un peu plus du double du rayon de l'orbite Lunaire. Dans les cas les plus singuliers, une Comete pourroit à peine être engagée pendant 32 heures dans la sphere d'attraction. Le calcul appliqué à la trajectoire de la Lune considérée comme elliptique, donne une trajectoire approchée qui représente assez bien ses mouvemens pour un petit intervalle de tems tel qu'un jour; je croirois donc que les résultats donnés par ma méthode sont aussi conformes à la vérité, que le seroit le calcul du mouvement de la Lune dans une orbite elliptique, pour un petit espace de tems.

Remarque sur la premiere Comete de 1770.

(843) A l'occasion de ces derniers calculs, je ne puis me refuser à une remarque sur la premiere Comete de 1770. On sait que cette Comete a passé à une distance de la Terre d'environ 750000 lieues, ou 523,5 demi-diametres terrestres. Cette Comete a donc passé réellement à une distance de notre globe quadruple du rayon que nous avons donné à la sphere d'attraction de la Terre. Cette remarque me paroît exclure toute idée d'altération dans les élémens de la Comete de la part de la Terre, altération que quelques Astronomes avoient été tentés d'adopter pour rendre raison du peu d'accord des calculs dans les deux branches de la trajectoire de cette Comete. Si l'on avoit quelque doute à ce sujet, on remarqueroit qu'à la distance de 523 demi-diametres terrestres, l'action de la Terre sur une Comete n'est que de 0,0074 ligne par seconde de tems. Est-il naturel de penser qu'une action aussi infiniment petite, continuée pendant un intervalle de tems très-court, ait pu produire une altération sensible dans les mouvemens de la Comete de 1770, dont la vîtesse relative par rapport à la Terre, étoit d'ailleurs très-considérable, & beaucoup plus grande que de 39025 pieds par seconde?

ARTICLE III.

Du changement que la Masse de la Comete peut apporter dans la détermination du rayon de la sphere d'attraction.

(844) Dans la détermination du rayon de la sphere d'attraction de la Terre, nous n'avons eu aucun égard à la masse de la Comete, ou plutôt nous avons regardé cette masse comme nulle; nous allons examiner maintenant si la masse de la Comete apporte quelque changement dans cette détermination.

Pour résoudre cette question, on se rappellera le principe suivant. Si l'on suppose les masses de deux corps A & B concentrées dans le seul corps A fixe & immobile, & que dans cette hypothese le corps B décrive autour du corps A une trajectoire dont la nature est déterminée par les circonstances du Problême; qu'on rende ensuite aux corps A & B

leurs véritables masses ; qu'on les suppose libres & pouvant obéir à leur action mutuelle, & qu'on leur donne les mêmes vîtesses relatives dans les mêmes directions, ces corps décriront autour du centre commun de gravité, deux courbes semblables à la premiere, & dont les dimensions homologues seront aux dimensions de la premiere courbe, comme la masse du corps A, s'il s'agit de la trajectoire décrite par le corps B, ou comme la masse du corps B, s'il s'agit de la trajectoire du corps A, est à la somme des masses des corps A & B.

D'après ce principe, considérons ce qui arrive, dans le cas où la masse de la Comete est nulle ; & dans le cas où la Comete a une masse comparable à celle de la Terre. Dans le cas où la masse de la Comete est nulle, la Terre sera immobile, puisque les dimensions de sa trajectoire seront nulles comme la masse de la Comete ; dans le second cas, au contraire, la Comete & la Terre décriront autour du centre commun de gravité, des courbes semblables, dont les dimensions seront, en raison inverse des masses respectives, divisées par la somme des masses. Et tandis que la Terre imprimera un mouvement à la Comete pour l'attirer vers elle, la Comete imprimera un semblable mouvement à la Terre, mais dans les proportions dont nous venons de parler.

(845) Il suit de cette discussion, qu'il seroit assez naturel d'augmenter tant soit peu le rayon de la sphere de commune attraction, à raison de la masse de la Comete ; ce qui peut se faire sans altérer l'exactitude de la méthode. Il est seulement fâcheux de ne pouvoir rien dire de bien précis à cet égard, puisque la masse des Cometes est inconnue. Quoi qu'il en soit, dans toute cette discussion nous nommerons

Σ le rayon de la sphere d'attraction que l'on aura choisi ;

bien entendu que ce rayon ne doit pas beaucoup s'éloigner d'être égal à 121,38 demi-petits diametres terrestres.

De la distance de la Comete & de la Terre au centre commun de gravité, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction.

(846) Si l'on nomme

Σ le rayon de la sphere de commune attraction ;
m la masse de la Terre ;
m' la masse de la Comete ;

Il suit des recherches précédentes que l'on a

(1) Distance de la Terre au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction $= \frac{m'\Sigma}{m+m'}$;

(2) Distance de la Comete au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction $= \frac{m\Sigma}{m+m'}$.

ARTICLE IV.

De quelques questions relatives au tems où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction.

Après avoir déterminé le rayon que l'on peut supposer à la sphere de commune attraction, il faut calculer le tems où la Comete s'engage dans cette sphere. Mais avant de pousser plus loin ces recherches, il faut déterminer les mouvemens de la Terre & de la Comete dans la direction des tangentes à leurs orbites respectives, au moment où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction de la Terre.

Détermination des mouvemens de la Terre & de la Comete dans la direction des tangentes à leurs orbites respectives.

(847) Il est facile de déterminer généralement, pour un instant quelconque, les mouvemens de la Terre & de la Comete dans la direction des tangentes à leurs orbites respectives; & par conséquent pour le moment où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction de la Terre.

Soit, en effet,

1 la moyenne distance de la Terre au Soleil;
a le demi-grand axe de l'orbite de la Comete, que je ne suppose point parabolique, mais une section conique quelconque;
E l'excentricité de l'orbite de la Comete;
P le parametre de l'orbite;
R le rayon vecteur;
M, m les masses du Soleil & de la Comete;
V la vîtesse tangentielle de la Comete.

Si dans l'équation (6) du §. 412, l'on substitue à aP sa valeur $2(a^2-E^2)$, cette équation deviendra $\frac{a^2}{E^2}-1-\frac{M+m}{a}=0$. Si dans l'équation (7) du même paragraphe, à $\frac{a^2}{E^2}-1$ l'on substitue sa valeur $\frac{M+m}{a}$; elle deviendra

$$(1)\quad 2f+\frac{M+m}{a}=0.$$

Si donc dans l'équation (3) du §. 418, l'on substitue à $2f$ son expression $-\frac{M+m}{a}$; elle deviendra

$$(2)\quad V^2=\frac{2(M+m)}{R}-\frac{M+m}{a};$$

C'est l'expression générale des vîtesses tangentielles pour tous les corps qui décrivent des trajectoires autour du Soleil.

Soit

R′ le rayon vecteur particulier de la Terre, 1 étant toujours la moyenne distance de la Terre au Soleil;

l'on aura, relativement à la Terre,

$$(3)\quad V^2 = \frac{2(M+m)}{R'} - (M+m).$$

Maintenant si l'on suppose la Terre à sa moyenne distance, & que l'on nomme

v la vîtesse de la Terre à cette distance;

l'on aura $R' = 1$; $V^2 = v^2$; & substituant ces valeurs dans l'équation (3) l'on conclura $M + m = v^2$. Donc si l'on néglige la masse m de la Terre, comme infiniment petite vis-à-vis de la masse du Soleil, & que dans l'équation (2) l'on substitue à $M + m$ sa valeur v^2, l'on aura généralement

$$(4)\quad V = v\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Au moyen de cette équation, l'on déterminera, pour un instant quelconque, le mouvement de la Comete suivant la direction de sa tangente, correspondant à une minute de tems; en entendant par V ce mouvement, & par v l'arc que décrit la Terre, pendant une minute de tems, lors de sa moyenne distance. Nous avons vu déja que $v = 0,00001946$ log. $v = 5{\cdot}0772197$.

Quant au mouvement de la Terre dans la direction de sa tangente, on le déterminera au moyen de l'équation

$$(5)\quad V = v\left(\frac{2}{R'} - 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on supposoit l'orbite de la Comete parabolique, comme dans ce cas a est infini, l'on auroit $V = v\sqrt{\frac{2}{R}}$; & si l'on supposoit enfin $R = 1$, l'on auroit $V = v\sqrt{2}$.

Détermination du tems où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction.

(848) Nous pouvons déterminer maintenant le tems où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction; ce Problême se résout facilement au moyen de l'équation (1) du §. 499; il ne s'agit, dans l'expression de P^2 de ce paragraphe, que de supposer $\Delta = \Sigma$, & de chercher la valeur de t correspondante. Il est superflu d'avertir que l'on doit choisir pour l'origine du mouvement, un instant voisin de celui où l'on sait d'avance que la Comete & la Terre ne doivent pas être à une distance fort différente du rayon de la sphere de commune attraction. Nous remarquerons enfin que les quantités n, n', qui entrent dans cette formule, peuvent s'évaluer au moyen des équations (4) & (5) du paragraphe précédent.

ARTICLE

ARTICLE V.

Des mouvemens du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, ſoit dans l'eſpace abſolu, ſoit par rapport à la Terre conſidérée comme immobile; & des coordonnées auxquelles nous rapporterons ces mouvemens.

(849) Dans les recherches ſuivantes, je rapporterai les mouvemens de la Terre & de la Comete, à trois coordonnées perpendiculaires entre elles; la ligne des nœuds de la Comete ſur l'Ecliptique; la perpendiculaire à la ligne des nœuds de la Comete menée ſur le plan de l'Ecliptique; & la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique. Je ferai pareillement uſage du principe ſuivant.

L'état du centre commun de gravité de deux corps, n'eſt point changé par l'action mutuelle qu'ils exercent l'un ſur l'autre. Si ſans l'action de ces deux corps le centre de gravité eût eu un mouvement uniforme ſuivant une certaine direction; de quelque maniere que ces deux corps agiſſent l'un ſur l'autre, ce centre continuera de ſe mouvoir avec le même mouvement uniforme, & ſuivant la même direction.

Mouvemens de la Comete & de la Terre dans le ſens des coordonnées que nous venons de choiſir.

(850) Soit

r le rayon vecteur de la Terre à un certain inſtant déterminé;

R le rayon vecteur de la Comete par rapport au Soleil, pour le même inſtant;

b l'angle du rayon vecteur r de la Terre avec la ligne des nœuds, pour l'inſtant donné; cet angle doit être compté ſur le plan de l'Ecliptique, en partant du nœud aſcendant;

b' l'angle du rayon vecteur R de la Comete, avec la ligne des nœuds pour l'inſtant donné; cet angle doit être compté ſur l'orbite de la Comete, en partant du nœud aſcendant;

η le mouvement de la Terre dans ſon orbite, correſpondant à une minute de tems; cette quantité doit être exprimée en valeur de la moyenne diſtance du Soleil à la Terre;

η' le mouvement de la Comete dans ſon orbite, correſpondant à une minute de tems; cette quantité doit être exprimée en valeur de la moyenne diſtance du Soleil à la Terre;

t le nombre de minutes horaires écoulées depuis l'époque d'où l'on part, juſqu'à un autre inſtant quelconque; cette époque, quoique arbitraire dans le principe, eſt cependant déterminée par l'inſtant relativement auquel on évalue les quantités r, R, b, b'.

I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comete ſur l'Ecliptique;

a l'angle de la tangente à l'orbite de la Terre, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée ſur le plan de l'Ecliptique;

a' l'angle de la tangente à l'orbite de la Comete, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'orbite;

m la masse de la Terre;

m' la masse de la Comete;

L'on aura évidemment

Mouvement de la Comete dans le sens de la ligne des nœuds $= n' t \sin a'$;

Mouvement de la Terre dans le sens de la ligne des nœuds $= n t \sin a$;

Mouvement de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'Écliptique $= n' t \cos a' \cos I$;

Mouvement de la Terre dans le sens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'Ecliptique $= n t \cos a$;

Mouvement de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à l'Écliptique $= n' t \cos a' \sin I$.

Si donc l'on suppose la Terre immobile, & que l'on transporte à la Comete le mouvement de la Terre, en lui donnant un signe contraire au mouvement de la Terre, l'on aura

Mouvement relatif de la Comete dans le sens de la ligne des nœuds $= n' t \sin a' - n t \sin a$.

Mouvement relatif de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds $= n' t \cos a' \cos I - n t \cos a$.

Mouvement relatif de la Comete suivant la perpendiculaire à l'Ecliptique $= n' t \cos a' \sin I$.

Mouvement relatif de la Comete dans l'espace $=$
$t \sqrt{(n'^2 + n^2 - 2 n' n (\sin a' \sin a + \cos a' \cos a \cos I))}$.

Soit maintenant

n'' le mouvement relatif de la Comete dans l'espace, correspondant à une minute de tems;

comme dans ce cas $t = 1$, l'on aura

$$n'' = \sqrt{(n'^2 + n^2 - 2 n' n (\sin a' \sin a + \cos a' \cos a \cos I))}.$$

Mouvemens du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete dans le sens des mêmes coordonnées.

(851) Il est facile de déterminer les mouvemens du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, dans le sens des mêmes coordonnées dont il a été question ci-dessus. En effet, le mouvement du centre commun de gravité, par rapport à la Terre supposée immobile, est au mouvement relatif de la Comete, par rapport à la Terre également supposée immobile, comme m' est à $m + m'$. J'ai donné, dans le paragraphe

précédent*, l'expreſſion des mouvemens relatifs de la Comete ſuivant la ligne des nœuds, ſuivant la perpendiculaire à la ligne des nœuds, ſuivant la perpendiculaire à l'Ecliptique; ſi donc l'on multiplie ces expreſſions par $\frac{m'}{m+m'}$, on aura

Mouvement du centre de gravité dans le ſens de la ligne des nœuds, relativement à la Terre ſuppoſée immobile =

$$\frac{m'}{m+m'}\,(n't\sin a' - nt\sin a).$$

Mouvement du centre de gravité ſuivant la perpendiculaire à la ligne des nœuds, relativement à la Terre ſuppoſée immobile =

$$\frac{m'}{m+m'}\,(n't\cos a'\cos I - nt\cos a).$$

Mouvement du centre de gravité ſuivant la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}\,n't\cos a'\sin I.$

A ces quantités, ſi l'on ajoute les mouvemens de la Terre ſuivant les mêmes directions, on aura pour expreſſions des mouvemens du centre de gravité dans l'eſpace abſolu,

Mouvement abſolu du centre de gravité dans le ſens de la ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'}\,n't\sin a' + \frac{m}{m+m'}\,nt\sin a.$

Mouvement abſolu du centre de gravité ſuivant la perpendiculaire à la ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'}\,n't\cos a'\cos I + \frac{m}{m+m'}\,nt\cos a.$

Mouvement abſolu du centre de gravité ſuivant la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}\,n't\cos a'\sin I.$

Il eſt facile de déterminer le mouvement du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete dans le plan de l'Ecliptique, ainſi que l'angle de la direction de ce mouvement avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds. En effet, puiſque nous avons donné l'expreſſion du mouvement du centre commun de gravité dans le ſens de la ligne des nœuds de la Comete, & dans le ſens de la perpendiculaire à cette ligne des nœuds, il eſt évident que ſi l'on nomme

ϑ l'angle que fait la direction du mouvement du centre de gravité dans le plan de l'Ecliptique, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée ſur ce plan;

l'on aura

$$\text{Tang}\,\vartheta = \frac{\frac{m'}{m+m'}\,n'\sin a' + \frac{m}{m+m'}\,n\sin a}{\frac{m'}{m+m'}\,n'\cos a'\cos I + \frac{m}{m+m'}\,n\cos a};$$

Mouvement du centre de gravité de la Terre & de la Comete, dans le plan de l'Ecliptique $= \frac{1}{\cos \vartheta} t \left(\frac{m'}{m+m'} n' \cos a' \cos I + \frac{m}{m+m'} n \cos a\right)$.

ARTICLE VI.

Des lieux du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, soit dans l'espace absolu, soit sur l'Ecliptique; & des questions relatives à ces lieux.

Dans l'Article précédent, nous avons déterminé les mouvemens du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, soit dans l'espace absolu, soit sur l'Ecliptique; nous allons maintenant nous occuper de la détermination des lieux de ce même centre.

Du lieu de la Terre & de la Comete, soit dans l'espace absolu, soit sur l'Ecliptique.

(852) Si l'on part des équations du §. 850, il est évident qu'à l'époque d'où l'on compte les mouvemens, soit de la Terre, soit de la Comete, dans leurs orbites rectilignes non troublées, l'on a

Distance de la Terre au Soleil, comptée sur la ligne des nœuds de la Comete $= r \cos b$;

Distance de la Comete au Soleil comptée sur la ligne des nœuds $= R \cos b'$;

Distance de la Terre au Soleil comptée sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'Ecliptique $= r \sin b$;

Distance de la Comete au Soleil comptée sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'orbite de la Comete $= R \sin b'$;

Distance de la Comete au Soleil comptée sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'Ecliptique $= R \sin b' \cos I$;

Distance de la Comete au plan de l'Ecliptique $= R \sin b' \sin I$.

Donc

Distance de la Terre au Soleil pour un instant quelconque, comptée sur la ligne des nœuds $= r \cos b + nt \sin a$;

Distance de la Terre au Soleil pour un instant quelconque, comptée sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'Ecliptique $= r \sin b + nt \cos a$;

Distance de la Comete au Soleil pour un instant quelconque, comptée sur la ligne des nœuds $= R \cos b' + n' t \sin a'$;

Distance de la Comete au Soleil pour un instant quelconque, comptée

ſur la perpendiculaire à la ligne des nœuds, menée ſur le plan de l'Ecliptique $= (\mathrm{R} \sin b' + n' t \cos a') \cos \mathrm{I}$;

Diſtance de la Comete au plan de l'Ecliptique $= (\mathrm{R} \sin b' + n' t \cos a') \sin \mathrm{I}$.

Ces déterminations s'appliquent aux orbites rectilignes non-troublées, qui ſont celles que nous conſidérons dans cet Article.

Si donc l'on ſuppoſe la Terre immobile, & que l'on tranſporte à la Comete, le lieu & le mouvement de la Terre, en lui donnant un ſigne contraire au lieu & au mouvement de la Terre, l'on aura

Diſtance de la Comete à la Terre dans le ſens de la ligne des nœuds $= \mathrm{R} \cos b' - r \cos b + n' t \sin a' - n t \sin a$;

Diſtance de la Comete à la Terre dans le ſens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée ſur le plan de l'Ecliptique $= (\mathrm{R} \sin b' + n' t \cos a') \cos \mathrm{I} - (r \sin b + n t \cos a)$;

Diſtance de la Comete à la Terre dans le ſens de la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique $= (\mathrm{R} \sin b' + n' t \cos a') \sin \mathrm{I}$.

Du lieu du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete.

(853) Il eſt facile de déterminer le lieu du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, par rapport à la Terre ſuppoſée immobile. En effet, d'après les principes expoſés ci-deſſus, la diſtance du centre commun de gravité à la Terre ſuppoſée immobile, eſt à la diſtance de la Comete à la Terre également ſuppoſée immobile, comme m' eſt à $m + m'$; on aura donc

Diſtance du centre commun de gravité à la Terre ſuppoſée immobile, dans le ſens de la ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'}(\mathrm{R} \cos b' - r \cos b + t(n' \sin a' - n \sin a))$;

Diſtance du centre commun de gravité à la Terre ſuppoſée immobile, dans le ſens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée ſur le plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}((\mathrm{R} \sin b' + n' t \cos a') \cos \mathrm{I} - r \sin b - n t \cos a)$;

Diſtance perpendiculaire du centre commun de gravité au plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'} (\mathrm{R} \sin b' + n' t \cos a') \sin \mathrm{I}$.

A ces quantités, ſi l'on ajoute le lieu de la Terre ſuivant les mêmes directions, & pour les mêmes inſtans, l'on aura pour l'expreſſion des lieux du centre de gravité dans l'eſpace abſolu,

Lieu abſolu du centre de gravité dans le ſens de la ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'}(\mathrm{R} \cos b' + n' t \sin a') + \frac{m}{m+m'}(r \cos b + n t \sin a)$,

Lieu absolu du centre de gravité dans le sens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée sur le plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}(R \sin b' + n' t \cos a') \cos I + \frac{m}{m+m'}(r \sin b + n t \cos a)$;

Lieu absolu du centre de gravité dans le sens de la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}(R \sin b' + n' t \cos a') \sin I.$

Ces lieux sont comptés en partant du centre du Soleil.

(854) On pourroit avoir également l'expression du lieu de la projection du centre commun de gravité, sur le plan de l'Ecliptique. Soit en effet ϑ' un angle tel que

$$\text{Tang}\,\vartheta' = \frac{\frac{m'}{m+m'}(R \sin b' + n' t \cos a') \cos I + \frac{m}{m+m'}(r \sin b + n t \cos a)}{\frac{m'}{m+m'}(R \cos b' + n' t \sin a') + \frac{m}{m+m'}(r \cos b + n t \sin a)};$$

Cet angle sera celui que fait avec la ligne des nœuds menée par le Soleil, la droite qui joint le centre du Soleil, & la projection du centre commun de gravité sur le plan de l'Ecliptique ; & l'on aura

Lieu de la projection du centre commun de gravité sur le plan de l'Ecliptique $= \left(\frac{m'}{m+m'}(R \cos b' + n' t \sin a') + \frac{m}{m+m'}(r \cos b + n t \sin a)\right)\frac{1}{\cos \vartheta'}.$

Ce lieu est situé sur une ligne qui, partant du Soleil, fait un angle ϑ' avec la ligne des nœuds de la Comete menée par le centre du Soleil.

ARTICLE VII.

Détermination du plan dans lequel sont situées les trajectoires relatives de la Terre & de la Comete; & de quelques questions relatives à ce plan.

(855) Pour déterminer la position du plan des trajectoires relatives de la Terre & de la Comete, nous remarquerons qu'il est aisé de voir *à priori*, que le plan de ces trajectoires n'est pas différent de celui dans lequel les mouvemens se passeroient, si les orbites n'étoient pas troublées. En effet, comme les actions que la Terre & la Comete exercent respectivement l'une sur l'autre, s'exercent entiérement dans le plan des mouvemens relatifs, les orbites relatives de ces corps, quelque altération qu'elles subissent par leur action mutuelle, ne changent point de plan. Ce plan garde son parallélisme en passant toujours par le centre commun de gravité qui l'entraîne dans son mouvement uniforme; de la même maniere que l'anneau de Saturne suit cette Planete, en restant toujours parallele à lui-même. Si donc l'on détermine pour un instant quelconque, l'angle de l'intersection de ce plan & de l'Ecliptique, avec une droite

donnée de position sur l'Ecliptique, ainsi que l'inclinaison de ce plan sur l'Ecliptique ; ces élémens seront connus pour tout le tems des mouvemens.

De l'angle de l'intersection du plan des orbites relatives de la Terre & de la Comete, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds de la Comete menée sur le plan de l'Ecliptique.

(856) Il est facile, au moyen des équations du §. 853, de déterminer l'angle que fait avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds de la Comete sur l'Ecliptique, l'intersection du plan des orbites relatives de la Terre & de la Comete avec le plan de l'Ecliptique. En effet, puisque cette intersection garde toujours son parallélisme, on peut déterminer cet angle, en déterminant la position de la droite qui joint la Terre & le centre commun de gravité de la Terre & de la Comete dans l'hypothese des orbites rectilignes non-troublées, au moment où ce centre de gravité perce l'Ecliptique ; mais à cet instant, puisque la distance perpendiculaire du centre commun de gravité au plan de l'Ecliptique, est nulle, l'on a (§. 853)

(1) $\text{R} \sin b' + \eta' t \cos a' = 0.$

On pourra donc déterminer l'instant t du phénomene.

Maintenant si l'on substitue cette valeur particuliere de t dans les deux premieres équations du §. 853, & que l'on nomme

γ l'angle de l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds de la Comete ;

Comme dans le cas dont il s'agit $\text{R} \sin b' + t \eta' \cos a = 0$, l'on aura

(2) $$\text{Tang}\, \gamma = \frac{\text{R} \cos b' - r \cos b + t\,(\eta' \sin a' - \eta \sin a)}{-r \sin b - \eta t \cos a}.$$

Il suit de nos constructions que l'angle γ est mesuré sur un cercle qui a pour centre le lieu qu'auroit eu la Terre dans son orbite rectiligne non-troublée, à l'instant où le centre commun de gravité de la Terre & de la Comete perceroit l'Ecliptique ; & que cet angle est compté en partant de la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée par ce point.

Détermination de l'inclinaison du plan des orbites relatives sur l'Ecliptique.

(857) Nous avons vu que le plan des orbites relatives se meut d'un mouvement uniforme, en gardant toujours son parallélisme, & qu'il passe continuellement par le point où se trouveroit la Terre, si elle se mouvoit uniformement dans son orbite rectiligne non-troublée. Si donc l'on suppose la Terre immobile & que l'on calcule par les formules du §. 853, les différens lieux du centre commun de la Terre & de la Comete, par rapport à la Terre supposée immobile, on pourra considérer

le plan des orbites relatives comme immobile. Nous allons employer cette considération pour déterminer l'inclinaison de ce plan sur l'Ecliptique.

(858) Puisqu'à l'instant où la projection du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete tombe sur la perpendiculaire à la ligne des nœuds menée par la Terre, la distance du centre commun de gravité à la Terre supposée immobile, dans le sens de la parallele à la ligne des nœuds menée par la Terre, est nulle; l'on a (§. 853)

$$(1)\quad R \cos b' - r \cos b + t\,(n' \sin a' - n \sin a) = 0.$$

On déterminera donc facilement cet instant. Mais au même instant (§. 853) la distance perpendiculaire du centre commun de gravité au plan de l'Ecliptique $= \frac{m}{m+m'}(R \sin b' + n' t \cos a') \sin I$; & la distance de la projection du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete sur l'Ecliptique, prise dans le sens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds, menée par la Terre supposée immobile $=$ $\frac{m'}{m+m'}((R \sin b' + n' t \cos a') \cos I - r \sin b - n t \cos a)$. De plus la distance de la Terre à la projection du centre de gravité sur l'Ecliptique pour l'instant dont il s'agit, prise dans le sens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds, est à la distance perpendiculaire de cette même projection à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, comme le sinus total est au sinus de l'angle que nous avons nommé γ (§. 856); donc

(2) Distance perpendiculaire de la projection du centre de gravité sur l'Ecliptique à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}((R \sin b' + n' t \cos a') \cos I - r \sin b - n t \cos a) \sin \gamma$.

Mais la distance perpendiculaire de la projection du centre de gravité de la Terre & de la Comete sur l'Ecliptique à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, est à la distance perpendiculaire du centre commun de gravité au plan de l'Ecliptique, comme 1 est à Tang (inclinaison du plan des orbites relatives sur l'Ecliptique); donc

(3) Tang (inclinaison du plan des orbites relatives sur l'Ecliptique)

$$= \frac{(R \sin b' + n' t \cos a') \sin I}{((R \sin b' + n' t \cos a') \cos I - r \sin b - n t \cos a) \sin \gamma}.$$

De l'angle que fait sur le plan des orbites relatives, la route rectiligne du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, avec l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique.

(859) Soit

Σ le rayon de la sphere de commune attraction;

&

& par conſéquent (§. 846)

Diſtance de la Terre au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete à l'inſtant où la Comete s'engage dans la ſphere d'attraction $= \frac{m'\Sigma}{m+m'}$;

Diſtance de la Comete au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete à l'inſtant où la Comete s'engage dans la ſphere d'attraction $= \frac{m\Sigma}{m+m'}$;

n le mouvement de la Terre dans ſon orbite rectiligne correſpondant à une minute de tems;

n' le mouvement de la Comete dans ſon orbite rectiligne correſpondant à une minute de tems;

n'' le mouvement relatif de la Comete par rapport à la Terre ſuppoſée immobile; nous avons donné (§. 850) l'expreſſion de la quantité n'';

$\frac{m'}{m+m'}n''$ le mouvement du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete dans ſa trajectoire rectiligne ſur le plan des orbites relatives, pour une minute de tems;

ϵ l'angle que fait ſur le plan des orbites relatives, la route rectiligne du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, avec l'interſection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique;

Δ la diſtance de la Terre regardée comme immobile, au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, à l'inſtant où ce centre perce l'Ecliptique;

Δ' la diſtance de la Terre regardée comme immobile, au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, à l'inſtant où la Comete s'engage dans la ſphere de commune attraction;

t, t' le nombre de minutes de tems écoulées depuis l'époque que l'on a priſe pour l'origine des mouvemens, juſqu'aux inſtans particuliers dont on vient de parler;

Nous avons vu (§. 856) que t eſt déterminé par l'équation ſuivante, $R \sin b' + n' t \cos a' = 0$; que t' ſe détermine par les équations du §. 848, & que l'on a (§. 846 & 853) pour expreſſions de Δ, Δ'

$$\Delta = \frac{m'}{m+m'} \sqrt{((R \cos b' - r \cos b + t(n' \sin a' - n \sin a))^2 + (r \sin b + n t \cos a)^2)};$$

$$\Delta' = \frac{m'\Sigma}{m+m'}.$$

Il eſt également évident que $\frac{m'}{m+m'}n''(t'-t)$ eſt l'expreſſion du chemin parcouru par le centre commun de gravité de la Terre & de la Comete dans ſa trajectoire rectiligne ſur le plan des orbites relatives, par rapport à la Terre ſuppoſée en repos, pendant le tems écoulé entre l'inſtant où le centre commun de gravité perce l'Ecliptique & celui où la Comete s'eſt engagée dans la ſphere d'activité de la Terre. Si donc l'on ſuppoſe la Terre dans un repos relatif, l'on aura ſur le plan des orbites

relatives, un triangle rectiligne dont les côtés sont Δ, Δ', $\frac{m'}{m+m'}n''(t'-t)$, le côté Δ' étant d'ailleurs opposé à l'angle ϵ; donc (trigonométrie rectiligne)

$$(1)\ \cos\epsilon = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{m'^2}{(m+m')^2}n''^2(t'-t)^2+\Delta^2-\Delta'^2}{\frac{m'}{m+m'}n''(t'-t)\,\Delta}$$

(860) Dans cette construction, l'on suppose que l'angle ϵ est compté en partant de l'interfection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique; & en remontant au-dessus du plan de l'Ecliptique.

Nous remarquerons enfin que Δ est également l'expression de la distance de la Terre considérée dans un repos relatif, au point où la trajectoire rectiligne du centre commun de gravité sur le plan des orbites relatives, perce l'Ecliptique; cette distance est prise sur l'interfection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique.

Dans les recherches précédentes & dans celles qui vont suivre jusqu'à l'Article huitieme, nous n'avons point égard aux perturbations des orbites de la Terre & de la Comete; & nous considérons uniquement les orbites rectilignes non-troublées de la Terre, de la Comete & du centre commun de gravité.

Des angles que font sur le plan des orbites relatives, les rayons vecteurs des trajectoires relatives de la Terre & de la Comete, avec la route rectiligne du centre commun de gravité, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction de la Terre; & des angles que font pareillement les tangentes aux orbites relatives, avec ces rayons vecteurs, pour le même instant.

(861) Les recherches précédentes donnent un moyen bien facile de déterminer les angles que font sur le plan des orbites relatives, les rayons vecteurs des trajectoires relatives de la Terre & de la Comete, avec la route rectiligne du centre commun de gravité, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction de la Terre; ainsi que les angles que font les tangentes aux orbites relatives, avec ces rayons vecteurs, pour le même instant.

En effet, si l'on conserve les constructions du §. 859, & que l'on nomme d'ailleurs

ψ l'angle du rayon vecteur de l'orbite relative de la Terre, avec la route rectiligne du centre commun de gravité sur le plan des orbites relatives, pour l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction;

θ l'angle de la tangente à l'orbite relative de la Terre, avec le rayon vecteur, pour le même instant;

Dans le triangle rectiligne que nous venons de considérer (§. 859),

& dont les côtés ſont Δ, Δ', $\frac{m'}{m+m'} n''(t'-t)$; l'angle ϵ que nous venons de déterminer, eſt oppoſé au côté Δ', l'angle Ψ eſt oppoſé au côté Δ, & l'angle θ eſt oppoſé au côté $\frac{m'}{m+m'} n''(t'-t)$; on a donc

$$(1)\quad \sin\Psi = \frac{\Delta}{\Delta'}\sin\epsilon;$$

$$(2)\quad \sin\theta = \frac{m'}{m+m'} \times \frac{n''(t'-t)}{\Delta'}\sin\epsilon.$$

On n'oubliera point qu'il ſuit des recherches précédentes, qu'à l'inſtant où la Comete s'engage dans la ſphere d'attraction de la Terre, l'on a pour expreſſion des rayons vecteurs des trajectoires relatives de la Terre & de la Comete,

(3) Rayon vecteur de l'orbite relative de la Terre $= \frac{m'\Sigma}{m+m'}$;

(4) Rayon vecteur de l'orbite relative de la Comete $= \frac{m\Sigma}{m+m'}$.

Des vîteſſes tangentielles de la Comete & de la Terre dans leurs orbites relatives, à l'inſtant où ces Aſtres s'engagent dans la ſphere de commune attraction.

(862) Il eſt aiſé de déterminer, d'après ce qui a été dit ci-deſſus, les vîteſſes tangentielles de la Comete & de la Terre dans leurs orbites relatives, à l'inſtant où ces Aſtres s'engagent dans la ſphere de commune attraction. En effet, nous avons vu que ſi l'on nomme

- n le mouvement de la Terre dans ſon orbite rectiligne, correſpondant à une minute de tems;
- n' le mouvement de la Comete dans ſon orbite rectiligne, correſpondant à une minute de tems;

Et que l'on ſuppoſe

$$n'' = \pm\sqrt{(n'^2 + n^2 - 2nn'(\sin a \sin a' + \cos a \cos a' \cos I))};$$

n'' eſt le mouvement relatif de la Comete par rapport à la Terre ſuppoſée immobile. Maintenant, ſi, au lieu de ſuppoſer la Terre immobile, on lui rend ſon mouvement, en ſuppoſant immobile le centre commun de gravité de la Terre & de la Comete; le mouvement de la Terre ne ſera plus égal à zéro, & celui de la Comete ne ſera plus égal à n''; mais le mouvement n'' ſe répartira entre la Comete & la Terre, de telle ſorte que l'on aura

(1) Mouvement de la Terre ſuivant la tangente à ſa trajectoire relative pour une minute de tems $= \frac{m'}{m+m'} n''$;

(2) Mouvement de la Comete ſuivant la tangente à ſa trajectoire relative pour une minute de tems $= \frac{m}{m+m'} n''$.

Application des théories précédentes à une Comete.

(863) Pour donner une idée plus distincte des théories précédentes, je vais appliquer le calcul à une Comete qui auroit une masse égale à celle de la Terre, & qui, sans l'action réciproque de la Terre & de la Comete, auroit approché de 13000 lieues de notre globe. Parmi toutes les Cometes qui pourroient approcher de 13000 lieues de la Terre, je choisirai celle dont la trajectoire feroit un angle de 43′ avec l'orbite terrestre. Je supposerai que le nœud de la Comete est dans $8^s\,7^d\,43'\,12''$ & que l'orbite de la Comete coupe l'orbite de la Terre dans le nœud; je supposerai enfin l'orbite rectiligne de la Terre perpendiculaire à la ligne des nœuds. Une Comete qui auroit les élémens suivans rempliroit ces conditions.

Nœud ascendant	$8^s\ 7^d\,43'\,12''$.
Lieu du périhélie	8 7 43 12.
Inclinaison de l'orbite	0 43 0.
Distance périhélie	1,01435.
Sens du mouvement	direct.

Et comme d'ailleurs la distance de la Terre au nœud de cette Comete, doit être de 30′ à l'instant où la Comete traverse l'Ecliptique, pour que la Comete dont il s'agit & la Terre puissent être un moment à la distance de 13000 lieues, je supposerai qu'à l'instant où la Comete passoit par le nœud, la Terre étoit dans $8^s\,8^d\,13'\,12''$.

J'ai pris l'exemple d'une Comete qui approcheroit de la Terre de 13000 lieues, parce qu'il a été beaucoup question des désordres qu'occasionneroit une pareille Comete.

(864) Si l'on calcule, d'après ces données, l'instant où la Comete s'engageroit dans la sphere de commune attraction, en supposant d'ailleurs le rayon de cette sphere égal à 121,38 demi-diametres terrestres; dans les équations du §. 499, il faudra faire $r = 1{,}01435$; $R = 1{,}01435$; $a = 0$; $a' = 0$; $b = 30'\,0''$; $b' = 0$; $I = 43'\,0''$; $\Delta = 121{,}38$ demi-diametres terrestres $= 0{,}00518580$; & l'on trouvera que la Comete s'engageroit dans la sphere de commune attraction, $12^h\,24'$ après le passage de la Comete par le nœud. Les distances de la Comete & de la Terre au centre commun de gravité seroient alors $= 0{,}00259290$. Le plan des trajectoires relatives seroit perpendiculaire au plan de l'Ecliptique; & son intersection avec l'Ecliptique seroit perpendiculaire à la ligne des nœuds. La route du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete sur le plan des trajectoires relatives, feroit un angle de $3^d\,58'\,0''$ avec l'intersection de l'Ecliptique & du plan des trajectoires relatives; c'est l'angle que nous avons nommé ε. Les vîtesses tangentielles de la Terre & de la Comete dans leurs trajectoires relatives, à l'instant où ces Astres s'enga-

geroient dans la ſphere de commune attraction, ſeroient de 19525 pieds par ſeconde. L'angle du rayon vecteur de la Comete dans ſon orbite relative, avec la route du centre de gravité ſur le plan des mouvemens relatifs, ſeroit de $173^d\ 17'\ 50''$ pour le même inſtant; l'angle du rayon vecteur de la Terre avec la même ligne, ſeroit de $353^d\ 17'\ 50''$; l'angle des tangentes aux trajectoires relatives de la Terre & de la Comete, avec les rayons vecteurs, ſeroit de $177^d\ 11'\ 8''$. D'ailleurs le mouvement abſolu du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, ſeroit de 0,000000010608 dans le ſens de la perpendiculaire à l'Ecliptique, pour une minute de tems; il ſeroit de 0,00007442022, dans le ſens de la perpendiculaire à la ligne des nœuds; il ſeroit nul dans le ſens de la ligne des nœuds.

ARTICLE VIII.

De la force attractive qu'il faut ſuppoſer dans le centre commun de gravité, pour pouvoir employer les formules des §. 414, 415 & 416.

(865) Nous connoiſſons maintenant la poſition du plan des trajectoires relatives de la Terre & de la Comete; nous avons déterminé l'angle que fait l'interſection de ce plan & de l'Ecliptique, avec la ligne des nœuds de la Comete, ainſi que l'inclinaiſon de ce plan ſur l'Ecliptique; nous connoiſſons l'angle que fait la route rectiligne du centre commun de gravité tracée ſur le plan des trajectoires relatives, avec l'interſection de ce plan & de l'Ecliptique; nous connoiſſons pareillement la longueur des rayons vecteurs des orbites relatives de la Terre & de la Comete rapportés au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, pour l'inſtant où la Comete s'engage dans la ſphere d'attraction de la Terre; ainſi que les angles que font ces rayons vecteurs avec la route rectiligne du centre commun de gravité. Nous connoiſſons enfin l'angle des rayons vecteurs de la Terre & de la Comete, avec les tangentes aux orbites relatives; les vîteſſes tangentielles dans ces orbites reſpectives, & le chemin du centre de gravité dans l'eſpace. Nous pourrons donc, au moyen des équations des §. 414, 415 & 416, déterminer l'eſpece des trajectoires relatives, ainſi que leurs grands axes, & la diſtance du foyer au centre de ces trajectoires, lorſque nous aurons déterminé convenablement le Parametre P de la trajectoire que renferment ces équations.

(866) Si dans l'équation (4) du §. 416, l'on élimine la maſſe du corps attirant, au moyen de l'équation (1) du §. 423, l'on aura

$$(1)\quad P = \frac{R^2 V^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \delta}.$$

Cette expreſſion renferme le rayon vecteur R de l'orbite relative; la vîteſſe tangentielle V, l'angle θ du rayon vecteur avec la tangente, & le

nombre δ de pieds qu'un corps grave parcourroit pendant la premiere seconde de sa chute, en vertu de la force centrale qui agit à une distance connue ρ. Lorsque la sphere attirante est un corps déterminé comme la Terre, δ & ρ sont connus; puisque si l'on entend par ρ le rayon de la Terre, δ est le nombre de pieds qu'un corps grave parcourt à la surface de la Terre pendant la premiere seconde de sa chute. Mais lorsqu'il s'agit, comme dans notre espece, d'un centre d'attraction qui n'existe que fictivement, δ & ρ ne sont point donnés immédiatement par l'observation; & ces quantités ne sont que fictives. Pour simplifier la question, je substituerai au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, une sphere dont le rayon seroit égal au rayon ρ de la Terre, & je chercherai quelle valeur de δ répondroit dans cette sphere, à l'extrémité du rayon ρ.

(867) Pour déterminer la valeur que l'on doit donner à δ, dans l'hypothese dont il s'agit, considérons la quantité dont la Terre & la Comete s'approchent l'une de l'autre pendant une seconde de tems, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction. Cette quantité est égale à la somme des espaces que la Terre fait décrire à la Comete, & que la Comete fait décrire à la Terre pendant cette premiere seconde, dans le sens de la droite qui joint la Terre & la Comete.

A la surface de la Terre, un projectile parcourt 15,098 pieds pendant la premiere seconde de sa chute; sa distance au centre de la Terre est alors égale à ρ. Lorsque la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction, sa distance est égale à Σ; donc le nombre de pieds que la Terre fait parcourir à la Comete pendant une seconde $=\frac{\rho^2}{\Sigma^2}\times 15{,}098$ pieds. La masse de la Comete est à celle de la Terre, comme m' est à m. La Comete fait donc parcourir pendant le même tems à la Terre, un espace égal à $\frac{m'\rho^2}{m\Sigma^2}\times 15{,}098$ pieds; & la somme des espaces parcourus en vertu des deux actions $=\frac{m+m'}{m}\,\frac{\rho^2}{\Sigma^2}\times 15{,}098$ pieds; & comme le centre commun de gravité est entre la Terre & la Comete, $\frac{\rho^2}{\Sigma^2}\times 15{,}098$ pieds exprime le chemin de la Comete vers ce centre, tandis que $\frac{m'\rho^2}{m\Sigma^2}\times 15{,}098$ pieds exprime le chemin de la Terre vers le même centre pendant le même tems.

Maintenant, puisque par la supposition, la quantité δ qui entre dans les formules, est le chemin que la force centrale fait parcourir à un corps grave dans la premiere seconde de sa chute, à la distance ρ, & que d'ailleurs nous venons de voir que, lorsqu'il s'agit de l'orbite relative de la Comete, la force centrale qu'il faut supposer dans le centre commun de gravité feroit parcourir à un corps grave pendant la premiere se-

conde de sa chute, un chemin égal à $\frac{\rho^2}{\Sigma^2} \times 15{,}098$ pieds, à une distance $\frac{m\Sigma}{m+m'}$, cette force feroit parcourir à ce même corps grave, un chemin égal à $\frac{m^2 \Sigma^2}{(m+m')^2 \rho^2} \times \frac{\rho^2}{\Sigma^2} \times 15{,}098$ pieds, à la distance ρ ; l'on a donc dans le cas de la trajectoire relative de la Comete,

$$(1)\ \delta = \frac{m^2}{(m+m')^2} \times 15{,}098 \text{ pieds.}$$

C'est la quantité que l'on doit substituer à δ, dans l'expression de P du paragraphe précédent.

Par des raisons analogues, si l'on vouloit calculer l'orbite relative de la Terre, l'on supposeroit

$$(2)\ \delta = \frac{m'}{m} \times \frac{m'^2 \times 15{,}098 \text{ pieds}}{(m+m')^2}.$$

Application des théories précédentes à la Comete du §. 863.

(868) Nous pouvons maintenant calculer l'orbite relative, soit de la Comete, soit de la Terre autour du centre de gravité. En effet, des équations (1) & (2) du §. 867, l'on conclura que dans le cas dont il s'agit, l'on a relativement aux orbites de la Terre & de la Comete, $\delta = \frac{1}{4} \times 15{,}098$ pieds $= 3{,}774$ pieds.

Si l'on cherche maintenant, au moyen de l'équation (1) du §. 866, l'expression du parametre P de la section, nous remarquerons que dans cette équation particuliere, R étant la distance de la Terre & de la Comete au centre commun de gravité, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction, & ρ étant le rayon de la Terre que nous supposerons $= 1$, l'on aura $\frac{R}{\rho} = 60{,}69$; d'ailleurs $\theta = 177^d\ 11'\ 8''$, $V = 19525$ pieds, & $\delta = 3{,}774$ pieds; donc $P = 2037220000$. De plus, réduisant R en pieds, à raison du nombre de pieds que contient le rayon de la Terre, l'on aura $R = 1225875000$. Si l'on porte ces valeurs dans les équations des §. 414 & 415, l'on trouvera que les trajectoires relatives sont des hyperboles dont le grand axe $= 7677030$ pieds, la distance du foyer au centre de la section $= 88763600$ pieds. Le grand axe fait, avec le premier rayon vecteur, un angle de $90^d\ 50'\ 16''$. Et comme ce premier rayon vecteur fait un angle de $173^d\ 17'\ 50''$ avec l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, le grand axe fait un angle de $82^d\ 27'\ 34''$, avec la route rectiligne du centre de gravité sur le plan des orbites relatives, & de $86^d\ 25'\ 34''$ avec l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique.

ARTICLE IX.

Recherches préliminaires à la détermination des nouvelles trajectoires de la Terre & de la Comete, autour du Soleil.

(869) Nous sommes arrivés à l'époque où nous cessons de considérer les actions respectives de la Terre & de la Comete, l'une sur l'autre. Ces Astres vont désormais obéir à la seule force qui les enchaîne au Soleil; & il n'est plus question que de déterminer les nouvelles trajectoires qu'elles vont décrire autour du Soleil, d'après les circonstances de leurs mouvemens dans leurs trajectoires relatives, à l'instant où elles sortent de la sphere de commune attraction; mais nous devons auparavant nous occuper de quelques recherches préliminaires.

Des rayons vecteurs de la Terre & de la Comete dans leurs orbites relatives, à l'instant où ces Astres se dégagent de la sphere de commune attraction; des angles des rayons vecteurs & des tangentes aux orbites relatives, avec la route rectiligne du centre commun de gravité, & des vîtesses de la Terre & de la Comete dans leurs orbites relatives, pour le même instant.

(870) A l'instant où la Terre & la Comete se dégagent de la sphere de commune attraction, leurs rayons vecteurs par rapport aux orbites relatives, & leurs vîtesses tangentielles, sont les mêmes qu'aux instans où ces Astres se sont engagés dans la sphere de commune attraction; les recherches précédentes nous font donc connoître ces quantités.

Quant aux angles que font les tangentes aux orbites relatives avec les rayons vecteurs, ils sont supplément l'un de l'autre dans les deux cas. Comme cependant les rayons vecteurs, quoique situés à égale distance de l'axe des trajectoires, sont placés de côté différent par rapport à cet axe, les angles des rayons vecteurs & des tangentes aux orbites relatives, avec la route rectiligne du centre de gravité, pour l'instant où la Comete se dégage de la sphere d'attraction de la Terre, sont fort différens de ceux qui ont lieu pour l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction. Au reste ces quantités se déduisent si facilement les unes des autres, au moyen de simples additions & soustractions, que je les regarderai comme connues.

Du tems où la Comete se dégage de la sphere d'attraction de la Terre.

(871) Il seroit possible, du moins en théorie, de connoître, par les formules de cet Ouvrage, le tems où la Comete se dégage de la sphere d'attraction de la Terre. En effet, on connoît le tems où la Comete s'engage dans cette sphere; c'est l'instant où la distance de la Terre au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete $=\frac{m'\Sigma}{m+m'}$; & celle

celle de la Comete au même centre $= \frac{m\Sigma}{m+m'}$; & ces diſtances ſont les mêmes, lorſque la Comete ſe dégage de la ſphere d'attraction. On pourra donc toujours, théoriquement parlant, connoître le tems que la Terre & la Comete employeroient reſpectivement, à parcourir les arcs de leurs trajectoires compris entre les rayons vecteurs égaux $\frac{m'\Sigma}{m+m'}$, $\frac{m'\Sigma}{m+m'}$, $\frac{m\Sigma}{m+m'}$, $\frac{m\Sigma}{m+m'}$. Comme ces calculs dépendent de l'intégration de ſurfaces hyperboliques, on ſe contentera de déterminer cet inſtant, en conſidérant la ſeconde racine de l'équation du §. 499, équation qui a déja ſervi à déterminer le tems où la Comete s'eſt engagée dans la ſphere d'attraction.

Du lieu dans l'eſpace abſolu, du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, à l'inſtant où ces Aſtres ſe dégagent de la ſphere de commune attraction; & du lieu de la projection de ce centre ſur le plan de l'Ecliptique.

(872) Si l'on conſerve les définitions précédentes, & que l'on nomme, comme ci-deſſus,

t le nombre de minutes qui détermine l'inſtant où la Comete ſe dégage de la ſphere de commune attraction;

I l'inclinaiſon du plan de l'orbite primitive de la Comete ſur l'Ecliptique;

ϑ' un angle tel que

$$\text{Tang}\,\vartheta' = \frac{\frac{m'}{m+m'}(R\sin b' + n't\cos a')\cos I + \frac{m}{m+m'}(r\sin b + nt\cos a)}{\frac{m'}{m+m'}(R\cos b' + n't\sin a') + \frac{m}{m+m'}(r\cos b + nt\sin a)};$$

ϑ'' un angle tel que

$$\text{Tang}\,\vartheta'' = \frac{\frac{m'}{m+m'}(R\sin b' + n't\cos a')\sin I}{\left(\frac{m'}{m+m'}(R\cos b' + n't\sin a') + \frac{m}{m+m'}(r\cos b + nt\sin a)\right)\frac{1}{\cos\vartheta'}};$$

L'on aura

(1) Diſtance du Soleil à la projection du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete ſur le plan de l'Ecliptique $=$

$$\left(\frac{m'}{m+m'}(R\cos b' + n't\sin a') + \frac{m}{m+m'}(r\cos b + nt\sin a)\right)\frac{1}{\cos\vartheta'};$$

(2) Diſtance du Soleil au centre commun de gravité de la Terre & de la Comete dans l'eſpace $=$

$$\left(\frac{m'}{m+m'}(R\cos b' + n't\sin a') + \frac{m}{m+m'}(r\cos b + nt\sin a)\right)\frac{1}{\cos\vartheta'\cos\vartheta''}.$$

Dans ces équations, l'angle ϑ' eſt l'angle que fait avec la ligne des nœuds, la droite qui joint le centre du Soleil & la projection du centre commun de gravité ſur le plan de l'Ecliptique; l'angle ϑ'' eſt celui que fait avec la droite menée du Soleil à la projection du centre commun de gravité

ſur le plan de l'Ecliptique, la ligne menée du Soleil à ce centre dans l'eſpace abſolu.

On aura pareillement

(3) Diſtance perpendiculaire du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete au plan de l'Ecliptique =

$$\frac{m'}{m+m'}(R \sin b' + n' t \cos a') \sin I.$$

Ces équations ſont évidentes, d'après celles des §. 853 & 854.

ARTICLE X.

Détermination des nouvelles trajectoires de la Terre & de la Comete autour du Soleil.

Je vais m'occuper maintenant de la détermination des nouvelles trajectoires de la Terre & de la Comete autour du Soleil, ainſi que de la poſition des plans de ces nouvelles orbites.

Détermination des rayons vecteurs de la Terre & de la Comete dans leurs nouvelles orbites autour du Soleil, à l'inſtant où la Comete ſe dégage de la ſphere d'attraction de la Terre.

(873) Dans le paragraphe précédent, nous avons déterminé le lieu de la projection du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete ſur le plan de l'Ecliptique, ainſi que le lieu de ce centre dans l'eſpace abſolu, à l'inſtant où la Comete ſe dégage de la ſphere d'attraction de la Terre; nous avons donné l'expreſſion de la diſtance perpendiculaire du centre commun de gravité, au plan de l'Ecliptique; nous connoiſſons d'ailleurs (§. 856 & 857) l'angle que fait avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds, l'interſection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, ainſi que l'inclinaiſon de ce plan ſur l'Ecliptique; nous connoiſſons donc la poſition du plan particulier des orbites relatives, pour l'inſtant où la Comete ſe dégage de la ſphere d'attraction de la Terre. Suppoſons maintenant que l'on ait tracé ſur ce plan, l'orbite rectiligne du centre commun de gravité; nous avons appris (§. 870) à connoître les rayons vecteurs de la Terre & de la Comete dans leurs orbites relatives, pour l'inſtant dont il s'agit; l'angle de ces rayons vecteurs avec la route rectiligne du centre commun de gravité; l'angle des tangentes aux orbites relatives, avec les rayons vecteurs; les vîteſſes tangentielles dans les orbites relatives; il s'agit, d'après ces données, de déterminer les élémens des nouvelles trajectoires de la Terre & de la Comete autour du Soleil. Commençons par la détermination des rayons vecteurs.

(874) Soit

Σ le rayon de la ſphere d'activité de la Terre;

ι l'angle que fait ſur le plan des orbites relatives, la route rectiligne du centre

commun de gravité de la Terre & de la Comete, avec l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique ;

v l'angle du rayon vecteur de l'orbite relative de la Terre, avec la route rectiligne du centre commun de gravité pour l'instant dont il s'agit ;

v' l'angle du rayon vecteur de l'orbite relative de la Comete, avec la route rectiligne du centre commun de gravité sur le plan des orbites relatives ; nous remarquerons, que les angles v, v' different entr'eux de 180^d.

Il est évident, d'après nos constructions, que, par exemple, le rayon vecteur de l'orbite relative de la Comete sur le plan des trajectoires relatives, fait avec la parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, menée par le centre commun de gravité, un angle égal à $\epsilon + v'$. Maintenant, si par le centre commun de gravité, l'on mene sur le plan des orbites relatives, une perpendiculaire & une parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, & que l'on décompose le rayon vecteur à l'orbite relative de la Comete, suivant ces deux directions, l'on aura

(1) Distance de la Comete au centre commun de gravité dans le sens de la perpendiculaire à l'intersection du plan des trajectoires relatives & de l'Ecliptique $= \frac{m}{m+m'} \Sigma \sin(\epsilon + v')$;

(2) Distance de la Comete au centre commun de gravité dans le sens de l'intersection du plan des trajectoires relatives & de l'Ecliptique $= \frac{m}{m+m'} \Sigma \cos(\epsilon + v')$.

Les valeurs correspondantes pour la Terre ne different des précédentes, qu'en ce qu'il faut changer v' en v, & substituer le coefficient $\frac{m'}{m+m'}$ au coefficient $\frac{m}{m+m'}$. On ne doit point oublier pareillement que les angles $\epsilon + v$ & $\epsilon + v'$ different toujours de 180^d.

(875) Les quantités dont nous venons de nous occuper, sont évaluées dans le plan des trajectoires relatives ; & elles sont prises, soit sur la parallele à l'intersection de ce plan & de l'Ecliptique, soit sur la perpendiculaire à cette intersection, menées par le centre de gravité ; il faut maintenant décomposer ces mêmes quantités, suivant l'ancienne ligne des nœuds de la Comete sur l'Ecliptique, suivant la perpendiculaire à cette ligne des nœuds menée par le Soleil, & suivant la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique.

Pour y parvenir, soit

I' l'inclinaison du plan des orbites relatives sur l'Ecliptique ;

γ l'angle que fait l'intersection de ce plan & de l'Ecliptique, avec la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds de la Comete ;

I l'inclinaison du plan de l'ancienne orbite de la Comete sur l'Ecliptique.

Nous avons donné dans le §. 874, l'expression de la distance de la Comete au centre commun de gravité, dans le sens de la perpendiculaire à l'intersection du plan des trajectoires relatives & de l'Ecliptique, menée par le centre de gravité sur le plan de ces trajectoires; & nous avons vu que cette distance a pour expression $\frac{m}{m+m'}\,\Sigma\sin(\iota+v')$. Maintenant, si par le centre de gravité, l'on mene un plan parallele à l'Ecliptique, que sur ce plan, l'on trace une parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, & une perpendiculaire à cette droite, & que l'on décompose la quantité $\frac{m}{m+m}\,\Sigma\sin(\iota+v')$ dans le sens de ces droites, l'on aura

(1) Distance perpendiculaire de la Comete au plan parallele à l'Ecliptique mené par le centre de gravité $=\frac{m}{m+m'}\,\Sigma\sin(\iota+v')\sin I'$;

(2) Distance de la Comete au centre commun de gravité, dans le sens de la perpendiculaire à la parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, tracée sur le plan parallele à l'Ecliptique mené par le centre commun de gravité $=\frac{m}{m+m'}\,\Sigma\sin(\iota+v')\cos I'$.

(3) Distance de la Comete au centre commun de gravité, dans le sens de la parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Écliptique, tracée sur le plan parallele à l'Ecliptique mené par le centre commun de gravité $=\frac{m}{m+m'}\,\Sigma\cos(\iota+v')$.

Si l'on ajoute à la premiere distance, la distance perpendiculaire du centre commun de gravité au plan de l'Ecliptique (§. 872), l'on aura

(4) Distance perpendiculaire de la Comete au plan de l'Ecliptique $=$

$$\frac{m'}{m+m'}(R\sin b'+n't\cos a')\sin I+\frac{m}{m+m'}\,\Sigma\sin(\iota+v')\sin I'.$$

Il ne s'agit plus maintenant, pour avoir les distances de la Comete au Soleil dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds menée par le Soleil, & dans le sens de la perpendiculaire à cette ligne des nœuds, que de décomposer les distances (2) & (3), d'après les mêmes principes.

(876) Prenons d'abord la distance de la Comete au centre commun de gravité, dans le sens de la perpendiculaire à la parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, tracée sur le plan parallele à l'Ecliptique mené par le centre commun de gravité, & dont nous avons vu (§. 875) que l'expression étoit $\frac{m}{m+m'}\,\Sigma\sin(\iota+v')\cos I'$. On se rappellera que l'intersection des trajectoires relatives & de l'Ecliptique, fait sur le plan de l'Ecliptique, un angle γ avec la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds. Si donc l'on décompose la quan-

tité $\frac{m}{m+m'}\Sigma \sin(\epsilon+v')\cos I'$, suivant l'ancienne ligne des nœuds de la Comete, & suivant la perpendiculaire à cette ligne des nœuds, l'on aura

(1) Distance de la Comete au centre commun de gravité dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds, provenant de la décomposition de la quantité $\frac{m}{m+m'}\Sigma \sin(\epsilon+v')\cos I' = \frac{m}{m+m'}\Sigma \sin(\epsilon+v')\cos I' \cos\gamma$;

(2) Distance de la Comete au centre commun de gravité dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds, provenant de la décomposition de la quantité $\frac{m}{m+m'}\Sigma \sin(\epsilon+v')\cos I'$

$= \frac{m}{m+m'}\Sigma \sin(\epsilon+v')\cos I' \sin\gamma$.

Si l'on décompose pareillement la distance de la Comete au centre commun de gravité prise dans le sens de la parallele à l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique tracée sur le plan parallele à l'Ecliptique mené par le centre commun de gravité, & dont nous avons vu (§. 875) que l'expression étoit $\frac{m'}{m+m'}\Sigma \cos(\epsilon+v')$, l'on aura

(3) Distance de la Comete au centre commun de gravité, dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds, provenant de la décomposition de la quantité $\frac{m}{m+m'}\Sigma \cos(\epsilon+v') = \frac{m}{m+m'}\Sigma \cos(\epsilon+v')\sin\gamma$;

(4) Distance de la Comete au centre commun de gravité dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds provenant de la décomposition de la quantité $\frac{m}{m+m'}\Sigma \cos(\epsilon+v')$

$= \frac{m}{m+m'}\Sigma \cos(\epsilon+v')\cos\gamma$.

(877) Si l'on ajoute, avec les signes convenables, les quantités précédentes, aux lieux du centre de gravité dans l'espace absolu du §. 853; l'on aura

(1) Lieu de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'}(R\cos b' + n't\sin a')$

$+ \frac{m}{m+m'}(r\cos b + nt\sin a - \Sigma(\cos\gamma\sin(\epsilon+v')\cos I' - \sin\gamma\cos(\epsilon+v')))$;

(2) Lieu de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'}(R\sin b' + n't\cos a')\cos I$

$+ \frac{m}{m+m'}(r\sin b + nt\cos a + \Sigma(\sin\gamma\sin(\epsilon+v')\cos I' + \cos\gamma\cos(\epsilon+v')))$;

(3) Distance perpendiculaire de la Comete au plan de l'Ecliptique $= \frac{m'}{m+m'}(R\sin b' + n't\cos a')\sin I + \frac{m}{m+m'}\Sigma \sin(\epsilon+v')\sin I'$.

Soit maintenant

A un angle tel que

$$\text{Tang A} = \frac{\text{Lieu de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds}}{\text{Lieu de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds}};$$

B un angle tel que

$$\text{Tang B} = \frac{\text{Distance perpendiculaire de la Comete au plan de l'Ecliptique}}{\text{Lieu de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds } \frac{1}{\text{cos A}}};$$

L'on aura

(4) Distance du Soleil à la projection de la Comete sur l'Ecliptique $=$ Lieu de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds $\frac{1}{\text{cos A}}$;

(5) Distance du Soleil à la Comete, ou Rayon vecteur de la Comete $=$ Lieu de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds $\frac{1}{\text{cos A cos B}}$.

Il est superflu d'avertir que l'angle A est celui que fait avec l'ancienne ligne des nœuds, la droite menée du Soleil, à la projection de la Comete sur l'Ecliptique ; & que l'angle B est celui que fait le rayon vecteur de la Comete, avec la droite menée du Soleil à la projection de la Comete sur l'Ecliptique.

On aura les quantités analogues pour la Terre, en substituant dans les formules v à v'; & le coefficient $\frac{m'}{m+m'}$ au coefficient $\frac{m}{m+m'}$, dans les termes qui renferment Σ. On se rappellera aussi que les angles $\iota+v$, & $\iota+v'$ different toujours entr'eux de 180^d.

Des vîtesses tangentielles de la Terre & de la Comete dans leurs nouvelles orbites autour du Soleil, à l'instant où la Terre & la Comete se dégagent de la sphere de commune attraction.

(878) Nous venons de déterminer les rayons vecteurs de la Terre & de la Comete dans les nouvelles orbites qu'elles décrivent autour du Soleil, pour l'instant où la Terre & la Comete se dégagent de la sphere de commune attraction ; & nous connoissons la position de ces rayons vecteurs, soit dans l'espace absolu, soit relativement à l'ancien plan de l'Ecliptique; il faut déterminer maintenant les vîtesses tangentielles de la Terre & de la Comete dans leurs nouvelles orbites autour du Soleil, pour le même instant.

Les considérations précédentes fournissent un moyen facile pour déterminer ces vîtesses. En effet, nous avons donné (§. 861 & 870) l'expression des vîtesses tangentielles de la Terre & de la Comete, dans leurs trajectoires relatives, & nous avons vu que si l'on suppose $n''=\sqrt{(n'^2+n^2-2nn'(\sin a \sin a'+\cos a \cos a' \cos I))}$, la vîtesse tangentielle de la Terre dans son orbite relative, pour une minute de tems, a pour expression $\frac{m'}{m+m'}n''$, & celle de la Comete a pour expression $\frac{m}{m+m'}n''$. Nous avons appris de plus (§. 870) à connoître l'angle des tangentes à ces or-

bites relatives, avec les rayons vecteurs, sur le plan des trajectoires relatives; & comme l'on connoît d'ailleurs la position des rayons vecteurs pour l'instant dont il s'agit, relativement à la route rectiligne du centre commun de gravité sur le plan des orbites relatives, on connoît pareillement l'angle des tangentes aux orbites relatives, avec la route rectiligne du centre commun de gravité. Soit

ξ' l'angle de la Tangente à l'orbite relative de la Comete, avec la route rectiligne du centre commun de gravité, sur le plan des orbites relatives, pour l'instant dont il s'agit;

ξ l'angle de la Tangente à l'orbite relative de la Terre, avec la route rectiligne du centre commun de gravité, sur le plan des orbites relatives, pour le même instant.

On trouvera, par une analyse semblable à celle des paragraphes précédens, que

(1) Vîtesse tangentielle de la Comete pour une minute de tems dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds, due au mouvement de la Comete dans son orbite relative

$$= \frac{m}{m+m'} n'' (\sin\gamma \cos(\iota+\xi') - \cos\gamma \sin(\iota+\xi') \cos I');$$

(2) Vîtesse tangentielle de la Comete pour une minute de tems, dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds, due au mouvement de la Comete dans son orbite relative

$$= \frac{m}{m+m'} n'' (\cos\gamma \cos(\iota+\xi') + \sin\gamma \sin(\iota+\xi') \cos I');$$

(3) Vîtesse tangentielle de la Comete pour une minute de tems, dans le sens perpendiculaire à l'Ecliptique, due au mouvement de la Comete dans son orbite relative $= \frac{m}{m+m'} n'' \sin(\iota+\xi') \sin I'$;

(4) Vîtesse tangentielle de la Terre pour une minute de tems, dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds, due au mouvement de la Terre dans son orbite relative $= \frac{m'}{m+m'} n'' (\sin\gamma \cos(\iota+\xi) - \cos\gamma \sin(\iota+\xi) \cos I')$;

(5) Vîtesse tangentielle de la Terre pour une minute de tems, dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds, due au mouvement de la Comete dans son orbite relative

$$= \frac{m'}{m+m'} n'' (\cos\gamma \cos(\iota+\xi) + \sin\gamma \sin(\iota+\xi) \cos I');$$

(6) Vîtesse tangentielle de la Terre pour une minute de tems, dans le sens perpendiculaire à l'Ecliptique, due au mouvement de la Terre dans son orbite relative $= \frac{m'}{m+m'} n'' \sin(\iota+\xi) \sin I'$.

(879) Les vîtesses dont nous venons de donner les expressions, ne

sont encore qu'une partie des vîtesses tangentielles de la Terre & de la Comete dans leurs orbites relatives. Car tandis que la Terre & la Comete décrivent leurs orbites autour du centre commun de gravité dans le plan des orbites relatives, elles sont entraînées d'un mouvement commun avec le centre de gravité. Il conviendra donc d'ajouter aux expressions précédentes, les vîtesses absolues du centre commun de gravité suivant les mêmes directions (§. 851) pour une minute de tems; & l'on aura, en conservant les définitions de n & de n' des §. précédens, & en supposant dans les expressions du §. 851, $t = 1$,

(1) Vîtesse tangentielle de la Comete pour une minute de tems dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds $= \frac{m'}{m+m'} n' \sin a'$

$+ \frac{m}{m+m'} (n \sin a + n'' (\sin \gamma \cos (\iota + \xi') - \cos \gamma \sin (\iota + \xi') \cos I')$;

(2) Vîtesse tangentielle de la Comete pour une minute de tems, dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds

$= \frac{m'}{m+m'} n' \cos a' \cos I + \frac{m}{m+m'} (n \cos a + n'' (\cos \gamma \cos (\iota + \xi')$

$+ \sin \gamma \sin (\iota + \xi') \cos I')$;

(3) Vîtesse tangentielle de la Comete pour une minute de tems, dans le sens perpendiculaire au plan de l'Ecliptique

$= \frac{m'}{m+m'} n' \cos a' \sin I + \frac{m}{m+m'} n'' \sin (\iota + \xi') \sin I'$;

(4) Vîtesse tangentielle de la Terre pour une minute de tems, dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds $= \frac{m}{m+m'} n \sin a$

$+ \frac{m'}{m+m'} (n' \sin a' + n'' (\sin \gamma \cos (\iota + \xi) - \cos \gamma \sin (\iota + \xi) \cos I')$;

(5) Vîtesse tangentielle de la Terre pour une minute de tems, dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds $= \frac{m}{m+m'} n \cos a$

$+ \frac{m'}{m+m'} (n' \cos a' \cos I + n'' (\cos \gamma \cos (\iota + \xi) + \sin \gamma \sin (\iota + \xi) \cos I')$;

(6) Vîtesse tangentielle de la Terre pour une minute de tems, dans le sens de la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique

$= \frac{m'}{m+m'} (n' \cos a' \sin I + n'' \sin (\iota + \xi) \sin I')$.

(880) Soit

A′ un angle tel que

$$\text{Tang } A' = \frac{\text{Vîtesse de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds}}{\text{Vîtesse de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds}}$$

B′ un angle tel que

$$\text{Tang } B' = \frac{\text{Vîtesse de la Comete dans le sens de la perpendiculaire à l'Ecliptique}}{\text{Vîtesse de la Comete dans le sens de l'ancienne ligne des nœuds } \frac{1}{\cos A'}},$$

L'on

L'on aura

(1) Vîteſſe tangentielle abſolue de la Comete pour une minute de tems = Vîteſſe de la Comete dans le ſens de l'ancienne ligne des nœuds $\times \frac{1}{\text{cof} A' \text{cof} B'}$.

On ſent aiſément que l'on aura les équations relatives à la Terre, en ſubſtituant dans les expreſſions précédentes, la Terre à la Comete.

Du tems où l'Aſtre perceroit le plan de l'Ecliptique, s'il ſe mouvoit uniformément ſuivant la tangente à ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil, avec la vîteſſe tangentielle qu'il a à l'inſtant où il commence à décrire cette trajectoire.

(881) Nous avons donné (§. 879) l'expreſſion de la vîteſſe tangentielle de l'Aſtre, dans le ſens de la perpendiculaire au plan de l'Ecliptique, pour une minute de tems, à l'inſtant où il commence à décrire ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil. Nous avons donné (§. 876) l'expreſſion de la diſtance perpendiculaire de l'Aſtre au plan de l'Ecliptique, pour le même inſtant.

Si donc l'on nomme

t le nombre de minutes horaires écoulées depuis l'inſtant où l'Aſtre commence à décrire ſa nouvelle trajectoire, juſqu'à celui où il perçeroit le plan de l'Ecliptique, s'il ſe mouvoit uniformement ſuivant la tangente à ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil, avec la vîteſſe tangentielle qu'il a, à l'inſtant où il commence à décrire cette trajectoire;

L'on aura

(1) $t = \frac{\text{Diſtance perpendiculaire de l'Aſtre au plan de l'Ecliptique (§. 876)}}{\text{Vîteſſe tangentielle de l'Aſtre pour une minute de tems dans le ſens perp. à l'Eclipt. (§. 879)}}$.

(882) Si l'on cherche maintenant la diſtance de l'Aſtre au Soleil ſur le plan de l'Ecliptique, à l'inſtant où il perceroit l'Ecliptique dans les hypotheſes ci-deſſus; que l'on nomme

R' le rayon vecteur de l'Aſtre dans ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil, à l'inſtant où il commence à décrire cette trajectoire;

& que l'on conſerve les définitions des angles A & B du §. 877; l'on aura

Diſtance de l'Aſtre au plan de l'Ecliptique, à l'inſtant où il commence à décrire ſa nouvelle trajectoire = R' ſin B;

Diſtance du Soleil à la projection de l'Aſtre ſur le plan de l'Ecliptique pour le même inſtant = R' cof B;

Diſtance de la projection de l'Aſtre au Soleil ſur le plan de l'Ecliptique, priſe ſur la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds, pour le même inſtant = R' cof B ſin A;

Diſtance de la projection de l'Aſtre au Soleil ſur le plan de l'Ecliptique, priſe ſur l'ancienne ligne des nœuds, pour le même inſtant = R' cof B cof A.

D'où l'on conclura

(1) Diſtance du Soleil à l'Aſtre ſur le plan de l'Écliptique, priſe ſur la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds, à l'inſtant où l'Aſtre perceroit l'Ecliptique $= R' \cos B \sin A + t \times$ vîteſſe tangentielle de l'Aſtre pour une minute, dans le ſens perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds;

(2) Diſtance du Soleil à l'Aſtre ſur le plan de l'Ecliptique, priſe dans le ſens de l'ancienne ligne des nœuds, à l'inſtant où l'Aſtre perceroit l'Ecliptique $= R' \cos B \cos A + t \times$ vîteſſe tangentielle de l'Aſtre pour une minute, dans le ſens de l'ancienne ligne des nœuds.

Si l'on nomme

A″ un angle tel que

$$\text{Tang } A'' = \frac{\text{Diſtance du Soleil à l'Aſtre priſe ſur la perpendiculaire à l'ancienne ligne des nœuds}}{\text{Diſtance du Soleil à l'Aſtre priſe dans le ſens de l'ancienne ligne des nœuds}},$$

L'on aura

(3) Diſtance du Soleil à l'Aſtre ſur le plan de l'Ecliptique, à l'inſtant où l'Aſtre perceroit l'Ecliptique $=$ Diſtance du Soleil à l'Aſtre priſe dans le ſens de l'ancienne ligne des nœuds $\frac{1}{\cos A''}$.

De la poſition des nœuds des nouvelles trajectoires autour du Soleil, ſur le plan de l'Ecliptique primitif.

(883) Soit

N l'angle de la ligne des nœuds de la nouvelle trajectoire autour du Soleil, avec l'ancienne ligne des nœuds, ſur le plan de l'Ecliptique primitif.

Il eſt évident que l'on aura

$$(1)\ \text{Tang } N = \frac{\text{Diſtance du Soleil à l'Aſtre priſe ſur la perpend. à l'ancienne ligne des nœuds (§. 879)}}{\text{Diſtance du Soleil à l'Aſtre priſe ſur l'ancienne ligne des nœuds (§. 839)}};$$

Dans cette ſolution, les diſtances du Soleil à l'Aſtre, priſes ſoit ſur l'ancienne ligne des nœuds, ſoit ſur la perpendiculaire à cette ligne, ſont celles qui répondent à l'inſtant où, dans les hypotheſes dont il s'agit, l'Aſtre perceroit l'Ecliptique. Et ſi l'on conſerve la définition de l'angle A du §. 877, & que l'on nomme

F l'angle que fait ſur le plan de l'Ecliptique primitif, la ligne des nœuds de la nouvelle trajectoire, avec la droite menée du Soleil à la projection de l'Aſtre ſur l'Ecliptique, à l'inſtant où il commence à décrire ſa nouvelle trajectoire;

L'on aura

$$(2)\ F = N - A.$$

De l'inclinaiſon du plan de la nouvelle trajectoire de l'Aſtre, ſur le plan de l'Ecliptique primitif.

(884) L'inclinaiſon du plan de la nouvelle trajectoire ſur le plan de l'Ecliptique primitif, n'eſt pas difficile à déterminer. En effet, ſi de la

projection de l'Aſtre ſur l'Ecliptique, à l'inſtant où il commence à décrire ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil, l'on abaiſſe une perpendiculaire ſur la nouvelle ligne des nœuds, on aura évidemment

- Perpendiculaire ſur la nouvelle ligne des nœuds = Diſtance du Soleil à la projection de l'Aſtre ſur l'Ecliptique × ſin F.

Nous avons donné (§. 877) l'expreſſion de la diſtance du Soleil à la projection de l'Aſtre ſur l'Ecliptique, ainſi que l'expreſſion de la diſtance perpendiculaire de l'Aſtre au plan de l'Ecliptique, pour l'inſtant où l'Aſtre commence à décrire ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil. Maintenant ſi l'on nomme

I″ l'inclinaiſon du plan de la nouvelle trajectoire ſur l'Ecliptique ;

L'on aura

$$(1)\ \text{Tang}\ I'' = \frac{\text{Diſtance perpendiculaire de l'Aſtre au plan de l'Ecliptique (§. 877)}}{\text{Diſtance du Soleil à la projection de l'Aſtre ſur l'Ecliptique} \times \sin F}.$$

De l'angle du rayon vecteur de l'Aſtre, avec la tangente à la nouvelle trajectoire qu'il décrit autour du Soleil, à l'inſtant où il commence à décrire cette trajectoire.

(885) Il ne me reſte plus, pour compléter cette théorie, qu'à déterminer l'angle du rayon vecteur de l'Aſtre, avec la tangente à la nouvelle trajectoire qu'il décrit autour du Soleil, pour l'inſtant où il commence à décrire cette trajectoire. Cette nouvelle queſtion n'eſt pas difficile à réſoudre. En effet, ſi l'on conſerve toutes les définitions précédentes, & notamment celles de t du §. 881, & des angles A′, B′ du §. 880, il eſt clair que l'on aura,

(1) Prolongement de la premiere tangente à la nouvelle orbite, juſqu'au point où cette tangente perceroit l'Ecliptique = t × vîteſſe tangentielle abſolue de la Comete pour une minute de tems.

Maintenant, ſi ſur le plan de la nouvelle orbite de la Comete, l'on conſidere le triangle rectiligne formé ; par le premier rayon vecteur de cette nouvelle orbite ; par la diſtance du Soleil à l'Aſtre, à l'inſtant où l'Aſtre perceroit l'Ecliptique, s'il parcouroit d'un mouvement uniforme la tangente à ſa nouvelle trajectoire ; & par le prolongement de cette premiere tangente juſqu'au point où elle perceroit l'Ecliptique ; puiſque dans ce triangle rectiligne l'on connoît les trois côtés ; c'eſt-à-dire le premier rayon vecteur (§. 877) ; la diſtance du Soleil à l'Aſtre à l'inſtant où il perceroit l'Ecliptique (§. 882) ; & le prolongement de la nouvelle tangente juſqu'au point où cette tangente perceroit l'Ecliptique (éq. (1)) ; on déterminera facilement l'angle du rayon vecteur de l'Aſtre avec la tangente à la nouvelle trajectoire qu'il décrit autour du Soleil, pour l'inſtant où il commence à décrire cette trajectoire ; en remarquant toutefois que cet angle eſt oppoſé à la diſtance du Soleil à l'Aſtre, à l'inſtant où cet Aſtre perceroit l'Ecliptique, s'il parcouroit d'un mouvement uniforme la tangente à ſa nouvelle trajectoire.

Remarque sur les équations précédentes.

(886) Les équations précédentes demandent quelque atttention, lorsqu'on les emploie. Ces attentions néanmoins se bornent à connoître l'espece des angles dont on fait usage; pour donner à leurs sinus, à leurs cosinus & à leurs tangentes, les signes qui leur conviennent dans chaque cas particulier. Je n'entrerai point dans un grand détail sur ces attentions de calcul; il me suffit d'en avoir averti le Lecteur; & l'on pourra toujours éviter les erreurs, en comparant la supposition primitive sur le sens des lignes & des angles, avec ce qui a lieu dans le cas particulier pour lequel on voudra calculer.

Application de théories précédentes à la Comete du §. 863.

(887) Nous pouvons calculer maintenant la nouvelle orbite de la Comete du §. 863, par rapport au Soleil. On trouvera, par exemple, que la Comete sortira de la sphere d'attraction de la Terre, 1 jour 23^h 54′ après le passage de la Comete par l'ancienne ligne des nœuds; le rayon vecteur de la Comete dans son orbite relative sera, pour cet instant, égal à 0,00259290. Il sera, avec la route rectiligne du centre commun de gravité sur le plan des orbites relatives, un angle de 351^d 37′ 18″; l'angle de la tangente à l'orbite relative avec le rayon vecteur, sera de 177^d 11′ 8″; il sera de 354^d 26′ 10″ avec la route rectiligne du centre commun de gravité sur le plan des orbites relatives. La vîtesse tangentielle dans l'orbite relative de la Comete, sera de 19525 pieds par seconde.

En un mot, si l'on fait tous les calculs indiqués ci-dessus, on trouvera que le plan de la nouvelle orbite de la Comete sera incliné de 0^d 43′ 51″ sur l'ancienne orbite de la Terre; le nœud ascendant deviendra nœud descendant; & la nouvelle ligne des nœuds de la Comete fera un angle de 183^d 5′ 11″ avec l'ancienne ligne des nœuds. Le premier rayon vecteur de la Comete sera égal à 1,00033; l'angle de la tangente à l'orbite de la Comete, avec le rayon vecteur, sera de 88^d 50′ 10″; & la vîtesse tangentielle sera égale à 0,0000168868 pour une minute de tems. On connoîtra donc toutes les dimensions de la nouvelle orbite de la Comete.

Calcul de la nouvelle orbite de la Terre.

(888) Ce qu'il nous importe le plus de connoître, ce sont les perturbations qu'éprouveroit l'orbite de la Terre. On trouvera, par les formules précédentes, que la nouvelle orbite de la Terre seroit inclinée de 2^d 4′ 10″ sur l'ancienne orbite; que son nœud seroit situé dans 8^s 9^d 20′ 21″; que ce nœud seroit ascendant relativement à l'ancienne orbite; que le rayon vecteur de la Terre seroit égal à 1,01449, au lieu de 1,01435 dans l'ancienne orbite; que l'angle du rayon vecteur avec

la tangente à l'orbite de la Terre, seroit de 89^{d} 18′ 20″, au lieu de 89^{d} 30′ 0″; que la vîtesse tangentielle, pour cet instant, seroit à la vîtesse tangentielle dans l'Ecliptique, comme 19731 à 19689; que le lieu de l'aphélie seroit plus avancé d'environ 20^{d}; que l'excentricité seroit de 0,01620, la moyenne distance actuelle étant 1; que le demi-grand axe seroit de 1,00441; & que la durée de la nouvelle Année seroit de 367 jours 16^{h} 4′ 48″. Il n'y auroit guere que les Astronomes qui s'appercevroient d'abord de ces variations.

Usage des méthodes précédentes pour retrouver une ancienne orbite de Comete.

(889) Si l'on soupçonnoit que l'orbite actuelle d'une Comete est une ancienne orbite troublée, on pourroit faire usage des méthodes précédentes pour retrouver cette ancienne orbite.

Afin de me faire entendre plus clairement, appliquons les raisonnemens à la premiere Comete de 1770, dont l'orbite actuelle est, suivant M. Léxell, une ancienne orbite troublée & dénaturée par l'approximation de Jupiter à la Comete, en Mai 1767. Au surplus, je ne prétends point que l'on doive conclure de nos raisonnemens, que notre méthode puisse s'appliquer, sans restriction, à Jupiter; attendu la masse considérable de cette Planete. J'ai voulu seulement rendre mes raisonnemens plus sensibles, en les appliquant à un exemple.

Je détermine d'abord le rayon de la sphere d'attraction de Jupiter; je calcule, d'après les nouveaux élémens de la Comete, l'époque où elle est sortie de cette sphere d'attraction, ainsi que la direction de ses mouvemens relativement à Jupiter, pour cette époque. J'imprime à la Comete & à Jupiter, des mouvemens égaux, mais dans un sens opposé aux mouvemens réels de ces Astres; je calcule quelle seroit dans cette hypothese, l'orbite troublée qui en résulteroit. Cette orbite troublée est l'ancienne orbite de la Comete.

La démonstration de ce procédé est fort simple. En effet, dans le cas que nous considérons, tous les mouvemens, toutes les positions relatives de la Comete & de Jupiter sont les mêmes, mais dans un ordre renversé, que dans la supposition où, partant de l'orbite primitive, l'on auroit cherché à déterminer l'orbite troublée; l'on doit donc évidemment, lorsque l'on part de l'orbite troublée, retrouver l'orbite primitive.

Nous remarquerons enfin que si la Comete de 1770 est véritablement dans le cas d'éprouver de grandes perturbations de la part de Jupiter, & que la durée de sa révolution soit telle qu'elle ramene souvent les positions respectives de la Comete & de Jupiter, où elle éprouve des perturbations de la part de cet Astre, son orbite n'est qu'une suite perpétuelle de vicissitudes, fort éloignée de cette stabilité dont jouissent nos orbites presque circulaires.

CHAPITRE QUATORZIEME.

De quelques questions analogues aux recherches du Chapitre précédent.

JE me propose, dans ce Chapitre, d'éclaircir quelques questions analogues aux recherches précédentes, & qui m'ont paru mériter l'attention des Savans. Ces questions ne seront pas traitées avec toute la rigueur qu'il faudroit employer, si l'on se proposoit de parvenir à des résultats absolument rigoureux; mais ce que j'en dirai m'a paru suffisant pour déterminer l'opinion des Geometres sur ces questions.

ARTICLE PREMIER.

Recherches qui peuvent conduire à déterminer si la Lune a été primitivement une Comete qui ait circulé autour du Soleil.

(890) C'étoit une opinion généralement reçue parmi les Arcadiens, que leurs Ancêtres avoient habité la Terre, avant que cet Astre eût un Satellite. Cette opinion nous a été transmise par Lucien. D'ailleurs rien n'est plus formel que le passage d'Ovide à ce sujet. A l'occasion de l'Arcadie, ce Poete s'exprime ainsi dans ses Fastes,

Orta prior Lunâ, de se si creditur ipsi,
A magno Tellus Arcade nomen habet.

Quelques Philosophes, frappés de ces autorités & de l'aspect de la Lune vue au télescope, ont cru y découvrir les vestiges d'un corps brûlé par le Soleil, & dont toute l'humidité avoit été tellement dissipée qu'il n'avoit point d'atmosphere. Ils ont pensé en conséquence que la Lune pouvoit bien être une Comete qui, ayant passé très-près du Soleil, & ensuite très-près de la Terre, avoit été obligée de devenir son Satellite. Nous nous proposons d'examiner si cette opinion est conforme aux loix de la méchanique.

Des principes qui peuvent guider dans la question dont il s'agit.

(891) Pour nous guider dans la question dont il s'agit, on se rappellera que si l'on nomme

a le demi-grand axe de la trajectoire décrite par un corps autour d'un centre d'attraction;

E la distance du foyer au centre de la trajectoire;

R le rayon vecteur de la trajectoire;

P le Parametre de la trajectoire ;

θ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur ;

ρ le rayon de la sphere attirante ;

δ le nombre de pieds que parcourt un corps grave pendant la premiere seconde de sa chute, à la surface de la sphere d'attraction ;

V la vîtesse tangentielle de la Planete qui décrit la trajectoire ; cette vîtesse est celle qui répond à une seconde de tems ;

M la masse de la sphere d'attraction ;

L'on a (§. 414 éq. (1), §. 416 éq. (4), §. 423 éq. (1)), en faisant abstraction de la masse de la Planete attirée,

$$(1)\ \frac{E}{a} = \frac{\sqrt{\left(R\,(R-P) + \frac{P^2}{4\,\sin^2\theta}\right)}}{R};$$

$$(2)\ P = \frac{2R^2}{M}\,V^2 \sin^2\theta.$$

$$(3)\ 2\rho^2\delta - M = 0.$$

Si dans l'équation (2) l'on élimine M au moyen de l'équation (3), l'on aura

$$(4)\ P = \frac{R^2\,V^2 \sin^2\theta}{\rho^2\delta}.$$

Et si l'on porte cette valeur de P dans l'équation (1), elle deviendra

$$(5)\ \frac{E}{a} = \sqrt{\left(1 - \frac{RV^2 \sin^2\theta}{\rho^2\delta} + \frac{1}{4}\,\frac{R^2\,V^4 \sin^2\theta}{\rho^4\delta^2}\right)}.$$

Il ne s'agit que de déterminer si la valeur de $\frac{E}{a}$ est moindre, égale, ou plus grande que 1. Dans le premier cas, la trajectoire est une ellipse; dans le second cas, la trajectoire est une parabole; dans le troisieme cas c'est une hyperbole.

Dans la discussion suivante, j'appellerai Comete parabolique, Comete hyperbolique, Comete elliptique, une Comete qui décrit une parabole, une hyperbole, une ellipse autour du Soleil.

Aucune Comete parabolique ou hyperbolique ne peut devenir Satellite de la Terre.

(892) Pour qu'une Comete puisse devenir Satellite de la Terre, il faut, d'après ce qui vient d'être remarqué, que $\frac{RV^2\sin^2\theta}{\rho^2\delta}$ surpasse $\frac{1}{4}\,\frac{R^2\,V^4\sin^2\theta}{\rho^4\delta^2}$; ou, ce qui revient au même, que $4\rho^2\delta$ surpasse RV^2; car autrement, $\frac{E}{a}$ ne peut pas être une quantité moindre que 1 ; & par conséquent la Comete ne peut pas décrire une courbe rentrante autour de la Terre.

Dans l'expression précédente, ρ est le rayon de la Terre; δ est la quantité de pieds qu'un corps grave parcourt pendant la premiere seconde de sa

chute à la ſurface de la Terre ; R eſt la diſtance de la Comete à la Terre, à l'inſtant où elle s'engage dans la ſphere d'attraction de la Terre ; & V eſt la viteſſe relative de la Comete ; c'eſt-à-dire, le nombre de pieds qu'elle parcourt d'un mouvement relatif, pendant une ſeconde, par rapport à la Terre regardée comme centre de ſes mouvemens, & dans un repos relatif.

Puiſque $4\rho^2\delta$ doit ſurpaſſer RV^2, le Problême ſera d'autant plus poſſible que R & V ſeront des quantités plus petites. Nous avons vu (§. 841) que très-probablement $R = 121,38\,\rho$; & il ne paroît pas propoſable de le ſuppoſer plus petit ; il faut donc que $4\rho^2\delta$ ſurpaſſe $121,38\,V^2$; mais $\delta = 15,098$ pieds ; $\rho = 1432,5 \times 13692$ pieds ; donc V^2 doit être moindre que $\frac{4 \times 1432,5 \times 13692 \times 15,098}{121,38}$ pieds ; & V moindre que 2779 pieds.

J'ai ſuppoſé dans ces calculs, que la lieue terreſtre eſt de 2282 toiſes, ou de 13692 pieds.

Ces calculs font voir qu'aucune Comete parabolique, & à plus forte raiſon, qu'aucune Comete hyperbolique ne peut devenir Satellite de la Terre. En effet, ſi l'on ſuppoſe une Comete parabolique, ſa viteſſe dans ſon orbite, ſera à celle de la Terre, comme $\sqrt{2}$ eſt à 1 ; car on peut faire abſtraction de la petite différence qu'il y a entre les diſtances de la Comete & de la Terre, au Soleil. Si donc l'on ſuppoſe les mouvemens de la Comete & de la Terre dans le même ſens ; & cette ſuppoſition donne la plus petite valeur de la viteſſe relative V ; l'on aura $V = \sqrt{2} - 1$; le mouvement de la Terre étant 1. Mais le mouvement de la Terre pendant une ſeconde $= 39025$ pieds ; donc, d'après cette conſidération, aucune Comete parabolique & à plus forte raiſon, aucune Comete hyperbolique ne peut être forcée par la Terre de lui ſervir de Satellite.

La Lune n'eſt donc point une Comete parabolique ou hyperbolique que la Terre ait forcée à devenir ſon Satellite. Examinons maintenant l'hypotheſe d'une Comete elliptique.

Des conditions néceſſaires pour qu'une Comete elliptique puiſſe devenir Satellite de la Terre.

(893) Il eſt évident qu'aucune Comete ne pourroit devenir Satellite de la Terre, qu'autant que cette Comete, au moment où elle s'engageroit dans la ſphere d'attraction de la Terre, ſeroit à l'extrémité de la haute apſide de la trajectoire elliptique qu'elle tendroit à décrire autour de la Terre ; & que ſon mouvement relatif dans le ſens de la tangente à la trajectoire, ſeroit perpendiculaire au rayon vecteur. Suppoſons en effet que la ſuppoſition précédente n'ait pas lieu, & que la direction du mouvement, au lieu d'être perpendiculaire au rayon vecteur, fît un angle quelconque avec ce rayon, il eſt aiſé de démontrer que la Comete ne pourroit pas demeurer toujours dans la ſphere d'attraction de la Terre. En effet, par la nature des trajectoires coniques, lorſqu'après avoir traverſé la ſphere d'attraction de la Terre, la Comete ſe retrouveroit à l'extrémité

de

de cette sphere, le rayon vecteur de la Comete seroit situé relativement à l'axe de l'orbite relative, d'une maniere analogue à la position qu'avoit le rayon vecteur par lequel la Comete est entrée dans la sphere d'attraction. Les vîtesses tangentielles seroient égales; leurs directions seroient seulement différentes. Dans le premier cas, la vîtesse tendoit à faire entrer la Comete dans la sphere d'attraction de la Terre; dans le second cas, elle tendroit à l'en faire sortir; & comme par la supposition l'attraction de la Terre cesse d'agir en ce point, la Comete s'éloigneroit de notre globe, en vertu de sa vîtesse tangentielle.

(894) Il ne suffiroit point que le mouvement relatif de la Comete dans le sens de la tangente à la trajectoire qu'elle tendroit à décrire autour de la Terre, fût perpendiculaire au rayon vecteur; il faudroit de plus que le point par lequel la Comete entreroit dans la sphere d'attraction de la Terre, fût la haute apside de sa trajectoire. En effet, puisque par la supposition, le mouvement tangentiel est perpendiculaire au rayon vecteur, le point dont il s'agit est ou la haute ou la basse apside. Supposons un moment que ce soit la basse apside; il est évident que la Comete ne pourra point gagner la haute apside sans sortir de la sphere d'attraction de la Terre, & que par conséquent elle cessera d'être attachée à la Terre.

(895) Cette derniere considération donne tout de suite le cas particulier où la Comete peut commencer à devenir Satellite de la Terre; c'est celui où elle circuleroit dans un cercle, à l'extrémité de la sphere d'attraction. Dans ce cas, il faut dans l'équation (5) du §. 891, supposer $E=0$; $\sin\theta=1$; $R=121,38\,\rho$; l'on aura donc

$$(1)\quad 2\rho^2\delta - RV^2 = 0;$$

D'où l'on conclura $V = 2176$ pieds.

Une Comete elliptique ne pourroit donc devenir Satellite de la Terre, qu'autant qu'à l'instant où elle s'engageroit dans la sphere d'attraction de la Terre, sa vîtesse relative seroit tout au plus de 2176 pieds par seconde, la direction de son mouvement étant d'ailleurs perpendiculaire au rayon vecteur mené de la Terre à la Comete; la courbe qu'elle décriroit alors seroit un cercle situé à l'extrémité de la sphere d'attraction.

Si la vîtesse relative de la Comete étoit plus grande que 2176 pieds par seconde, la Comete ne pourroit pas devenir Satellite de la Terre; mais si cette vîtesse étoit plus petite, elle pourroit décrire une ellipse autour de notre globe, de sorte cependant qu'à chacune de ses révolutions elle passeroit à l'extrémité de la sphere d'attraction de la Terre.

Remarque sur les solutions précédentes.

(896) Si l'hypothese dont nous sommes partis, étoit rigoureuse, nos conclusions le seroient pareillement; mais nous ne pouvons pas nous dissi-

muler que dans cette hypothese, l'on néglige de petites quantités, nulles à la vérité relativement aux questions que nous nous proposions d'examiner alors, mais qui dans le point de passage dont il s'agit, pourroient être comparables à celles que nous considérons. Il nous est donc impossible de prononcer définitivement si une Comete elliptique, ayant tourné primitivement autour du Soleil, ne pourroit pas devenir Satellite de la Terre. Ce qu'il y a de sûr, c'est que dans le cas même où géométriquement parlant, l'impossibilité n'en paroîtroit pas démontrée, la réunion des circonstances qui devroient concourir pour que cela eût lieu, est telle que l'événement est contre toute probabilité. D'ailleurs cette Comete ne tiendroit presque point à la Terre; & lorsqu'elle se trouveroit dans sa haute apside, la plus petite force paroîtroit devoir l'en détacher. En un mot, puisque cette Comete seroit venue d'un point pris hors de la sphere d'attraction de la Terre, & qu'elle auroit primitivement circulé autour du Soleil comme centre de ses mouvemens, lorsque la suite des révolutions rameneroit les mêmes positions respectives du Soleil, de la Terre & de la Comete, elle devroit cesser de tourner autour de la Terre, & recommencer à circuler autour du Soleil.

Application des principes à la Lune.

(897) Nous venons de discuter les raisons qui doivent faire douter qu'une Comete elliptique puisse dans aucun cas devenir Satellite de la Terre; mais il s'en faut beaucoup que, relativement à la Lune, l'incertitude soit aussi grande. La Lune est beaucoup en-deçà de la limite que nous avons donnée à la sphere d'attraction de la Terre; sa vitesse relative est beaucoup plus grande que 2176 pieds par seconde de tems; elle paroît d'ailleurs fortement attachée à la Terre. Ses mouvemens calculés par les formules les plus rigoureuses du Problême des trois corps, & pris dans un ordre rétrograde, ne présentent aucune circonstance où l'on puisse soupçonner qu'elle soit dans le cas de cesser de tourner autour de notre globe. Quand donc on auroit quelque incertitude sur la possibilité du fait, relativement à des Cometes qui seroient à peu près dans le cas que nous avons discuté dans le §. 895, ces doutes ne pourroient pas, suivant moi, s'appliquer à la Lune.

(898) Il me paroît suivre évidemment de ce qui vient d'être dit, que la Terre ne peut point espérer de nouveau Satellite. Certainement elle ne peut forcer aucune Comete parabolique ou hyperbolique à tourner autour d'elle; & quand même on ne regarderoit point comme impossible l'hypothese du §. 893, la Terre ne pourroit espérer de nouveau Satellite, qu'autant qu'elle forceroit une Comete elliptique à s'attacher à elle. Mais une pareille Comete auroit nécessairement une orbite qui approcheroit dans beaucoup de points de celle de la Terre, & elle n'auroit pas échappé jusqu'ici aux Observateurs.

Si la Terre ne peut point eſpérer de nouveau Satellite, elle ne doit pas craindre, par la même raiſon, de devenir Satellite d'une Comete. Son orbite pourroit être altérée, ſi la Comete avoit une grande maſſe ; mais la Terre continueroit d'avoir le Soleil pour centre de ſes mouvemens.

Remarques ſur les Satellites de Jupiter, de Saturne & d'Herſchell.

(899) Ce que nous avons dit de la Lune, s'applique également aux Satellites de Jupiter, de Saturne & d'Herſchell. Il y a même des raiſons encore plus fortes pour ces Satellites que pour la Lune. Ils ſont, toute proportion gardée, beaucoup plus en-deçà de la limite des ſpheres d'attraction de ces Planetes, que la Lune ne l'eſt de la limite de la ſphere d'attraction de la Terre. D'ailleurs, dans leur haute apſide, ces Satellites devroient paſſer à peu près à une même diſtance de la Planete, c'eſt-à-dire, à l'extrémité du rayon de la ſphere d'attraction ; ce qui eſt contraire à ce que l'on obſerve. Tout me paroît donc écarter l'idée de regarder la Lune & les Satellites de Jupiter, de Saturne & d'Herſchell, comme des Cometes qui, ayant tourné primitivement autour du Soleil, ont été obligées par notre globe, par Jupiter, par Saturne & par Herſchell, de circuler autour d'eux; c'eſt du moins ce qui me paroît évident, lorſque l'on ne fait entrer en ligne de compte que la ſeule attraction. Examinons maintenant ce qui réſulteroit de l'hypotheſe dans laquelle on ſuppoſeroit qu'il y a eu choc entre ces corps ; ou qu'à l'approche de ces Planetes, les Cometes ont rencontré un fluide qui leur a fait perdre une partie de leur mouvement.

Examen de ce qui arriveroit, ſi, à l'approche de la Planete, la Comete rencontroit un fluide qui lui fît perdre une partie de ſon mouvement.

(900) Pour ſe former plus facilement l'idée de ce qui arriveroit, ſi à l'approche de la Planete, la Comete rencontroit un fluide qui lui fît perdre une partie de ſon mouvement, conſidérons ce qui arriveroit ſi la Comete & la Planete tendoient à ſe rencontrer centre à centre ; & faiſons abſtraction du choc qui auroit néceſſairement lieu dans ce cas. Suppoſons d'abord que la Planete ne rencontre point de fluide qui lui faſſe perdre de ſon mouvement. Au moment où la Comete s'engagera dans la ſphere d'attraction de la Planete, ſon mouvement vers la Planete s'accélérera ; & elle ne perdra ſon accélération acquiſe, que lorſqu'après ſa plus grande approximation de la Planete, elle ſera parvenue à une diſtance de la Planete égale au rayon de la ſphere d'attraction ; elle continuera alors à ſe mouvoir, comme ſi elle n'eût pas traverſé la ſphere d'activité de la Planete.

Suppoſons maintenant que la Comete rencontre un fluide réſiſtant ; alors arrivée à l'extrémité de la ſphere d'attraction, elle continuera de ſe mouvoir, mais avec une vîteſſe moindre que celle qu'elle avoit lorſqu'elle s'eſt

engagée dans la ſphere d'activité de la Planete; pourvu cependant que la réſiſtance du milieu n'ait pas détruit toute la viteſſe qu'elle avoit d'abord.

Si au contraire, à cauſe de cette réſiſtance, la Comete ne pouvoit pas atteindre l'extrémité de la ſphere d'attraction, elle oſcilleroit quelque tems, juſqu'à ce que toute ſa vîteſſe ayant été détruite dans ſes différentes oſcillations, elle retomberoit ſur la Planete.

Quoique j'aie ſuppoſé l'orbite relative rectiligne, il eſt évident que le même genre de démonſtration s'appliqueroit à une orbite curviligne, & la Comete finiroit par tomber ſur la Planete, comme dans le cas ci-deſſus.

Examen de ce qui arriveroit ſi la Planete & la Comete venoient à ſe choquer.

(901) Il faut examiner maintenant ce qui arriveroit, ſi la Planete que je ſuppoſe dans un repos relatif par rapport à la Comete, venoit à être choquée par la Comete. Pour réſoudre cette queſtion; par le point de contact des deux Corps, menons une tangente à la Terre, & décompoſons le mouvement de la Comete, ſuivant les directions parallele & perpendiculaire à cette tangente. Le mouvement parallele à la tangente ne ſouffrira aucune altération. Quant au mouvement perpendiculaire, il ſe diſtribuera ſuivant les loix des colliſions. Si les corps étoient parfaitement élaſtiques; comme alors d'après les loix des chocs, les vîteſſes relatives ſeroient les mêmes avant & après le choc, il ne réſulteroit autre choſe qu'un changement de direction dans le mouvement relatif. Si au contraire les corps étoient parfaitement durs; comme dans ce cas il y auroit perte de vîteſſe relative dans le ſens de la perpendiculaire à la tangente, la Comete pourroit reſter dans la ſphere d'attraction de la Planete; mais cette explication ne ſeroit guere ſatisfaiſante pour expliquer comment une Comete pourroit devenir Planete ſecondaire. En effet, dans le cas où la Comete ne ſortiroit point de la ſphere d'attraction; en vertu des loix des forces centrales, à chacune de ſes révolutions, la Comete tendroit à paſſer par le point de contact; elle ſeroit donc perpétuellement ramenée à la ſurface de la Planete; elle perdroit donc à la fin tout ſon mouvement par ces différens chocs; ou du moins elle prendroit une orbite qui la feroit circuler à la ſurface de la Planete.

S'il ſe trouvoit des aſpérités à la ſurface des Corps, il pourroit réſulter un mouvement de rotation, du choc de ces corps, & une partie du mouvement ſeroit employée à produire cette rotation.

Il me ſemble infiniment probable, & j'oſerois preſque dire, démontré d'après ces réflexions, que la Lune n'eſt point une Planete qui ait circulé autour du Soleil; tout me paroît au contraire porter l'empreinte d'un arrangement primitif auſſi ancien que notre Globe.

ARTICLE II.

Objections contre le système qui suppose que la Terre & les Planetes ont été primitivement détachées du Soleil.

(902) Un des Philosophes les plus illustres de notre Siecle, à qui l'Histoire Naturelle a tant d'obligations, & que malheureusement la mort vient de nous enlever, frappé de voir que la Terre & les Planetes font leurs révolutions dans le même sens & presque dans le même plan, a supposé, pour rendre raison de ce phénomene, qu'elles ont été détachées en même tems du Soleil, par le choc d'une Comete; qu'une partie de la substance solaire a été lancée jusqu'à la distance de la Planete d'Herschell, & a formé Herschell & ses Satellites; qu'une autre partie a été lancée à la distance de Saturne, de Jupiter, de Mars, de la Terre, de Vénus, de Mercure; & a formé Saturne & ses Satellites, Jupiter & ses Satellites, Mars, la Terre & son Satellite, Vénus & Mercure. Rien n'est plus ingénieux, au premier coup-d'œil, que cette hypothese; voici cependant une objection tirée de la théorie des forces centrales, que je soumets aux partisans de ce Systême. On sait que les orbites d'Herschell, de Saturne, de Jupiter, de Mars, de la Terre, de Vénus & de Mercure, sont peu excentriques. Cette forme de trajectoires semble s'opposer à l'explication dont il s'agit. Supposons en effet, que les différentes Planetes aient été lancées en masse & telles qu'elles existent actuellement, il est démontré par la théorie des forces centrales, que dans cette hypothese, à chacune de leurs révolutions autour du Soleil, ces Corps devroient passer précisément par les mêmes points dont ils ont été détachés; & comme, par la supposition, ils ont été détachés d'une même partie du Soleil, ils devroient avoir des points de leurs orbites extrêmement voisins les uns des autres; de plus, ces orbites devroient approcher très-près du Soleil dans le périhélie, puisque primitivement ces points faisoient partie du corps même du Soleil.

(903) On dira sans doute que les Planetes n'ont point été lancées en masse; que le fluide Solaire, d'abord éparpillé par le choc de la Comete, s'est ensuite successivement ramassé autour d'un centre d'attraction. Cette supposition ne paroît pas déranger les conclusions précédentes. Prenons en effet l'exemple de la Terre; il est évident que toutes les parties du fluide qui, en se rapprochant, auroient formé notre Globe dans cette hypothese, n'auroient pas dû être fort éloignées du point qui forme actuellement le centre de la Terre; autrement l'action du Soleil sur un corpuscule placé au-delà d'une certaine limite, l'auroit empêché de se réunir à la Terre; & cette limite ne peut être infiniment grande. On peut donc considérer cette masse de fluide, comme circonscrite dans une sphere d'une étendue très-limitée, & l'on peut appliquer à ce systême particulier de corps, les loix générales du mouvement. Les actions qu'ils ont exercées les uns sur les autres pour se réunir, n'ont point dû

changer l'état du centre de gravité de ce systême particulier ; & tout ce que nous avons dit, dans la supposition que les Planetes auroient été détachées en masse, paroît s'appliquer à l'hypothese présente.

(904) Je n'ai point eu égard, dans les raisonnemens précédens, à l'action de la partie du fluide solaire, qui, détachée du Soleil en même tems que les Planetes, seroit retombée dans cet Astre. Il est évident que cette circonstance n'a pu altérer les orbites des Planetes, au point de les rendre presque circulaires, de très-excentriques qu'elles auroient été sans cela. Cette remarque s'applique également aux orbites des Satellites, dont il ne paroît point que l'on explique la circularité.

Article III.

Des trajectoires que les Satellites de Jupiter, de Saturne, d'Herschell & de la Terre, décriroient autour du Soleil, si la Terre, Saturne, Herschell ou Jupiter venoient à être anéantis tout-à-coup.

(905) Quoique la détermination des trajectoires que les Satellites de Jupiter, de Saturne, d'Herschell & de la Terre décriroient autour du Soleil, si la Terre, Saturne, Herschell ou Jupiter venoient à être anéantis tout-à-coup, ne paroisse pas tenir directement à l'objet dont nous nous sommes occupés jusqu'ici; que d'ailleurs cette recherche ne puisse avoir aucune application dans la Nature; elle m'a semblé cependant présenter un objet de curiosité assez singulier pour ne pas la passer sous silence. Je supposerai dans cette recherche, que l'action des différens Satellites les uns sur les autres, est infiniment petite, relativement à celle du Soleil. Comme cette recherche suppose qu'on connoît le nombre de pieds qu'un corps grave parcourroit à la surface du Soleil, pendant la premiere seconde de sa chute, on se rappellera que j'ai fait voir (§. 801) que le corps parcourroit 415,17 pieds, dans cette premiere seconde.

Des trajectoires que les Satellites de Jupiter décriroient autour du Soleil, si Jupiter venoit à être anéanti tout-à-coup.

(906) On sait que la moyenne distance de Jupiter au Soleil = 5,203 ; la moyenne distance de la Terre au Soleil étant 1. On sait aussi que cette Planete est accompagnée de quatre Satellites qui circulent à des distances inégales, de la maniere suivante.

Distances des Satellites au centre de Jupiter en demi-petit axe de Jupiter.		Tems des révolutions par rapport aux fixes.			
1er. Satellite.	5,965	1jour	18h	27′	33″
2	9,4 4	3	13	13	42
3	15,141	7	3	42	33
4	36,630	16	16	32	8

D'ailleurs le demi-petit axe de Jupiter est au demi-diametre de la Terre, comme 10,761 est à 1.

(907) Si Jupiter venoit tout-à-coup à être anéanti, & que l'on négligeât l'action des Satellites les uns sur les autres, comme infiniment petite vis-à-vis celle du Soleil, il est évident que chacun des Satellites commenceroit à décrire une nouvelle trajectoire autour du Soleil, & que cette trajectoire seroit une section conique. Mais cette trajectoire seroit-elle parabolique, hyperbolique, ou elliptique? C'est ce qu'il s'agit d'examiner. En général cela dépendroit du point où le Satellite se trouveroit dans l'orbite qu'il décrit actuellement autour de Jupiter. Il faut donc déterminer à quel point de l'orbite actuelle du Satellite, la nouvelle trajectoire autour du Soleil seroit une Parabole; car cette courbe étant le passage de l'Hyperbole à l'Ellipse, on aura par-là une idée nette de ce qui arriveroit dans tous les points de l'orbite.

(908) Soit

a le demi-grand axe d'une section conique;

E la distance du foyer au centre de la section;

R le rayon vecteur;

θ l'angle de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur;

V la vitesse tangentielle;

ρ le rayon de la sphere attirante; dans ce cas, ρ est le demi-diametre du Soleil;

δ le nombre de pieds qu'un corps grave parcourt pendant la premiere seconde de sa chute, à la surface de la sphere attirante; dans ce cas $\delta = 415{,}17$ pieds.

Nous avons vu §. 891, que l'on a généralement

$$(1)\ \frac{E}{a} = \sqrt{\left(1 - \frac{R V^2 \sin^2\theta}{\rho^2 \delta} + \frac{1}{4}\frac{R^2 V^4 \sin^2\theta}{\rho^4 \delta^2}\right)}.$$

D'ailleurs dans le cas particulier où la Courbe est une Parabole, l'on a de plus $\frac{E}{a} = 1$; d'où l'on conclura

$$(2)\ 4\rho^2\delta - V^2 R = 0.$$

Dans cette derniere équation R est le rayon vecteur mené du Satellite au Soleil, & V est la vîtesse du Satellite dans la direction de la tangente à sa trajectoire autour du Soleil. Il s'agit donc de de déterminer V & R dans les mêmes valeurs que ρ & δ, c'est-à-dire en pieds.

(909) Pour déterminer convenablement R & V, soit

D la distance TS de Jupiter au Soleil; Fig. 25.

R' le rayon TL de l'orbite circulaire du Satellite de Jupiter autour de cette Planete; A est le point supérieur de cette orbite relativement au Soleil;

u' l'arc AL que le Satellite a parcouru dans son orbite depuis son passage par le point A.

Il est évident que le Satellite au point L, a deux mouvemens différens; l'un qui lui est commun avec Jupiter autour du Soleil, & que je re-

présenterai par la droite LN; l'autre qui résulte de son mouvement autour de Jupiter, & que je représenterai par la droite LM. Il a donc, relativement au Soleil, le mouvement LB, diagonale du parallélogramme
Fig. 25. LMBN.

Soit

v la vîtesse de Jupiter autour du Soleil;

v' la vîtesse du Satellite dans son orbite particuliere.

Puisque la trajectoire du Satellite autour de Jupiter est un cercle, & que LM est tangente à cette trajectoire; si du point L l'on abaisse sur le prolongement de la droite BM, la perpendiculaire LK, & que du même point L l'on abaisse la droite LQ sur la ligne TA, l'on aura deux triangles rectangles semblables, MLK, LTQ, dans lesquels les angles LMK, LTQ seront égaux; l'on aura donc angle LMK $= u'$; donc puisque d'ailleurs LM $= v'$, l'on conclura MK $= v' \cos u'$; LK $= v' \sin u'$. Mais BM ou LN est la vîtesse v commune au Satellite & à Jupiter, par rapport au Soleil; & BL est la vîtesse particuliere V du Satellite dans sa nouvelle trajectoire; donc enfin

$$(1)\quad V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos u'.$$

(910) Si l'on conserve les définitions précédentes de R', D, u', R, il est évident que dans le triangle LTQ, on aura QL $= R' \sin u'$; TQ $= R' \cos u'$. D'ailleurs ST $=$ D; SL $=$ R; donc

$$(1)\quad R^2 = D^2 + 2R'D \cos u' + R'^2.$$

Si l'on porte ces valeurs de R & de V dans l'équation $4\rho^2\delta - V^2 R = 0$; elle deviendra

$$(2)\quad 4\rho^2\delta - (v^2 + v'^2 + 2vv' \cos u')\sqrt{(D^2 + 2R'D \cos u' + R'^2)} = 0.$$

On déterminera donc les points u' où devroit se trouver le Satellite dans son orbite, pour que sa nouvelle trajectoire autour du Soleil fût une Parabole.

(911) L'équation (2) du §. précédent seroit, par rapport à $\cos u'$, une équation du troisieme degré, dont deux des racines seroient imaginaires. Quoique cette solution n'ait rien d'embarrassant, on peut cependant simplifier encore la question. En effet, comme la distance D du Soleil à Jupiter, est extrêmement grande relativement à la distance R' des Satellites à Jupiter, on pourra négliger les termes $2R'D \cos u' + R'^2$, vis-à-vis de D^2; l'on aura alors, avec une exactitude suffisante,

$$(1)\quad 4\rho^2\delta - D(v^2 + v'^2 + 2vv' \cos u') = 0;$$

D'où l'on tire

$$(2)\quad \cos u' = \frac{2\rho^2\delta}{Dvv'} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{v}{v'} + \frac{v'}{v}\right).$$

Lorsque l'on connoîtra l'angle u', l'on déterminera le rayon vecteur R, au moyen de l'équation (1) du §. 910.

(912) Non-seulement on déterminera l'espece de la trajectoire que le

le Satellite décriroit autour du Soleil ; on pourra aussi déterminer les dimensions de cette trajectoire individuelle. En effet, nous connoissons (§. 909, 910 & 911) les valeurs de R & de V qui conviennent au premier point de la trajectoire ; il suffira donc, pour connoître les dimensions de la trajectoire individuelle, de déterminer l'angle BLS de la tangente BL à la nouvelle trajectoire autour du Soleil, avec le rayon vecteur SL. Rien n'est plus simple que cette détermination ; car si l'on prolonge la droite BMK, jusqu'à ce qu'elle rencontre le rayon vecteur SL au point H, il est clair que l'angle BLS sera égal à la somme des angles BLK, KLH. Fig. 25.

D'après les constructions précédentes, l'angle BLK a pour expression de sa tangente, $\frac{BK}{KL} = \frac{v + v' \cos u'}{v' \sin u'}$. De plus, à cause des triangles semblables KLH, LSQ, l'angle KLH a pareillement pour expression de sa tangente $\frac{QL}{QS} = \frac{R' \sin u'}{D + R' \cos u'}$; donc (trigonométrie rectiligne)

$$(1)\ \text{Tang } BLH = \frac{D\,(v + v' \cos u') + R'\,(v' + v \cos u')}{(D v' - R' v) \sin u'}.$$

On pourra donc connoître, par les méthodes précédentes, toutes les dimensions de la nouvelle trajectoire décrite autour du Soleil.

(913) Nous remarquerons ici un cas particulier, celui où l'angle BLH seroit nul, & où par conséquent le Satellite tomberoit en ligne droite dans le Soleil ; on auroit alors

$$(1)\ D\,(v + v' \cos u') + R'\,(v' + v \cos u') = 0 ;$$

D'où l'on concluroit

$$(2)\ \cos u' = -\frac{Dv + R'v'}{Dv' + R'v}.$$

Application du calcul aux Satellites de Jupiter.

Premier Satellite.

(914) Si l'on applique le calcul au premier Satellite de Jupiter, & que l'on parte du point de l'orbite du Satellite qui répond à l'opposition, relativement au Soleil, on verra que si Jupiter venoit tout-à-coup à être anéanti, le premier Satellite décriroit une trajectoire hyperbolique, s'il se trouvoit dans toute la partie supérieure de son orbite, jusqu'à $104^d\ 40'\ 20''$ de distance de l'opposition. S'il se trouvoit à $104^d\ 40'\ 20''$, il décriroit une Parabole. Dans toute la partie inférieure de l'orbite distante de plus $104^d\ 40'\ 20''$ de l'opposition, sa nouvelle trajectoire seroit une Ellipse ; de sorte cependant qu'entre $104^d\ 40'\ 20''$ & $140^d\ 59'\ 40''$ de distance de l'opposition, la nouvelle trajectoire autour du Soleil seroit directe, & que par-delà $140^d\ 59'\ 40''$ la trajectoire seroit rétrograde. A $140^d\ 59'\ 40''$ de l'opposition, le Satellite tomberoit en ligne droite dans le Soleil. Il en seroit de même à $219^d\ 0'\ 20''$ de distance de

l'oppoſition. La trajectoire elliptique redeviendroit alors directe. A $255^d\ 19'\ 40''$ de diſtance de l'oppoſition, la trajectoire ſeroit une Parabole; elle ſeroit une Hyperbole par-delà $255^d\ 19'\ 40''$.

Second Satellite.

(915) Si l'on part, comme dans le paragraphe précédent, du point de l'orbite du Satellite qui répond à l'oppoſition par rapport au Soleil, le ſecond Satellite décriroit une trajectoire hyperbolique autour du Soleil, s'il ſe trouvoit dans toute la partie ſupérieure de ſon orbite, juſqu'à $91^d\ 1'\ 40''$ de l'oppoſition. S'il ſe trouvoit à $91^d\ 1'\ 40''$ de l'oppoſition, il décriroit une Parabole. Dans toute la partie inférieure de l'orbite diſtante de plus de $91^d\ 1'\ 40''$ de l'oppoſition, ſa nouvelle trajectoire autour du Soleil ſeroit une Ellipſe; de ſorte cependant qu'entre $91^d\ 1'\ 40''$ & $169^d\ 22'\ 40''$ de diſtance de l'oppoſition, la nouvelle trajectoire autour du Soleil ſeroit directe, & que par-delà $169^d\ 22'\ 40''$, la trajectoire ſeroit rétrograde. A $169^d\ 22'\ 40''$ de diſtance de l'oppoſition, le Satellite tomberoit en ligne droite dans le Soleil. Il en ſeroit de même à $190^d\ 37'\ 20''$ de diſtance de l'oppoſition. La trajectoire elliptique redeviendroit alors directe. A $268^d\ 58'\ 20''$ de l'oppoſition, la trajectoire ſeroit une Parabole; elle ſeroit une Hyperbole par-delà $268^d\ 58'\ 20''$.

Troiſieme Satellite.

(916) Relativement au troiſieme Satellite, s'il ſe trouvoit dans la partie ſupérieure de ſon orbite juſqu'à $77^d\ 30'\ 10''$ de diſtance de l'oppoſition, la trajectoire autour du Soleil ſeroit une Hyperbole. Elle ſeroit une Parabole à $77^d\ 30'\ 10''$ de diſtance de l'oppoſition. Par-delà $77^d\ 30'\ 10''$, & dans toute la partie inférieure de l'orbite, la nouvelle trajectoire ſeroit une Ellipſe; mais elle ſeroit toujours directe, & le Satellite ne pourroit point tomber en ligne droite dans le Soleil. A $282^d\ 29'\ 50''$ de diſtance de l'oppoſition, la trajectoire ſeroit une Parabole. Par-delà $282^d\ 29'\ 50''$ de diſtance de l'oppoſition, la trajectoire ſeroit une Hyperbole.

Quatrieme Satellite.

(917) A $58^d\ 49'\ 20''$ de diſtance de l'oppoſition, la nouvelle trajectoire du Satellite autour du Soleil ſeroit une Parabole; dans la partie ſupérieure de l'orbite, elle ſeroit une Hyperbole, & dans la partie inférieure, elle ſeroit une Ellipſe. Dans le cas où la trajectoire ſeroit une Ellipſe, elle ne pourroit être que directe, & le Satellite ne pourroit point tomber en ligne droite dans le Soleil. A $301^d\ 10'\ 40''$ de diſtance de l'oppoſition, la trajectoire ſeroit une Parabole. Par-delà $301^d\ 10'\ 40''$ elle ſeroit une Hyperbole.

Application du calcul à la Lune.

(918) Le mouvement de la Lune dans ſon orbite autour de la Terre

eſt au mouvement de la Terre autour du Soleil, à peu près dans le rapport de 3292 à 95085. Il eſt donc évident que dans toutes les poſitions de la Lune, ſoit que l'on ajoute ſon mouvement à celui de la Terre, ſoit qu'on l'en ſouſtraie, la vîteſſe réſultante de la Lune relativement au Soleil, ne peut pas différer beaucoup de celle de la Terre. Il en eſt de même de l'angle de la tangente avec le rayon vecteur. La trajectoire de la Lune ſeroit donc dans tous les cas, une trajectoire elliptique dont les dimenſions différeroient peu de celles de l'orbite de la Terre.

Remarque relative aux Satellites de Saturne & d'Herſchell.

(919) Comme les plans des orbites des quatre premiers Satellites de Saturne, ſont inclinés d'environ 30^{d} ſur l'Ecliptique de Saturne, & que le plan de l'orbite du cinquieme Satellite eſt incliné de 15^{d}, le Problême eſt plus compliqué pour ces Satellites, que pour les Satellites de Jupiter, dont nous avons ſuppoſé les orbites couchées ſur le plan de l'Ecliptique de la Planete. Mais quoique plus compliqué quant au calcul, le Problême n'en eſt pas moins dans le cas d'être réſolu, par des méthodes analogues à celles dont on a fait uſage pour les Satellites de Jupiter. En effet, il ne ſeroit queſtion que de projetter l'orbite du Satellite ſur le plan de l'Ecliptique de Saturne. Il faudroit enſuite déterminer la vîteſſe correſpondante à chacun des points de l'orbite projettée ; il faudroit enfin calculer dans quelles circonſtances la vîteſſe dans la courbe de projection combinée avec la vîteſſe de Saturne autour du Soleil, donneroit une courbe parabolique pour la projection de la nouvelle trajectoire autour du Soleil ; car cette projection ſeroit évidemment une Parabole, dans les mêmes circonſtances que la nouvelle trajectoire du Satellite autour du Soleil.

Quant aux Satellites d'Herſchell, quoique à l'époque actuelle l'on n'ait encore aucune détermination bien certaine relativement à leurs orbites, on croit cependant que les plans de ces orbites ſont perpendiculaires à l'Ecliptique de la Planete. Dans ce cas, la projection des orbites de ces Satellites ſur le plan de l'orbite de la Planete, ſeroit rectiligne; & la vîteſſe des Satellites dans la projection de leur orbite, ſeroit égale à la vîteſſe du Satellite autour de la Planete, multipliée par le ſinus de la diſtance du Satellite au point de ſon orbite le plus éloigné du plan de l'orbite de la Planete. Nous remarquerons enfin que comme les orbites des Satellites ont paru circulaires, lorſque la Planete avoit environ 120^{d} de longitude, la projection rectiligne de ces orbites fait, avec le rayon vecteur de la Planete, un angle égal à la longitude d'Herſchell, moins 120^{d}.

ARTICLE IV.

Des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'un projectile puiſſe circuler autour d'une ſphere d'attraction, à la maniere des Satellites.

(920) Pour qu'un projectile, un boulet, par exemple, lancé à la ſurface

de la Terre, puiſſe circuler à la maniere des Satellites, il eſt évident qu'il doit y avoir une relation entre le rayon de la ſphere d'attraction, le nombre de pieds qu'un corps parcourt à la ſurface de cette ſphere pendant la premiere ſeconde de ſa chute, la viteſſe du corps lancé, la direction de ſon mouvement, & la diſtance du point de départ au centre de la ſphere d'attraction. Il eſt également évident que l'on doit ſatisfaire à deux conditions; la premiere, que le projectile décrive une courbe fermée, car autrement il ſe perdroit dans l'eſpace; la ſeconde, qu'il puiſſe décrire ſa trajectoire entiere, ſans tomber ſur la ſphere d'attraction, car alors l'épaiſſeur de cette ſphere s'oppoſeroit à ſon mouvement. Examinons rapidement comment on peut ſatisfaire à ces deux conditions.

(921) Si l'on conſerve les définitions de a, E, R, P, θ, ρ, δ, V du §. 891, en remarquant que dans le cas dont il s'agit, R eſt la diſtance du projectile au centre des forces, lors du point de départ; que θ eſt l'angle que fait la direction du projectile avec le rayon R, à l'inſtant où il eſt lancé; & que V eſt la viteſſe du projectile pour le même inſtant; on conclura d'abord, d'après l'équation (5) du §. 891, que pour ſatisfaire à la premiere condition, $4\rho^2\delta$ doit ſurpaſſer RV^2; la condition de

$$(1)\quad 4\rho^2\delta = RV^2,$$

eſt donc une des limites du Problême.

Pour déterminer maintenant le cas où l'épaiſſeur de la ſphere ceſſeroit de s'oppoſer à la deſcription de la trajectoire entiere, je remarque que le projectile ne peut décrire ſa trajectoire entiere, qu'autant que la diſtance du projectile parvenu à l'apſide inférieure, eſt au moins égale au rayon de la ſphere d'attraction. Mais dans l'apſide inférieure, le rayon vecteur $= a - E$; on doit donc avoir

$$(2)\quad a - E - \rho = 0.$$

Si dans les expreſſions de a & de E du §. 415, l'on ſubſtitue à P ſa valeur $P = \frac{R^2V^2 \sin^2\theta}{\rho^2\delta}$, elles deviendront

$$a = \frac{2\rho^2\delta R}{4\rho^2\delta - RV^2};$$

$$E = \frac{R\sqrt{(4\rho^4\delta^2 - 4\rho^2\delta RV^2\sin^2\theta + R^2V^4\sin^2\theta)}}{4\rho^2\delta - RV^2}.$$

L'on a donc pour la ſeconde limite du Problême,

$$(3)\quad \rho^2(RV^2 - 4\rho^2\delta + 2R\rho^2\delta)^2 - R^2(4\rho^4\delta^2 - 4\rho^2\delta RV^2\sin^2\theta + R^2V^4\sin^2\theta) = 0.$$

L'on voit par-là que lorſque l'on connoîtra la diſtance R du projectile au centre d'attraction, lors du départ, & la direction de ſon mouvement, on pourra toujours déterminer la viteſſe qu'il faudra lui donner pour qu'il puiſſe circuler à la maniere des Satellites; l'on n'aura même à réſoudre qu'une équation du quatrieme degré, qui ne préſentera que les difficultés du ſecond degré.

CHAPITRE QUINZIEME.

Recherches ſur la premiere Comete de 1770.

JE terminerai cet Ouvrage, par quelques recherches ſur la premiere Comete de 1770. Nous avons déja dit qu'on n'avoit pu repréſenter exactement les lieux obſervés de cette Comete, en employant la Parabole; & qu'au contraire lorſque l'on y avoit appliqué la théorie elliptique, on avoit réuſſi à repréſenter les obſervations, avec une exactitude ſatisfaiſante. C'eſt à M. Léxell à qui l'on doit cette remarque; elle m'a paru trop importante pour ne pas chercher à l'approfondir.

ARTICLE PREMIER.

Elémens & Obſervations de la premiere Comete de 1770, tirés du Mémoire de M. Léxell.

(922) Voici, d'après M. Léxell, les élémens de la premiere Comete de 1770, dans une orbite elliptique.

Lieu du périhélie . . . . 11ſ 26d 16′ 26″.
Longitude du nœud aſcendant . . . . . . 4 12 0 0.
Inclinaiſon de l'orbite. . . . . 1 33 40.
Sens du mouvement. . . . . direct.
Paſſage par le périhélie . . . . 13 Août 1770, 13h 5′ 0″.
Demi-grand axe de l'orbite = 3,1478606.
Excentricité de l'orbite = 2,4734790.
Diſtance périhélie de la Comete = 0,6743816.
Diſtance aphélie de la Comete = 5,6213396.
Parametre du grand axe = 2,4085212.
Tems de la révolution = 5,58513 ans.

Ces élémens placent l'Aphélie de la Comete très-près de l'orbite de Jupiter; & M. Léxell en a conclu que ſi la Comete n'a point été obſervée depuis 1770, on doit l'attribuer au dérangement qu'elle a dû éprouver de la part de Jupiter, lorſqu'au mois d'Août 1779 elle a paſſé près de cette Planete. Examinons ſi ces concluſions ſont fondées. Ce travail m'a paru d'autant plus intéreſſant qu'il me fournira l'occaſion de développer quelques remarques ſur les méthodes des Cometes. Paſſons aux obſervations de la premiere Comete de 1770, tirées du Mémoire de M. Léxell.

Observations de la premiere Comete de 1770, tirées du Mémoire de M. Léxell.

(923) Voici, suivant M. Léxell, les différens lieux observés de la premiere Comete de 1770.

MOIS ET JOURS.		TEMS MOYEN A PARIS.			LONGIT. GEOC. COMETE.			LATIT. GEOC. COMETE.			
		H	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	
	14	11	29	48	272	47	44	6	40	24	Bor.
	15	11	23	22	272	51	49	6	57	15	
	17	11	11	33	272	59	58	7	38	51	
	20	10	40	48	273	16	12	9	5	58	
	21	10	27	45	273	23	17	9	44	36	
Juin	22	12	9	36	273	33	43	10	39	5	
	24	12	3	18	273	59	58	12	59	55	
	25	13	27	55	274	21	42	14	53	56	
	27	13	13	17	275	34	54	21	8	47	
	28	10	46	34	276	45	58	26	29	33	
	29	11	59	26	279	42	45	37	57	32	
	2	15	3	15	96	2	32	0	50	7	Aust.
	3	14	45	9	96	25	15	0	53	36	
	4	14	12	48	96	47	28	0	55	44	
	5	14	38	43	97	13	51	0	59	17	
	6	14	29	42	97	39	25	1	1	18	
	7	14	49	19	98	6	40	1	3	35	
	8	14	20	13	98	33	29	1	6	36	
	9	14	48	10	99	4	30	1	9	33	
	10	14	14	27	99	32	36	1	9	13	
	11	14	23	23	100	3	2	1	10	51	
Août	12	14	46	25	100	34	48	1	12	52	
	14	14	37	29	101	40	25	1	15	25	
	15	15	43	33	102	14	56	1	16	43	
	18	14	24	32	103	59	24	1	18	35	
	19	14	33	18	104	36	3	1	19	18	
	26	15	39	38	109	3	44	1	20	45	
	28	14	44	8	110	19	42	1	20	55	
	29	15	21	53	111	0	3	1	20	5	
	30	14	48	22	111	39	12	1	20	56	
	31	14	38	25	112	17	16	1	20	23	
	4	15	5	20	114	52	41	1	19	23	
	5	14	48	37	115	31	7	1	19	45	
	8	15	57	4	117	26	32	1	18	23	
	9	15	6	30	118	3	19	1	18	22	
	10	16	26	23	118	40	26	1	19	4	
Septembre	14	14	16	26	121	4	36	1	16	18	
	17	15	53	3	122	52	40	1	14	52	
	18	15	30	16	123	26	57	1	13	58	
	19	15	19	4	124	0	32	1	13	2	
	20	15	33	45	124	34	17	1	12	35	
	29	15	23	51	129	14	54	1	10	16	
Octobre	1	15	23	22	130	12	6	1	9	51	
	2	15	43	37	130	40	51	1	10	4	

ARTICLE II.

Remarques sur la nécessité de débarrasser les calculs, des erreurs des observations ; & méthodes pour y parvenir.

(924) Les calculs auxquels je me suis livré pour déterminer les orbites des Cometes en général, & particulierement ceux que j'ai entrepris relativement à la premiere Comete de 1770, m'ont convaincu de plus en plus, de la nécessité de débarrasser les calculs, des erreurs des observations; sur-tout lorsque l'on veut conclure les distances de la Comete à la Terre, d'après les formules des §. 828 & suivans. J'ai dejà annoncé dans les §. 834 & 835, quelques vues sur ce sujet; je me propose, dans cet Article, de développer ces premieres idées, & d'y ajouter quelques réflexions. Pour me rendre plus intelligible, j'appliquerai ces réflexions aux observations du commencement d'Août de la premiere Comete de 1770.

En général la preuve la moins équivoque qu'il s'est glissé des erreurs dans les observations, est la marche irréguliere des premieres, secondes & troisiemes différences relatives à ces observations. En effet, quoiqu'on ignore la loi précise que suivent ces observations, il est contre toute vraisemblance que dans un petit intervalle de tems, la marche soit irréguliere. Nous remarquerons seulement que pour juger de l'irrégularité des différences premieres, secondes, troisiemes, &c. il faut ramener ces différences à un même intervalle de tems; ce que l'on obtiendra en multipliant les premieres différences déduites des observations, par un même nombre de minutes, par exemple, par 1440', si l'on veut prendre pour intervalle commun, l'intervalle d'un jour, & en divisant ces mêmes premieres différences, par le nombre respectif de minutes de tems écoulées entre les observations successives.

(925) Examinons d'après ces principes, les observations des 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 Août, de la premiere Comete de 1770. Voici ces observations avec les différences premieres, secondes & troisiemes, pour vingt quatre heures.

Jours.		*Longitudes observées.*	*Différences premieres.*	*Différences secondes.*	*Différences troisiemes.*
2 Août	15^h 3′ 15″	96^d 2′ 32″	23′ 0″	— 0′ 21″	+ 4′ 21″.
3	14 45 9	96 25 15	22 39	+ 4 0	— 5 2.
4	14 12 48	97 47 28	26 39	— 1 2	+ 3 24.
5	14 38 43	97 13 51	25 41	+ 1 12	— 0 43.
6	14 29 42	97 39 25	26 53	+ 0 29	+ 2 32.
7	14 49 19	98 6 40	27 22	+ 3 1	— 2 55.
8	14 20 13	98 33 29	30 23	+ 0 6	— 0 21.
9	14 48 10	99 4 30	30 29	— 0 15	+ 1 15.
10	14 14 27	99 32 36	30 14	+ 1 0	
11	14 25 23	100 5 2	31 14		
12	14 46 25	100 34 48			

Jours.		*Latitudes observées.*	*Différences premieres.*	*Différences secondes.*	*Différences troisiemes.*
2 Août..	$15^h\ 3'\ 15''$ ...	$0^d\ 50'\ 7''$ auft.			
3	14 45 9 ...	0 53 36	+ 3′ 37″ ...	— 1′ 26″	
4	14 12 48 ...	0 55 44	... + 2 11 ...	+ 1 18 ...	+ [illegible]
5	14 38 43 ...	0 59 17	... + 3 [illegible] ...	— 1 28 ...	— [illegible]
6	14 29 42 ...	1 1 18	... + [illegible] ...	+ 0 14 ...	+ [illegible]
7	14 49 19 ...	1 3 35	... + [illegible] ...	+ 0 50 ...	+ 0 [illegible]
8	14 10 13 ...	1 6 36	... + 3 5 ...	— 0 12 ...	— 1 [illegible]
9	14 48 10 ...	1 9 33	... + 2 54 ...	— 3 15 ...	— 3 [illegible]
10	14 14 27 ...	1 9 13	... — 0 21 ...	+ 1 58 ...	+ 5 13
11	14 23 23 ...	1 10 51	... + 1 37 ...	+ 0 22 ...	— [illegible]
12	14 46 25 ...	1 12 52	... + 1 59		

La marche irréguliere de ces différences ne peut laiſſer aucun doute qu'il ne ſe ſoit gliſſé des erreurs dans les obſervations; cherchons à démêler ces erreurs.

Premiere méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations.

(926) La méthode que nous nous propoſons de développer, n'eſt qu'une application des équations des §. 624 & 625, au cas particulier dont il s'agit; nous nommerons donc, comme dans ces paragraphes,

α le premier lieu obſervé ;
α' le ſecond lieu obſervé ;
α'' le troiſieme lieu obſervé ;
α''' le quatrieme lieu obſervé ;
α'''' le cinquieme lieu obſervé ;
α''''' le ſixieme lieu obſervé ;

& ainſi de ſuite ;

$a' - a$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la premiere & la ſeconde obſervation ;
$a'' - a'$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la ſeconde & la troiſieme obſervation ;
$a''' - a''$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la troiſieme & la quatrieme obſervation ;
$a'''' - a'''$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la quatrieme & la cinquieme obſervation ;
$a''''' - a''''$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la cinquieme & la ſixieme obſervation ;

& ainſi de ſuite ;

$a'' - a$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la premiere & la troiſieme obſervation ;
$a''' - a'$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la ſeconde & la quatrieme obſervation ;
$a'''' - a''$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la troiſieme & la cinquieme obſervation ;
$a''''' - a'''$ le nombre de minutes horaires écoulées entre la quatrieme & la ſixieme obſervation ;

& ainſi de ſuite ;

$d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$, $d\alpha'''''$, &c. les erreurs des obſervations,

(927)

(927) Dans le paragraphe 925, nous avons preſcrit de déterminer les différences premieres, ſecondes, troiſiemes, &c. relatives aux obſervations; & nous avons montré comment on peut avoir aſtronomiquement ces différences, en les rapportant à un même intervalle de tems; il s'agit maintenant d'avoir les expreſſions analytiques de ces mêmes différences, rapportées au même intervalle de tems. Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de cette queſtion. En effet, ſi l'on rapporte à un même intervalle de tems, par exemple à 1440′, les différences premieres, il eſt évident que l'on aura pour expreſſion analytique de ces différences ſucceſſives,

Différences premieres.

$$\frac{1440'}{a'-a}(\alpha'-\alpha+d\alpha'-d\alpha);$$

$$\frac{1440'}{a''-a'}(\alpha''-\alpha'+d\alpha''-d\alpha');$$

$$\frac{1440'}{a'''-a''}(\alpha'''-\alpha''+d\alpha'''-d\alpha'');$$

$$\frac{1440'}{a''''-a'''}(\alpha''''-\alpha'''+d\alpha''''-d\alpha''');$$

$$\frac{1440'}{a'''''-a''''}(\alpha'''''-\alpha''''+d\alpha'''''-d\alpha'''');$$

& ainſi de ſuite.

Différences ſecondes.

$$\frac{1440'}{(a'-a)(a''-a')}\times((a'-a)(\alpha''-\alpha'+d\alpha''-d\alpha')-(a''-a')(\alpha'-\alpha+d\alpha'-d\alpha));$$

$$\frac{1440'}{(a''-a')(a'''-a'')}\times((a''-a')(\alpha'''-\alpha''+d\alpha'''-d\alpha'')$$
$$-(a'''-a'')(\alpha''-\alpha'+d\alpha''-d\alpha'));$$

$$\frac{1440'}{(a'''-a'')(a''''-a''')}\times((a'''-a'')(\alpha''''-\alpha'''+d\alpha''''-d\alpha''')$$
$$-(a''''-a''')(\alpha'''-\alpha''+d\alpha'''-d\alpha''));$$

$$\frac{1440'}{(a''''-a''')(a'''''-a'''')}\times((a''''-a''')(\alpha'''''-\alpha''''+d\alpha'''''-d\alpha'''')$$
$$-(a'''''-a'''')(\alpha''''-\alpha'''+d\alpha''''-d\alpha'''));$$

& ainſi de ſuite.

Différences troiſiemes.

$$\frac{1440'}{(a'-a)(a''-a')(a'''-a'')}\times((a'-a)(a''-a')(\alpha'''-\alpha''+d\alpha'''-d\alpha'')$$
$$-2(a'-a)(a'''-a'')(\alpha''-\alpha'+d\alpha''-d\alpha')$$
$$+(a''-a')(a'''-a'')(\alpha'-\alpha+d\alpha'-d\alpha));$$

$$\frac{1440'}{(a''-a')(a'''-a'')(a''''-a''')} \times \big((a''-a')(a'''-a'')(\alpha''''-\alpha'''+d\alpha''''-d\alpha''')$$
$$-2(a''-a')(a''''-a''')(\alpha'''-\alpha''+d\alpha'''-d\alpha'')$$
$$+(a'''-a'')(a''''-a''')(\alpha''-\alpha'+d\alpha''-d\alpha')\big);$$

$$\frac{1440'}{(a'''-a'')(a''''-a''')(a'''''-a'''')} \times \big((a'''-a'')(a''''-a''')(\alpha'''''-\alpha''''+d\alpha'''''-d\alpha'''')$$
$$-2(a'''-a'')(a'''''-a'''')(\alpha''''-\alpha'''+d\alpha''''-d\alpha''')$$
$$+(a''''-a''')(a'''''-a'''')(\alpha'''-\alpha''+d\alpha'''-d\alpha'')\big);$$

Et ainſi de ſuite.

(928) Conſidérons maintenant cinq obſervations ſucceſſives ; ce que je dirai de ces cinq obſervations pourra également s'appliquer à un nombre quelconque d'obſervations. Je remarque que ſans les erreurs des obſervations, il eſt très-probable que les différences troiſiemes euſſent été égales. Je prends donc dans la Table du §. 925, la ſomme des différences troiſiemes correſpondantes aux cinq obſervations dont il s'agit, ou même à un plus grand nombre d'obſervations ſucceſſives ; je diviſe cette ſomme par le nombre des différences troiſiemes dont j'ai fait uſage ; je nomme

A la quantité ainſi trouvée ;

Et j'ai, pour les cinq obſervations dont il s'agit, les équations ſuivantes,

$$(1)\ (a'-a)(a''-a')(d\alpha''-d\alpha')-2(a'-a)(a'''-a'')(d\alpha''-d\alpha')$$
$$+(a''-a')(a'''-a'')(d\alpha'-d\alpha)+(a'-a)(a''-a')(\alpha''-\alpha'')$$
$$-2(a'-a)(a''-a'')(\alpha''-\alpha')+(a''-a')(a'''-a'')(\alpha'-\alpha)$$
$$-(a'-a)(a''-a')(a'''-a'')\times\frac{A}{1440'}=0;$$

$$(2)\ (a''-a')(a'''-a'')(d\alpha''''-d\alpha''')-2(a''-a')(a''''-a''')(d\alpha'''-d\alpha'')$$
$$+(a'''-a'')(a''''-a''')(d\alpha''-d\alpha')+(a''-a')(a'''-a'')(\alpha''''-\alpha''')$$
$$-2(a''-a')(a''''-a''')(\alpha'''-\alpha'')+(a'''-a'')(a''''-a''')(\alpha''-\alpha')$$
$$-(a''-a')(a'''-a'')(a''''-a''')\times\frac{A}{1440'}=0;$$

Ou, ce qui revient au même,

$$(3)\ (a'-a)(a''-a')d\alpha'''-(a'-a)((a''-a')+(a'''-a''))d\alpha''$$
$$+(a'''-a'')((a''-a)+(a'-a))d\alpha'-(a'''-a'')(a''-a')d\alpha$$
$$+(a'-a)(a''-a')(\alpha'''-\alpha'')-2(a'-a)(a'''-a'')(\alpha''-\alpha')$$
$$+(a''-a')(a'''-a'')(\alpha'-\alpha)-(a'-a)(a''-a')(a'''-a'')\times\frac{A}{1440'}=0;$$

$$(4)\ (a''-a')(a'''-a'')d\alpha''''-(a''-a')((a''''-a'')+(a''''-a'''))d\alpha'''$$
$$+(a''''-a''')((a'''-a')+(a''-a'))d\alpha''-(a''''-a''')(a'''-a'')d\alpha'$$
$$+(a''-a')(a'''-a'')(\alpha''''-\alpha''')-2(a''-a')(a''''-a''')(\alpha'''-\alpha'')$$
$$+(a'''-a'')(a''''-a''')(\alpha''-\alpha')-(a''-a')(a'''-a'')(a''''-a''')\times\frac{A}{1440'}=0.$$

(929) Je remarquerai, à l'occaſion de la ſolution précédente, combien il ſeroit à deſirer que les quantités $a'-a$, $a''-a'$, $a'''-a''$, $a''''-a'''$,

fuſſent égales, ou au moins multiples les unes des autres ; car alors ces quantités diſparoîtroient dans les équations, ou du moins elles ſe réduiroient à des nombres très-ſimples, 1, 2, 3, &c. Or il eſt facile de ſe procurer cette condition, lorſque les obſervations ont été faites dans les différens jours, à des heures peu différentes entr'elles. Une ſimple proportion ſuffira pour ramener les obſervations à une même heure.

Je remarquerai auſſi, que le Problême eſt indéterminé ; & que, quelque nombre d'obſervations que l'on conſidere, l'on a toujours trois équations de moins, que de quantités à calculer. On pourroit, il eſt vrai, introduire une nouvelle équation dans le Problême, celle que nous avons indiquée dans le §. 835, & qui réſulte de la condition ſuppoſée, que la ſomme des erreurs en plus & en moins ſe détruit. Le Problême n'auroit alors que deux degrés d'indétermination ; & même il ſe réduiroit à un, ſi l'on fait attention que dans les formules qui ſervent à conclure les diſtances de la Comete à la Terre, l'erreur d'une quelconque des obſervations eſt preſqu'indifférente, pourvu toutefois qu'elle influe ſemblablement ſur les autres obſervations.

(930) Cette indétermination ſeroit encore diminuée, ſi, par un moyen quelconque, l'on pouvoit s'aſſurer de la loi des différences ſecondes. Car ſi nous conſidérons toujours cinq obſervations, & que nous nommions

B, B', B'', les valeurs des trois différences ſecondes, correſpondantes aux obſervations dont il s'agit ; ces valeurs pourront ſe déterminer par une méthode analogue à celle par laquelle nous avons déterminé la quantité A (§ 928) ; c'eſt-à-dire, par l'inſpection de la marche aſtronomique des différences ſecondes.

Au lieu des équations (1) & (2) du §. 928, l'on aura, dans ce cas, les équations ſuivantes,

$$(1)\ (a'-a)(d\alpha''-d\alpha')-(a''-a')(d\alpha'-d\alpha)+(a'-a)(\alpha''-\alpha')-(a''-a')(\alpha'-\alpha)$$
$$-(a'-a)(a''-a')\times\frac{B}{1440'}=0;$$

$$(2)\ (a''-a')(d\alpha'''-d\alpha'')-(a'''-a'')(d\alpha''-d\alpha')+(a''-a')(\alpha'''-\alpha'')$$
$$-(a'''-a'')(\alpha''-\alpha')-(a''-a')(a'''-a'')\times\frac{B'}{1440'}=0;$$

$$(3)\ (a'''-a'')(d\alpha''''-d\alpha''')-(a''''-a''')(d\alpha'''-d\alpha'')+(a'''-a'')(\alpha''''-\alpha''')$$
$$-(a''''-a''')(\alpha'''-\alpha'')-(a'''-a'')(a''''-a''')\times\frac{B''}{1440'}=0;$$

Ou, ce qui revient au même,

$$(4)\ (a'-a)\,d\alpha''-(a''-a)\,d\alpha'+(a''-a')\,d\alpha+(a'-a)(\alpha''-\alpha')$$
$$-(a''-a')(\alpha'-\alpha)-(a'-a)(a''-a')\times\frac{B}{1440'};$$

$$(5)\ (a''-a')\,d\alpha'''-(a'''-a')\,d\alpha''+(a'''-a'')\,d\alpha'+(a''-a')(\alpha'''-\alpha'')$$
$$-(a'''-a'')(\alpha''-\alpha')-(a''-a')(a'''-a'')\times\frac{B'}{1440'}=0;$$

$$(6)\ (a''' - a'')\, d\alpha'''' - (a'''' - a'')\, d\alpha''' + (a'''' - a''')\, d\alpha'' + (a''' - a'')(\alpha'''' - \alpha''')$$
$$- (a'''' - a''')(\alpha''' - \alpha'') - (a''' - a'')(a'''' - a'') \times \frac{B''}{1440'} = 0.$$

Ces calculs ſont plus ſimples que ceux du §. 928.

(931) Appliquons les principes précédens à l'exemple du §. 925, relativement aux longitudes obſervées de la Comete.

Si l'on additionne les différences troiſiemes, l'on aura pour réſultat $+151''$; je diviſe ce réſultat par 8, nombre des différences additionnées; & j'ai $A = 19''$.

Additionnons maintenant, d'abord toutes les différences ſecondes, puis toutes ces différences moins la premiere, puis toutes ces différences moins les deux premieres, & ainſi de ſuite; en diviſant toutefois le réſultat de ces additions, par le nombre des différences que l'on aura conſidérées; & nommant B, B', B'', &c. les réſultats de ces opérations, l'on aura $B = 54'',4$; $B' = 64''$; $B'' = 38'',5$; $B''' = 55'',5$; $B'''' = 52''$; $B''''' = 57'',5$; $B'''''' = 17''$; $B''''''' = 23''$; & ainſi de ſuite. L'on voit par-là qu'il eſt aſſez difficile de déterminer dans le préſent exemple, la loi des quantités B, B', B'', &c. Il paroît cependant probable que les valeurs qui répondent aux ſept premieres obſervations, different peu d'être égales entre elles; & que leur valeur moyenne eſt d'environ 54''. Nous remarquerons cependant que les dernieres valeurs indiquent qu'elles vont un peu en diminuant. Au reſte, ces déterminations dépendent beaucoup de la ſagacité du Calculateur.

Seconde Méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations.

(932) La ſeconde méthode que nous indiquerons pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations, eſt l'emploi ſimple, mais raiſonné de la formule du §. 624. Nous ſuppoſerons donc que l'on a cette formule ſous les yeux, & que par conſéquent l'on a une idée nette des quantités β, γ, δ, ε, qu'elle renferme. Voici maintenant comment on peut raiſonner.

Si l'on conſidere cinq obſervations ſucceſſives, par exemple, celles des 2, 3, 4, 5 & 6 Août, il eſt ſenſible que l'on parviendra à déterminer les quantités β, γ, δ, ε; & ces quantités ſeront exactes, ſi les obſervations le ſont elles-mêmes. Mais ſi les obſervations ſont inexactes, les quantités β, γ, δ, ε, participeront de cette inexactitude. Voyons donc comment il ſeroit poſſible de parvenir à la connoiſſance exacte de ces quantités.

Pour parvenir à cette connoiſſance, je conſidere une nouvelle obſervation, par exemple, celle du 7 Août; & je ne fais plus uſage de celle du 2 Août. Je cherche avec les obſervations des 3, 4, 5, 6 & 7 Août, les valeurs de β, γ, δ, ε, qui entrent dans la nouvelle équation du §. 624. Si l'inexactitude de l'obſervation du 7 Août ne va pas préciſément dans le même ſens que celle du 2, j'aurai des valeurs un peu

différentes de β, γ, δ, ϵ. J'écris ces nouvelles valeurs, comme j'ai écrit les premieres. Je fais de nouveaux calculs, dans leſquels j'abandonne l'obſervation du 3 Août, pour prendre celle du 8, & j'ai de nouvelles valeurs de β, γ, δ, ϵ; j'écris ces nouvelles valeurs. Je fais encore de nouveaux calculs, dans leſquels j'abandonne l'obſervation du 4 Août, pour prendre celle du 9, & ainſi de ſuite. J'écris toujours les nouvelles valeurs de β, γ, δ, ϵ; je prends enfin les valeurs moyennes entre toutes ces quantités. Il eſt très-probable que j'aurai par-là, les valeurs exactes de β, γ, δ, ϵ, & que je parviendrai à débarraſſer l'équation du §. 624, des erreurs des obſervations.

Troiſieme Méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations.

(933) Je vais préſenter une troiſieme méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations. Cette méthode eſt fondée ſur des principes un peu différens que les précédentes.

La méthode dont il s'agit, a pour baſe les propriétés des mouvemens accélérés. En effet, ſi l'on part d'une certaine époque, & que l'on conſidere l'accroiſſement des lieux obſervés, on peut penſer que cet accroiſſement ſuit des loix analogues à celles que ſuivroient des eſpaces parcourus en vertu de mouvemens accélérés; de telle ſorte cependant que la totalité de cet accroiſſement n'augmente pas préciſément ſuivant une même certaine loi des vîteſſes, mais qu'une partie augmente ſuivant une certaine loi, une autre partie ſuivant une autre loi, une troiſieme partie enfin, ſuivant une autre troiſieme loi.

En général, ſi l'on nomme

- t le tems;
- ϵ les eſpaces parcourus;
- v les vîteſſes;

L'on a

$$(1)\quad \epsilon = \int v\,dt.$$

Si donc, dans le cas dont il s'agit, l'on nomme

- ϵ l'accroiſſement des lieux obſervés depuis une certaine époque;
- t le tems écoulé depuis cette époque;
- v, v', v'' les vîteſſes différentes ſuivant leſquelles les différentes portions de ϵ s'accroiſſent;
- A, A', A'' des coefficiens conſtans qu'il s'agit de déterminer;

L'on aura

$$(2)\quad \epsilon = A\int v\,dt + A'\int v'\,dt + A''\int v''\,dt.$$

Suppoſons maintenant que $v = t^0$, $v' = t$; $v'' = t^2$; l'équation (2) deviendra

$$(3)\quad \epsilon = At + \tfrac{1}{2}A't^2 + \tfrac{1}{3}A''t^3.$$

Je partirai déſormais de cette équation.

Si l'on conſerve les définitions de $a' - a$; $a'' - a$; $a''' - a$ du §. 926,

que l'on veuille que les quantités A, A', A'', qui entrent dans l'équation (3), appartiennent à un même intervalle de tems de 1440', & que l'on considere, par exemple, trois observations successives, il est clair que l'on aura respectivement pour ces trois observations

$$(4)\quad \varepsilon = A \times \frac{(a'-a)}{1440'} + \tfrac{1}{2} A' \times \frac{(a'-a)^2}{1440'^2} + \tfrac{1}{3} A'' \times \frac{(a'-a)^3}{1440'^3};$$

$$(5)\quad \varepsilon = A \times \frac{(a''-a)}{1440'} + \tfrac{1}{2} A' \times \frac{(a''-a)^2}{1440'^2} + \tfrac{1}{3} A'' \times \frac{(a''-a)^3}{1440'^3};$$

$$(6)\quad \varepsilon = A \times \frac{(a'''-a)}{1440'} + \tfrac{1}{2} A' \times \frac{(a'''-a)^2}{1440'^2} + \tfrac{1}{3} A'' \times \frac{(a'''-a)^3}{1440'^3}.$$

Je fais alors sur les quantités A, A', A'', les mêmes raisonnemens que j'ai faits (§. 932) sur les quantités β, γ, δ, ε. Je prends trois observations successives, celles, par exemple, des 3, 4 & 5 Août; à ε, je substitue dans les équations (4), (5), (6), les accroissemens respectifs des lieux observés, à partir du 2 Août; & j'ai trois équations, au moyen desquelles je détermine A, A', A''. Je remarque que ces quantités seroient exactes, si les accroissemens des lieux observés, que j'ai substitués dans les formules, étoient exacts; mais si les observations sont inexactes, les quantités A, A', A'' participeront de cette inexactitude. Je considere une nouvelle observation, celle, par exemple, du 6 Août, & je ne fais plus usage de l'observation du 3 Août. J'ai en conséquence, de nouvelles valeurs de A, A', A'',; & ainsi de suite. Par-là j'ai successivement différentes valeurs de A, A', A''. Je prends enfin, pour chaque quantité A, A', A'', la moyenne entre ces valeurs respectives, & j'ai très-probablement les expressions exactes de A, A', A''. Au moyen des équations (4), (5), (6), ainsi rectifiées, je calcule de nouveau les observations des 3, 4 & 5 Août; je compare ces résultats avec les observations; la différence donne les erreurs des observations.

ARTICLE III.

Application des formules des §. 624 & suivans, aux observations du milieu de Juin & du commencement d'Août.

(934) L'application des théories précédentes, aux observations du milieu de Juin & du commencement d'Août, est d'autant plus intéressante que cette application, renfermant des difficultés, servira à les éclaircir. Voici d'abord les observations dont nous ferons usage.

Observations du milieu de Juin.

Jours.	*Longitudes observées.*	*Latitudes observées.*
14 Juin.. $11^h\ 29'\ 48''$	$272^d\ 47'\ 44''$	$6^d\ 40'\ 24''$ Boréale.
15 . . . . 11 23 22	272 51 49	6 57 15.
17 . . . . 11 11 33	272 59 58	7 38 51.
20 . . . . 10 40 48	273 16 12	9 5 38.
21 . . . . 10 27 45	273 23 17	9 44 36.

Obſervations du commencement d'Août.

Jours.				*Longitudes obſervées.*			*Latitudes obſervées.*			
4 Août.	14^h	$12'$	$48''$	96^d	$47'$	$28''$	0^d	$55'$	$44''$	Auſtrale.
5	14	38	43	97	13	51	0	59	17.	
6	14	29	42	97	39	25	1	1	18.	
7	14	49	19	98	6	40	1	3	35.	
8	14	20	13	98	33	29	1	6	36.	
9	14	48	10	99	4	30	1	9	33.	
10	14	14	27	99	32	36	1	9	13.	
11	14	23	23	100	3	12	1	10	51.	
12	14	46	25	100	34	48	1	12	52.	

Uſage des réſultats de M. Léxell, pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations.

(935) Avant d'appliquer les formules des §. 624 & ſuivans, à ces obſervations, il convient de débarraſſer le calcul, des erreurs des obſervations. Pour y parvenir, on auroit pu y appliquer les formules de l'Article précédent; mais j'ai penſé que, dans le cas particulier de la premiere Comete de 1770, je ne pouvois mieux faire que de profiter du travail de M. Léxell. Voyons donc s'il ne ſeroit pas poſſible, par ce moyen, de ſe débarraſſer des erreurs des obſervations.

M. Léxell a déterminé une courbe elliptique, qu'il a donnée comme la véritable orbite de la Comete; & il a comparé les lieux déduits de ſes Tables, avec les lieux obſervés. Sans admettre, quant à préſent, les réſultats abſolus de M. Léxell, il eſt difficile de ne pas être convaincu que ſes Tables doivent au moins repréſenter avec une très-grande exactitude, les différences ſucceſſives entre les différens lieux de la Comete. Prenons, d'après cette idée, les obſervations du milieu de Juin, & nommons

$d\alpha$ l'erreur de l'obſervation du 14 Juin quant à la longitude;

$d\alpha', d\alpha'', d\alpha''', d\alpha''''$ les erreurs des obſervations des 15, 17, 20 & 21 Juin, relatives aux longitudes.

Il ſuit du travail de M. Léxell que l'on a

$$d\alpha' = d\alpha - 12'';$$
$$d\alpha'' = d\alpha + 37'' = d\alpha' + 49'';$$
$$d\alpha''' = d\alpha + 33'' = d\alpha'' - 4'';$$
$$d\alpha'''' = d\alpha + 52'' = d\alpha''' + 19''.$$

Si l'on nomme pareillement

$d\alpha$ l'erreur de l'obſervation du 14 Juin, quant à la latitude;

$d\alpha', d\alpha'', d\alpha''', d\alpha''''$, les erreurs des obſervations des 15, 17, 20 & 21 Juin, relatives aux latitudes;

L'on aura

$$d\alpha' = d\alpha + 6'';$$
$$d\alpha'' = d\alpha - 44'' = d\alpha' - 50'';$$
$$d\alpha''' = d\alpha - 39'' = d\alpha'' + 5'';$$
$$d\alpha'''' = d\alpha + 21'' = d\alpha''' + 60''.$$

(936) Nommons pareillement

$d\alpha$ l'erreur de l'obſervation du 4 Août, quant à la longitude;

$d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$, les erreurs des obſervations des 6, 8, 10, 12 Août, relatives à la longitude;

L'on aura

$$d\alpha' = d\alpha - 58'';$$
$$d\alpha'' = d\alpha - 30'' = d\alpha' + 28'';$$
$$d\alpha''' = d\alpha - 70'' = d\alpha'' - 40'';$$
$$d\alpha'''' = d\alpha - 23'' = d\alpha''' + 47''.$$

Nommons enfin

$d\alpha$ l'erreur de l'obſervation du 4 Août, quant à la latitude;

$d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$, les erreurs des obſervations des 6, 8, 10 & 12 Août, relatives à la latitude;

L'on aura

$$d\alpha' = d\alpha - 22'';$$
$$d\alpha'' = d\alpha - 81'' = d\alpha' - 59'';$$
$$d\alpha''' = d\alpha - 24'' = d\alpha'' + 57'';$$
$$d\alpha'''' = d\alpha - 68'' = d\alpha''' - 44''.$$

Application des formules des §. 624 & ſuivans, aux obſervations du milieu de Juin.

(937) Dans l'application que nous ferons des formules des §. 624 & ſuivans, nous ne ſuppoſerons pas uniquement, comme dans ces paragraphes, que $\beta = \frac{\alpha' - \alpha}{a' - a}$; $\beta' = \frac{\alpha'' - \alpha'}{a'' - a'}$; $\beta'' = \frac{\alpha''' - \alpha''}{a''' - a''}$; $\beta''' = \frac{\alpha'''' - \alpha'''}{a'''' - a'''}$; mais nous donnerons à ces expreſſions, la forme ſuivante,

$$\beta = \frac{\alpha' - \alpha + d\alpha' - d\alpha}{a' - a}; \quad \beta' = \frac{\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha'}{a'' - a'};$$

$$\beta'' = \frac{\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha''}{a''' - a''}; \quad \beta''' = \frac{\alpha'''' - \alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha'''}{a'''' - a'''}.$$

Si l'on applique le calcul aux obſervations des 14, 15, 17, 20 & 21 Juin, l'on aura $a' - a = 1433',5$; $a'' - a' = 2868'$; $a''' - a'' = 4289'$; $a'''' - a''' = 1427'$; $a'' - a = 4301',5$; $a''' - a' = 7157'$; $a'''' - a'' = 5716'$; $a''' - a = 8590',5$; $a'''' - a' = 8584'$; $a'''' - a = 10017',5$. De plus, dans le

le cas particulier des longitudes, l'on a $\alpha' - \alpha + d\alpha' - d\alpha = 233''$; $\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha' = 529''$; $\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha'' = 970''$; $\alpha'''' - \alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha''' = 444''$; & dans le cas des latitudes, l'on a $\alpha' - \alpha + d\alpha' - d\alpha = 1017''$; $\alpha'' - \alpha' + d\alpha'' - d\alpha' = 2446''$; $\alpha''' - \alpha'' + d\alpha''' - d\alpha'' = 5212''$; $\alpha'''' - \alpha''' + d\alpha'''' - d\alpha''' = 2398''$; on parviendra donc aux équations ſuivantes.

Equations réſultantes des obſervations du milieu de Juin.

Longitude géocentrique $= 272^d\ 47'\ 44'' + d\alpha + 0'',162539\ (y - a)$
$+ 0'',00000509357\ (y - a)(y - a') + 0,00000000008 5476\ (y - a)(y - a')(y - a'')$
$+ 0'',000000000000009659\ (y - a)(y - a')(y - a'')(y - a''')$;

Latitude géocentrique $= 6^d\ 40'\ 24'' + d\alpha + 0'',709453\ (y - a)$
$+ 0'',000033318\ (y - a)(y - a') + 0'',000000020124\ (y - a)(y - a')(y - a'')$
$+ 0,0000000000015695\ (y - a)(y - a')(y - a'')(y - a''')$.

Obſervations compoſées déduites des équations précédentes.

(938) Il eſt facile d'avoir les obſervations moyennes qui réſultent des équations précédentes. Suppoſons en effet que l'on veuille calculer les obſervations qui auroient eu lieu le 16 Juin $11^h\ 29'\ 48''$, & le 18 Juin $11^h\ 29'\ 48$; l'on remarquera d'abord, que relativement au 16 Juin $11^h\ 29'\ 48''$, l'on a $y - a = 2880'$; $y - a' = y - a + a - a' = 2880' - 1433',5 = 1446',5$; $y - a'' = y - a' + a' - a'' = 1446',5 - 2868' = -1421',5$; $y - a''' = y - a'' + a'' - a''' = -1421',5 - 4289' = -5710',5$. L'on remarquera pareillement que, relativement au 18 Juin $11^h\ 29'\ 48''$, l'on a $y - a = 5760'$; $y - a' = 4326',5$; $y - a'' = 1458',5$; $y - a''' = -2830',5$; & les équations du §. précedent deviendront

		Longitudes.	*Latitudes.*
16 Juin	$11^h\ 29'\ 48''$	$272^d\ 55'\ 56'' + d\alpha$	$7^d\ 16'\ 39'',1 + d\alpha$
18	11 29 48	273 5 20 $+ d\alpha$	8 3 18 $+ d\alpha$

J'obſerve maintenant, que quoique la quantité $d\alpha$ ſoit arbitraire, la valeur la plus naturelle qu'on puiſſe lui donner eſt celle d'où il réſulte $d\alpha + d\alpha' + d\alpha'' + d\alpha''' + d\alpha'''' = 0$. Cette ſuppoſition appliquée aux valeurs de $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$, $d\alpha'''$, $d\alpha''''$ du §. 935, donne

	En longitude.	*En latitude.*
Erreur de l'obſervation du 14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$	$d\alpha = -22''$	$d\alpha = 11''$.

Si l'on adopte ces valeurs de $d\alpha$, l'on aura

Jours.	*Longitudes géocentriques de la Comete.*	*Latitudes géocentriques de la Comete.*
14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$	$272^d\ 47'\ 22''$	$6^d\ 40'\ 35''$ Boréale.
16 Juin 11 29 48	272 55 34	7 16 50,5.
18 Juin 11 29 48	273 4 58	8 3 29.

L'on avoit pour les mêmes inſtans,

Longitudes du Soleil.	*Diſtances du Soleil à la Terre.*	*Logarithmes des diſtances.*
$83^d\ 46'\ 45''$	1,016165	0·0069640.
85 41 16	1,016317	0·0070290.
87 35 45	1,016450	0·0070860.

Application des formules aux obſervations du commencement d'Août.

(939) Si l'on applique pareillement le calcul aux obſervations du commencement d'Août, c'eſt-à-dire aux obſervations des 4, 6, 8, 10 & 12 Août, & que l'on ſuive une marche analogue à celle qui vient d'être développée, l'on aura les obſervations moyennes ſuivantes.

Obſervations compoſées pour le commencement d'Août.

Jours		*Longitudes géocentriques de la Comete.*	*Latitudes géocentriques de la Comete.*
4 Août. . .	$14^h\ 12'\ 48''$	$96^d\ 48'\ 10''$	$0^d\ 56'\ 23''$ Auſtrale.
6 Août. . .	14 12 48	97 38 44	1 1 33.
8 Août. . .	14 12 48	98 35 26	1 5 53.

L'on avoit pour les mêmes inſtans,

Longitudes du Soleil.	*Diſtances du Soleil à la Terre.*	*Logarithmes des diſtances.*
$132^d\ 34'\ 26''$.	1,01386.	0·0059770.
134 29 28	1,01353.	0·0058360.
136 24 35	1,01319.	0·0056900.

ARTICLE IV.

Diſtances de la Comete à la Terre, & rayons vecteurs de cet Aſtre, conclus des obſervations compoſées déduites des obſervations du milieu de Juin.

(940) Après avoir conclu des obſervations de la Comete, les obſervations compoſées qui en réſultent; après avoir calculé les longitudes & les diſtances correſpondantes du Soleil, la ſuite des opérations indiquées par nos méthodes fait voir que l'on doit déterminer les diſtances de la Comete à la Terre, & les rayons vecteurs de la Comete correſpondans aux obſervations compoſées. Pour y parvenir, l'on fera uſage des valeurs de b, c, M, N, Q, & des équations des §. 828 & ſuivans.

Si l'on applique le calcul aux obſervations du milieu de Juin, l'on aura $L' = 6^d\ 40'\ 35''$; $L'' = 7^d\ 16'\ 50'',5$; $L''' = 8^d\ 3'\ 29''$; $L''' - L' = 1^d\ 22'\ 54''$; $\frac{1}{2}(L''' - L') = 0^d\ 41'\ 27''$; $A' = 83^d\ 46'\ 45''$; $A'' = 85^d\ 41'\ 16''$; $A''' = 87^d\ 35'\ 45''$; $A''' - A' = 3^d\ 49'\ 0''$; $\frac{1}{2}(A''' - A') = 1^d\ 54'\ 30''$;

$Z = 166^d 40' 50''$; $B' = 272^d 47' 22''$; $B'' = 272^d 55' 34''$; $B''' = 273^d 4' 58''$; $B''' - B' = 0^d 17' 36''$; $\frac{1}{2}(B''' - B') = 0^d 8' 48''$; $B' - A' = 189^d 0' 37''$; $B' - A'' = 187^d 6' 6''$; $B' - A''' = 185^d 11' 37''$; $B'' - A'' = 187^d 14' 18''$; $B''' - A' = 189^d 18' 13''$; $B''' - A'' = 187^d 23' 42''$, $B''' - A''' = 185^d 29' 13''$; $t = 2880'$.

$$b = 0{,}0014379 - 0{,}00010452 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3$$

$$c = 0{,}0010826 - 0{,}000081280 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3$$

$$\frac{c}{b} = 0{,}752903 - 0{,}00180124 \left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3$$

$$M = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2 + 0{,}00060727 \times \frac{c}{b}$$

$$N = -0{,}008593 + 0{,}008793 \times \frac{c}{b};$$

$$Q = 0{,}0045816 - 0{,}0189385 \times \frac{1}{R' + R'''}.$$

Pour faciliter l'uſage des équations précédentes, nous remarquerons que log. 0,00180124 = 7·2555711; log. 0,00060727 = 6·7833815; log. 0,008793 = 7·9441371; log. 0,0189385 = 8·2773450.

(941) Nous ne connoiſſons pas la valeur de $R' + R'''$ qui entre dans l'expreſſion de Δ'; nous ſavons ſeulement que, puiſque lors des obſervations des 14 & 18 Juin, la diſtance de la Comete au Soleil, ſurpaſſoit 90^d, R' & R''' ſont chacun plus grands que 1. Suppoſons un moment que $R' + R''' = 2{,}10000$, & par conſéquent $\frac{R' + R'''}{2} = 1{,}05000$; nous aurons log $\frac{R' + R'''}{2} = 0·0211893$; log. $\left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3 = 0·0635679$; complément log. $(R' + R''') = 9·6777807$; d'où l'on conclura $\frac{c}{b} = 0{,}750818$; $M = 0{,}061636$; $N = -0{,}001991$; $Q = -0{,}0044367$; l'équation aux diſtances ſera $\Delta'^2 - 2 \times 0{,}032302\, \Delta' - 0{,}071982 = 0$; & l'on aura $\Delta' = 0{,}30252$; $\Delta''' = 0{,}27714$; $R' = 1{,}31419$; $R''' = 1{,}24133$; $R' + R''' = 2{,}55552$.

La valeur de $R' + R'''$ que l'on vient de déterminer, differe beaucoup de la valeur que nous avions ſuppoſée; il conviendra donc de recommencer le calcul avec cette nouvelle valeur de $R' + R'''$. L'on aura alors $\frac{c}{b} = 0{,}749145$; $M = 0{,}063381$; $N = -0{,}002006$; $Q = -0{,}028292$; l'équation aux diſtances ſera $\Delta'^2 - 2 \times 0{,}031650 \times \Delta' - 0{,}066755 = 0$; d'où l'on conclura $\Delta' = 0{,}24578$; $\Delta''' = 0{,}18375$; $R' = 1{,}25767$; $R''' = 1{,}19797$; $R' + R''' = 2{,}45565$.

La valeur de $R' + R'''$ concluе de ce nouveau calcul, n'eſt pas encore

cohérente avec la valeur ſuppoſée. L'on fera donc un troiſieme calcul, & l'on aura $\Delta' = 0{,}25658$; $\Delta''' = 0{,}19231$; $R' = 1{,}26884$; $R''' = 1{,}20645$; $R' + R''' = 2{,}47529$.

J'écris enſuite les réſultats de la maniere ſuivante.

Valeurs de $R'+R'''$ Suppoſées.	Données par le calcul.	Différences.	Différences des différences.	Valeurs de Δ' données par le calcul.	Différences.
2,10000. . . .	2,55552 . .	+ 0,45552		0,30252	
			. . . — 0,43588		. . . — 0,04594.
2,45565. . . .	2,47529 . .	+ 0,01964		0,25658	
			. . . — 0,11852		. . . — 0,01120.
2,55552. . . .	2,45565 . .	— 0,09888		0,24538	

Je remarque d'abord que pour avoir la valeur de Δ' qui réſout le Problême, il faut que les valeurs ſuppoſées de $R' + R'''$, & les valeurs données par le calcul, ſoient égales. Je dis donc ; ſi une diminution de 0,43588 dans les différences entre les valeurs ſuppoſées de $R' + R'''$, & les valeurs données par le calcul, a fait varier les diſtances Δ', de -0.004594, combien une diminution de 0,01964 dans les différences entre ces mêmes valeurs de $R' + R'''$, fera-t-elle varier de nouveau, la diſtance Δ' ? La proportion donne $-0{,}00207$ pour cette variation de Δ', & l'on a $\Delta' = 0{,}25658 - 0{,}00207 = 0{,}25451$.

La valeur correſpondante de $R' = 1{,}26660$. Ce ſont les valeurs de Δ' & de R' qui répondent à l'obſervation du 14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$.

Solution d'une difficulté relative aux réſultats précédens.

(942) Le réſultat précédent peut faire naître une difficulté qu'il faut prévenir. Si l'on compare ce réſultat aux calculs de M. Léxell, on trouvera une grande différence entre la diſtance de la Comete à la Terre, & le rayon vecteur de cet Aſtre, donnés par mes calculs pour le 14 Juin, $11^h\ 29'\ 48''$, & les réſultats de M. Léxell. Rien n'eſt plus ſimple que la réponſe à cette objection. En effet, j'ai calculé dans l'hypotheſe parabolique, & M. Léxell a calculé dans l'hypotheſe d'une Ellipſe dont le demi-grand axe $= 3{,}1478606$. Maintenant, dans l'expreſſion de Q du §. 833, ſi l'on ſuppoſe $a = 3{,}1478606$, l'on aura

$$Q = (r' - r''')^2 + 4 r' r''' \sin^2 \tfrac{1}{2}(A''' - A') + 0{,}00000000018134 \times t^2 - \frac{0{,}00000000228328 \times t^2}{R' + R'''} ;$$

Et cette expreſſion devient, dans les ſuppoſitions du §. 940, relatives à r', r''', A', A''', t,

$$Q = 0{,}0060857 - 0{,}0189385 \times \frac{1}{R' + R'''}.$$

Si l'on recommence les calculs avec cette nouvelle expreſſion de Q, l'on aura, dans l'hypotheſe de M. Léxell, pour le 14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$, $\Delta' = 0{,}20601$; $R' = 1{,}21892$.

ARTICLE V.

Distances de la Comete à la Terre, & rayons vecteurs de la Comete, conclus des observations composées deduites des observations du commencement d'Août.

(943) Si l'on applique le calcul aux observations composées du §. 939, l'on aura $L' = -0^d\,56'\,23''$; $L'' = -1^d\,1'\,33''$; $L''' = 1^d\,5'\,53''$; $L''' - L' = -0^d\,9'\,30''$; $\frac{1}{2}(L''' - L') = -0^d\,4'\,45''$; $A' = 132^d\,34'\,26''$; $A'' = 134^d\,29'\,28''$; $A''' = 136^d\,24'\,35''$; $A''' - A' = 3^d\,50'\,9''$; $\frac{1}{2}(A''' - A') = 1^d\,55'\,4'',5$. $Z = 215^d\,29'\,2''$; $B' = 96^d\,48'\,10''$; $B'' = 97^d\,38'\,44''$; $B''' = 98^d\,33'\,26''$; $B''' - B' = 1^d\,45'\,16''$; $\frac{1}{2}(B''' - B') = 0^d\,52'\,38''$; $B' - A' = 324^d\,13'\,34''$; $B' - A'' = 322^d\,18'\,32''$; $B' - A''' = 320^d\,23'\,25''$; $B'' - A'' = 323^d\,9'\,16''$; $B''' - A' = 325^d\,59'\,0''$; $B''' - A'' = 324^d\,3'\,58''$; $B''' - A''' = 322^d\,8'\,51''$; $t = 2880'$.

$$b = -0{,}00102500 + 0{,}000016387\left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3;$$

$$c = -0{,}00115636 + 0{,}000020352\left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3;$$

$$\frac{c}{b} = 1{,}12815 - 0{,}0018195\left(\frac{R' + R'''}{2}\right)^3;$$

$$M = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2 + 0{,}00094699 \times \frac{c}{b};$$

$$N = -0{,}0419982 + 0{,}0403437 \times \frac{c}{b};$$

$$Q = \begin{cases} \textit{Hypothese parabolique.} \\ 0{,}0046026 - 0{,}0189385\,\dfrac{1}{R' + R'''}; \\ \textit{Hypothese de M. Lexell.} \\ 0{,}0061067 - 0{,}0189385\,\dfrac{1}{R' + R'''}. \end{cases}$$

L'on aura, d'après ces calculs, pour le 4 Août $14^h\,12'\,48''$,

Dans l'hypothese parabolique;	*Dans l'hypothese de M. Lexell,*
$\Delta' = 0{,}59500$; $R' = 0{,}63493$;	$\Delta' = 0{,}51256$; $R' = 0{,}66893$.

ARTICLE VI.

Application des formules du §. 553 aux observations dont il s'agit; & consideration d'une nouvelle observation.

(944) Si l'on considere maintenant une nouvelle observation, celle, par exemple, du 2 Octobre $15^h\,43'\,37''$; c'est la derniere observation que l'on ait faite de la Comete de 1770. La longitude de cet Astre étoit à cet instant de $130^d\,41'\,51''$; sa latitude australe de $1^d\,10'\,4''$; la longitude du Soleil étoit de $189^d\,56'\,27''$; sa distance à la Terre, de

0,99940, dont le logarithme $= 9 \cdot 9997390$. L'on conclura donc facilement la diſtance de la Comete à la Terre, au moyen de l'équation (1) du §. 553. En effet, ſi l'on conſerve les définitions des quantités C, D′, E′, F, G, H, K de ce paragraphe, & que l'on nomme

Δ', Δ'', les diſtances de la Comete à la Terre, lors des deux premieres obſervations;

Δ''' la diſtance de la Comete à la Terre, lors de la derniere obſervation ;

R', R'', R''' les rayons vecteurs de la Comete, lors des trois obſervations;

L'on aura

$$(1)\ \Delta''' = \frac{D'\Delta'\Delta'' - G\Delta' - H\Delta''}{C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K};$$

$$(2)\ R''' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2r'''\Delta''' \operatorname{cof} L''' \operatorname{cof} (B''' - A'''))}.$$

Au moyen de ces équations, l'on déterminera facilement la diſtance Δ''' de la Comete à la Terre, & le rayon vecteur R''', correſpondans à l'obſervation du 2 Octobre $15^h\ 43'\ 37''$.

(945) Si l'on applique le calcul, aux obſervations des 14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$, 4 Août $14^h\ 12'\ 48''$, & 2 Octobre $15^h\ 43'\ 37''$, & que l'on ſuppoſe que l'on avoit pour ces inſtans, les élémens ſuivans,

	Comete		Soleil.	
Jours.	*Longitudes.*	*Latitudes.*	*Longitudes.*	*Diſt. à la Terre.*
14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$	$272^d\ 47'\ 22''$	$6^d\ 40'\ 35''$ Bor.	$83^d\ 46'\ 45''$	1,016165;
4 Août. 14 12 48	96 48 10	0 56 23 Auſtr.	132 34 26	1,01386;
2 Octobre 15 43 37	130 41 51	1 10 4	189 56 27	0,99940.

L'on aura, $B' = 272^d\ 47'\ 22''$; $B'' = 96^d\ 48'\ 10''$; $B''' = 130^d\ 41'\ 51''$; $L' = 6^d\ 40'\ 35''$; $L'' = -0^d\ 56'\ 23''$; $L''' = -1^d\ 10'\ 4''$; $A' = 83^d\ 46'\ 45''$; $A'' = 132^d\ 34'\ 26''$, $A''' = 189^d\ 56'\ 27''$; $B'' - B''' = 326^d\ 6'\ 19''$; $B''' - B' = 217^d\ 54'\ 29''$; $B' - B'' = 175^d\ 59'\ 12''$; $B'' - A'' = 266^d\ 51'\ 43''$; $A''' - B' = 277^d\ 9'\ 5''$; $A'' - B''' = 1^d\ 52'\ 35''$; $B' - A'' = 140^d\ 12'\ 56''$; $B''' - A' = 46^d\ 55'\ 6''$; $A' - B'' = 346^d\ 58'\ 33''$; $B''' - A''' = 300^d\ 45'\ 24''$; $A'' - A''' = 302^d\ 37'\ 59''$; $A''' - A' = 106^d\ 9'\ 42''$; $A' - A'' = 311^d\ 12'\ 19''$; $C = -0{,}0562231$; $D' = -0{,}099850$; $E' = -0{,}0092738$; $F = -0{,}0075034$; $G = -0{,}099206$; $H = -0{,}015997$; $K = 0{,}015797$; $\log C = 8 \cdot 7499148$; $\log D' = 8 \cdot 9993480$; $\log E' = 7 \cdot 9672557$; $\log F = 7 \cdot 8752557$; $\log G = 8 \cdot 9965368$; $\log H = 8 \cdot 2040486$; $\log K = 8 \cdot 1985805$.

$$(1)\ \Delta''' = \frac{-0{,}099850\,\Delta'\Delta'' + 0{,}099206\,\Delta' + 0{,}015997\,\Delta''}{-0{,}0562231\,\Delta'\Delta'' + 0{,}0092738\,\Delta' + 0{,}0075034\,\Delta'' + 0{,}015797}.$$

Maintenant, je remarque que nous avons deux ſyſtêmes de valeurs de Δ', Δ'',

Syſtême Parabolique.	*Hypotheſe de M. Lexell.*
$\Delta' = 0{,}25451$;	$\Delta' = 0{,}20602$;
$\Delta'' = 0{,}59500$;	$\Delta'' = 0{,}51256$.

Si l'on substitue successivement ces différentes valeurs dans l'équation (1) l'on aura

Jours.	*Système parabolique.*	*Hypothese de M. Léxell.*
14 Juin... $11^h\ 29'\ 48''$..	$\Delta'=0{,}25451$; $R'=1{,}26660$;	$\Delta'=0{,}20602$; $R'=1{,}21892$.
4 Août... 14 12 48..	$\Delta''=0{,}59500$; $R''=0{,}63493$;	$\Delta''=0{,}51256$; $R''=0{,}66893$.
2 Octobre.. 15 43 37..	$\Delta'''=1{,}39167$; $R'''=1{,}23027$;	$\Delta'''=1{,}15810$; $R'''=1{,}07558$.

Ces élémens satisfont à la condition que les mouvemens de la Comete se passent dans un même plan.

Article VII.

Application des formules des §. 639, 641, 643, 645 à la Comete de 1770; & détermination des élémens approchés de cette Comete, dans l'hypothese parabolique.

(946) Je ne m'étendrai point sur l'hypothese elliptique de M. Léxell. Je ne pourrois que répéter ce qui a été dit par cet Astronome, & rendre hommage à son travail. Je dois même ajouter que M. Pingré, ayant examiné de nouveau cette question, dans sa Cométographie, a été amené à des résultats peu différens de ceux de M. Léxell; de sorte qu'il n'est pas possible de douter que l'hypothese elliptique de M. Léxell, ne représente avec toute l'exactitude desirable, les observations de la premiere Comete de 1770. Mais il faut convenir que malgré l'accord des calculs avec les observations, l'objection contre cette théorie, tirée de la non-réapparition de la Comete en 1770; la circonstance singuliere que cette Comete, dont la révolution n'est que de 5 ans & demi, n'a cependant été observée qu'une seule fois; toute cette réunion de circonstances laisse quelque inquiétude dans l'esprit, & semble faire desirer un nouvel examen de l'hypothese parabolique.

Je me propose d'essayer de nouveau cette hypothese; & si je ne parviens pas à des résultats aussi satisfaisans que je le desirerois, j'aurai au moins l'avantage de présenter au Lecteur, dans tout son jour, la difficulté du Problême, ainsi que les équations auxquelles il faudroit satisfaire pour avoir une orbite parabolique.

Je vais d'abord déterminer par les méthodes des §. 639, 641, 643, 645, l'angle compris sur le plan de la trajectoire de la Comete, entre les rayons vecteurs correspondans aux deux observations extrêmes; c'est-à-dire, aux observations des 14 Juin & 2 Octobre; les anomalies de la Comete, lors de ces deux observations; la distance périhélie, & l'instant du passage de la Comete par le périhélie.

(947) Si l'on applique des nombres dans les formules des §. 639, 641, 643, 645, l'on aura, pour le cas particulier que nous considérons, $r'=1{,}016165$; $r'''=0{,}99940$; $\Delta'=0{,}25451$; $\Delta'''=1{,}39167$; $R'=1{,}26660$; $R'''=1{,}23027$; $A'=83^d\ 46'\ 45''$; $A'''=189^d\ 56'\ 27''$; $A'''-A'=106^d\ 9'\ 42''$;

$B' = 172^d\,47'\,22''$; $B''' = 130^d\,41'\,51''$; $B''' - B' = 217^d\,54'\,29''$; $B' - A''' = 82^d\,50'\,55''$; $B''' - A' = 46^d\,55'\,6''$; $L' = 6^d\,40'\,35''$; $L''' = -1^d\,10'\,4''$; d'où l'on conclura, $K' = -1{,}558207$; $\frac{K'}{R'R'''} = -0{,}999964$; $1 - \frac{K'}{R'R'''} = 1{,}999964$; $\frac{1}{2}N' = 89^d\,46'\,0''$; $\Omega = 89^d\,46'\,10''$; $Z' - \Omega = -0^d\,50'\,9''$.

Angle compris entre les rayons vecteurs extrêmes. . . . . . $= 179^d\,32'\,0''$;
Anomalie de la Comete, lors de la premiere observation $= -\ 90\ 36\ 19$;
Anomalie de la Comete, lors de la seconde observation . . $=\ 88\ 55\ 41$;
Distance périhélie . . . . $= 0{,}62662$.
Passage par le périhélie . . . . 8 Août $17^h\,20'$.

(948) Si les élémens que nous venons de déterminer sont les véritables élémens paraboliques de la Comete de 1770, l'on doit retrouver avec ces élémens, les intervalles de tems écoulé entre l'observation du 14 Juin & celle du 4 Août, entre l'observation du 4 Août & celle du 2 Octobre.

Je remarque d'abord, qu'entre l'observation du 14 Juin $11^h\,30'$, & celle du 4 Août $14^h\,13'$, il s'est écoulé 51 jours $2^h\,43'$; qu'entre l'observation du 14 Juin $11^h\,30'$, & celle du 2 Octobre $15^h\,44'$, il s'est écoulé 110 jours $4^h\,14'$; & qu'enfin entre l'observation du 4 Août $14^h\,13'$, & celle du 2 Octobre $15^h\,44'$, il s'est écoulé 59 jours $1^h\,31'$. Voyons si nous retrouverons ces intervalles.

Pour nous en assurer, nous nommerons

D la distance périhélie que nous venons de déterminer;
R′ le rayon vecteur de la Comete correspondant à l'observation du 14 Juin;
R″ le rayon vecteur de la Comete correspondant à l'observation du 4 Août;
R‴ le rayon vecteur de la Comete correspondant à l'observation du 2 Octobre;
T′ le tems écoulé entre l'observation du 4 Août & celle du 14 Juin;
T″ le tems écoulé entre l'observation du 2 Octobre & celle du 4 Août;
T‴ le tems écoulé entre l'observation du 2 Octobre & celle du 14 Juin. Nous supposons que ces tems sont exprimés en minutes horaires.

Nous aurons recours à l'équation (3) du §. 434, que nous mettrons sous la forme suivante,

$$(1)\quad T' = 109{,}6153 \times 1440' \Big(\tfrac{1}{4}(R' - D)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}D(R' - D)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}(R'' - D)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{4}D(R'' - D)^{\frac{1}{2}}\Big);$$

$$(2)\quad T'' = 109{,}6153 \times 1440' \Big(\tfrac{1}{4}(R''' - D)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}D(R''' - D)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}(R'' - D)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}D(R'' - D)^{\frac{1}{2}}\Big);$$

$$(3)\quad T''' = 109{,}6153 \times 1440' \Big(\tfrac{1}{4}(R''' - D)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}D(R''' - D)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}(R' - D)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}D(R' - D)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Dans

Dans l'équation (1), nous avons fait précéder les deux derniers termes, du ſigne *moins*, tandis que ces mêmes termes ſont précédés du ſigne *plus*, dans les deux autres équations. La raiſon en eſt ſimple ; le paſſage par le périhélie ayant eu lieu entre la ſeconde & la troiſieme obſervation, lorſque, dans la comparaiſon de ces obſervations, l'on prend pour époque le paſſage par le périhélie, le tems écoulé entre les deux premieres obſervations eſt égal à une différence ; ce tems eſt égal à une ſomme, lorſqu'on compare entre elles les autres obſervations.

Si l'on ſuppoſe $D = 0,62662$; $R' = 1,26660$; $R'' = 0,63493$; $R''' = 1,23027$, l'on aura $R' - D = 0,63998$; $R'' - D = 0,00831$; $R''' - D = 0,60365$; $T' =$ 50 jours $12^h\ 36'$; $T'' =$ 57 jours $14^h\ 15'$; $T''' =$ 108 jours $2^h\ 51'$.

Les intervalles que nous venons de trouver different ſenſiblement de ceux donnés par les obſervations. En effet, ſi l'on compare ces intervalles, on verra facilement que T' eſt trop petit de $14^h\ 16'$; que T'' eſt trop petit de 1 jour $11^h\ 16'$; & qu'enfin T''' eſt trop petit de 2 jours $1^h\ 23'$. Il conviendra donc de corriger les élémens par les méthodes que nous avons données précédemment. Mais auparavant nous allons eſſayer la ſeconde racine de l'équation dont nous avons fait uſage (§. 947).

(949) Lorſque l'on a calculé, par la formule du §. 639, l'angle compris entre les rayons vecteurs extrêmes, l'on a eu deux ſolutions ; $\frac{1}{2}$ angle compris $= 89^d\ 46'\ 0''$, & c'eſt la racine dont j'ai fait uſage ; l'on a eu de plus, $\frac{1}{2}$ angle compris $= 90^d\ 14'\ 0''$; eſſayons cette ſeconde valeur.

Dans ce cas particulier l'on a, $\frac{1}{2} N = 90^d\ 14'\ 0''$; $\Omega = 90^d\ 13'\ 50''$; $Z' + \Omega = - 0^d\ 50'\ 9''$;

Angle compris entre les deux rayons vecteurs extrêmes $= 180^d\ 28'\ 0''$;
Anomalie de la Comete, lors de la premiere obſervation $= -91\ \ 3\ 59$;
Anomalie de la Comete, lors de la ſeconde obſervation $= 89\ \ 24\ \ 1$;
Diſtance périhélie . . . . 0,62151 ;
Paſſage par le périhélie. . . . . 8 Août $17^h\ 10'$.

(950) Je terminerai cet Article, en obſervant qu'il feroit facile, au moyen de nos méthodes, de déterminer les élémens approchés de la Comete dans l'hypotheſe elliptique. On feroit uſage, dans ce cas, des valeurs de Δ', R', Δ'', R'', Δ''', R''', relatives à l'hypotheſe elliptique (§. 945) ; l'on calculeroit les angles compris entre les rayons vecteurs R', R'' ; R', R''' au moyen des équations du §. 663. L'on détermineroit les anomalies correſpondantes aux trois obſervations des 14 Juin, 4 Août, 2 Octobre, au moyen de l'équation (10) du §. 662. L'on détermineroit enſuite l'excentricité de l'orbite, le parametre du grand axe, la longueur abſolue du grand axe, la diſtance périhélie, la durée de la révolution de la Comete, l'inſtant du paſſage par le périhélie, au moyen des équations du §. 662. Comme j'ai donné un exemple de ces calculs, & que mon but eſt moins de trouver les élémens elliptiques de la Comete, que de vérifier ſi l'on ne peut point repréſenter les lieux de cette Comete, au moyen d'une orbite parabolique, j'ai cru pouvoir me diſpenſer de ce travail.

ARTICLE VIII.

Vérification des élémens approchés de la Comete.

(951) J'ai donné, dans l'Article précédent, les élémens approchés de la Comete; mais on ne peut se dissimuler que les calculs ont fait voir en même tems que ces élémens ont besoin d'être rectifiés; je me propose en conséquence d'appliquer à la rectification de ces élémens, les formules démontrées dans cet Ouvrage.

J'avois d'abord songé à faire usage des équations des §. 651 & 652; comme j'ai cru devoir rendre la Solution le plus indépendante qu'il est possible, de toute hypothese sur la nature de la trajectoire, voici une méthode que j'ai substituée à celle des §. 651 & 652, & que l'on pourra employer généralement pour les trajectoires paraboliques.

Deux conditions sont nécessaires pour assurer la légitimité des élémens; la premiere, que ces élémens représentent les intervalles écoulés entre les observations; la seconde, que l'équation du §. 553 soit satisfaite. Voici donc le procédé qu'il faudra suivre.

Soit

D la distance périhélie hypothétique, trouvée par les calculs de l'Article précédent;

Z', Z'', Z''', les trois anomalies de la Comete correspondantes aux trois observations que l'on compare; ces anomalies se détermineront facilement au moyen de la Table du mouvement parabolique des Cometes; puisque par la supposition, l'on connoît la distance périhélie ainsi que l'instant du passage par le périhélie;

R', R'', R''' les trois rayons vecteurs de la Comete pour les mêmes instans; ces rayons vecteurs se détermineront au moyen des équations suivantes,

$$R' = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} Z'};\ R'' = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} Z''};\ R''' = \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} Z'''}.$$

A', A'', A''' les trois longitudes du Soleil;
r', r'', r''', les trois distances de la Terre au Soleil;
B', B'', B''', les trois longitudes géocentriques de la Comete;
L', L'', L''', les trois latitudes géocentriques de la Comete;
} correspondantes aux trois observations que l'on compare.

Δ', Δ'', Δ''', les trois distances correspondantes de la Terre à la Comete; ces distances se détermineront au moyen des équations suivantes,

$$\Delta' = r' \cos L' \cos(B' - A') \pm \sqrt{(R'^2 - r'^2(1 - \cos^2 L' \cos^2 (B' - A')))};$$

$$\Delta'' = r'' \cos L'' \cos(B'' - A'') \pm \sqrt{(R''^2 - r''^2(1 - \cos^2 L'' \cos^2 (B'' - A'')))};$$

$$\Delta''' = r''' \cos L''' \cos(B''' - A''') \pm \sqrt{(R'''^2 - r'''^2(1 - \cos^2 L''' \cos^2 (B''' - A''')))}.$$

Au moyen de ces équations, & en partant des élémens hypothétiques trouvés dans l'Article précédent, l'on déterminera les quantités Z', Z'', Z''', R', R'', R''', pour en conclure les valeurs de Δ', Δ'', Δ''' ; l'on portera ces valeurs de Δ', Δ'', Δ''', dans l'équation du §. 553, & l'on verra ſi elle eſt ſatisfaite. Dans le cas où cette équation ſeroit ſatisfaite, l'on s'arrêteroit à ces élémens. Mais comme il eſt infiniment vraiſemblable que l'équation du §. 553 ne ſera pas ſatisfaite, alors l'on fera varier tant ſoit peu l'inſtant du paſſage par le périhélie, ſans altérer la diſtance périhélie; & l'on trouvera facilement quel ſeroit l'inſtant du paſſage qui rendroit nulle l'équation du §. 553. L'on recommencera enſuite les calculs, avec une nouvelle diſtance périhélie; l'on aura, par cette méthode, une ſuite d'élémens probables, & l'on s'arrêtera à ceux qui repréſenteront le plus exactement, les obſervations.

On ne doit point oublier que les équations du préſent paragraphe étant fondées ſur les propriétés de la Parabole, ſuppoſent que la trajectoire eſt parabolique. Quant à l'équation du §. 553, dont nous avons fait également uſage, elle eſt indépendante de la nature de la trajectoire.

Application des formules, aux obſervations des 14 Juin, 4 Août & 2 Octobre.

(952) Dans le cas des obſervations des 14 Juin, 4 Août & 2 Octobre, l'on a

$$\Delta' = -0{,}99682 + \sqrt{(R'^2 - 0{,}03894)};$$
$$\Delta'' = 0{,}82249 - \sqrt{(R''^2 - 0{,}35142)};$$
$$\Delta''' = 0{,}51098 + \sqrt{(R'''^2 - 0{,}73770)}.$$

L'on a d'ailleurs (§. 945)

$$(1)\ -0{,}0562231\,\Delta'\Delta''\Delta''' + 0{,}0092738\,\Delta'\Delta''' + 0{,}0075034\,\Delta''\Delta''' + 0{,}099850\,\Delta'\Delta'' - 0{,}099206\,\Delta' - 0{,}015997\,\Delta'' + 0{,}015797\,\Delta''' = 0;$$

Suppoſons d'abord que le paſſage par le périhélie a eu lieu le 8 Août $17^h\ 20'$, & que la diſtance périhélie étoit de 0,62662 ; nous aurons dans cette ſuppoſition $Z' = -90^d\ 36'\ 18''$; $Z'' = -11^d\ 31'\ 35''$; $Z''' = 90^d\ 23'\ 28''$; $R' = 1{,}26662$; $R'' = 0{,}63303$; $R''' = 1{,}26183$; $\Delta' = 0{,}25434$; $\Delta'' = 0{,}60052$; $\Delta''' = 1{,}43540$; & l'équation (1) ſe réduira à $+0{,}000613$.

Faiſons varier la diſtance périhélie, de 0,00500; c'eſt-à-dire, ſuppoſons cette diſtance de 0,63162 ; l'on aura dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d\ 9'\ 4''$; $Z'' = -11^d\ 23'\ 30''$; $Z''' = 89^d\ 56'\ 12''$; $R' = 1{,}26658$; $R'' = 0{,}63790$; $R''' = 1{,}26185$; $\Delta' = 0{,}25430$; $\Delta'' = 0{,}58691$; $\Delta''' = 1{,}43543$; & l'équation (1) ſe réduira à $+0{,}000622$.

Faiſons varier maintenant le paſſage par le périhélie, de $720'$; c'eſt-à-dire, ſuppoſons que la Comete a paſſé par le périhélie le 9 Août $5^h\ 20'$; ſuppoſons de plus que la diſtance périhélie eſt, comme dans les premiers calculs, de 0,62662 ; nous aurons dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d$

$56'48''$; $Z''=-12^d 54' 1''$; $Z'''=90^d 2' 34''$; $R'=1,27430$; $R''=0,63463$; $R'''=1,25417$; $\Delta'=0,26216$; $\Delta''=0,59592$; $\Delta'''=1,42491$; & l'équation (1) se réduira à $-0,000114$.

(953) Il suit de ces calculs, que dans l'exemple particulier dont il s'agit, la variation de la distance périhélie influe peu sur les résultats, & qu'au contraire l'instant du passage par le périhélie a une influence très-sensible sur l'équation (1) du §. 952. Il suit également de ces calculs, que si l'on vouloit trouver cet instant, en supposant toujours la distance périhélie de 0,62662, l'on feroit la proportion suivante, $727:720'::622:dT$; d'où l'on concluroit $dT=616'$;

Instant du passage par le périhélie . . . 9 Août 3^h 36'.

Distance périhélie . . . . 0,62662.

Il ne faut pas croire cependant que ces élémens soient les seuls qui satisferoient aux équations du §. 951 ; on doit seulement les regarder comme une espece de limite dont il ne faut pas trop s'écarter.

Remarque sur les résultats précédens.

(954) S'il ne s'agissoit que de concilier les observations des 14 Juin, 4 Août & 2 Octobre, on pourroit s'en tenir au travail auquel nous venons de nous livrer; mais nous ne pouvons pas nous dissimuler que les grands écarts de la théorie parabolique, relativement à la Comete de 1770, ne permettent pas de s'arrêter à ces premiers essais. Il est donc convenable d'essayer de nouvelles observations. Nous choisirons celles du 29 Juin & du 31 Août; la premiere, parce qu'à cette époque, la Comete commençoit à avoir un très-grand mouvement apparent; la seconde, parce qu'elle est à peu près à égale distance des observations du commencement d'Août & du commencement d'Octobre. Voici au surplus ces observations.

	Longitudes de la Comete.	*Latitudes de la Comete.*
29 Juin 11^h 59' 26''	279^d 42' 45''	37^d 57' 32'' Boréale.
31 Août 14 38 25	112 17 16	1 20 23 Australe.

L'on avoit pour les mêmes instans,

	Longitude du Soleil.	*Distance du Soleil à la Terre.*
29 Juin 11^h 59' 26''	98^d 6' 23''	1,01679.
31 Août 14 38 25	158 36 34	1,00825.

Application des formules du §. 951 *aux observations des* 14 *Juin,* 31 *Août,* *&* 2 *Octobre.*

(955) Si l'on met des nombres dans les formules du §. 951, & que l'on fasse usage des observations des 14 Juin, 31 Août & 2 Octobre, l'on aura, pour ce cas particulier, $r'=1,016165$; $r''=1,00825$; $r'''=0,99940$; $A'=83^d 46' 45''$; $A''=158^d 36' 34''$; $A'''=189^d 56' 27''$; $B'=272^d 47' 22''$;

$B'' = 112^d 17' 16''$; $B''' = 130^d 41' 51''$; $L' = 6^d 40' 36''$; $L'' = -1^d 20' 23''$; $L''' = -1^d 10' 4''$; $A' - A'' = 285^d 10' 11''$; $A'' - A''' = 328^d 40' 7''$; $A''' - A' = 106^d 9' 42''$; $B'' - B''' = 341^d 35' 25''$; $B''' - B' = 217^d 54' 29''$; $B' - B'' = 160^d 30' 6''$; $B'' - A''' = 282^d 20' 49''$; $A''' - B' = 277^d 9' 5''$; $A'' - B''' = 27^d 54' 43''$; $B' - A'' = 114^d 10' 48''$; $B''' - A' = 46^d 55' 6''$; $A' - B'' = 331^d 29' 29''$; $B' - A' = 189^d 0' 37''$; $B'' - A'' = 313^d 40' 42''$; $B''' - A''' = 300^d 45' 24''$;

$$\Delta' = -0{,}99682 + \sqrt{(R'^2 - 0{,}03894)};$$
$$\Delta'' = 0{,}69612 + \sqrt{(R''^2 - 0{,}53199)};$$
$$\Delta''' = 0{,}51098 + \sqrt{(R'''^2 - 0{,}73770)}.$$

L'on aura d'ailleurs (§. 553),

$$(1) - 0{,}0291868\,\Delta'\Delta''\Delta''' + 0{,}0904426\,\Delta'\Delta'' - 0{,}0362429\,\Delta'\Delta''' + 0{,}0074692\,\Delta''\Delta''' - 0{,}0609163\,\Delta' - 0{,}0228082\,\Delta'' + 0{,}0201523\,\Delta''' = 0.$$

Suppoſons d'abord que le paſſage par le périhélie a eu lieu le 8 Août 17′ 20″, & que la diſtance périhélie étoit de 0,62662; nous aurons, dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d 36' 18''$; $Z'' = 54^d 32' 57''$; $Z''' = 90^d 23' 28''$; $R' = 1{,}26662$; $R'' = 0{,}79319$; $R''' = 1{,}26183$; $\Delta' = 0{,}25434$; $\Delta'' = 1{,}00782$; $\Delta''' = 1{,}43540$; & l'équation (1) ſe réduira à $+0{,}000465$.

Faiſons varier la diſtance périhélie de 0,00500; l'on aura, dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d 9' 4''$; $Z'' = 54^d 4' 16''$; $Z''' = 89^d 56' 12''$; $R' = 1{,}26658$; $R'' = 0{,}79610$; $R''' = 1{,}26185$; $\Delta' = 0{,}25430$; $\Delta'' = 1{,}01517$; $\Delta''' = 1{,}43543$; & l'équation (1) ſe réduira à $+0{,}000471$.

Faiſons varier maintenant le paſſage par le périhélie, de 720′; c'eſt-à-dire, ſuppoſons que la Comete a paſſé par le périhélie le 9 Août $5^h 20'$; ſuppoſons de plus, comme dans le premier calcul, que la diſtance périhélie eſt de 0,62662; nous aurons, dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d 56' 48''$; $Z'' = 53^d 39' 51''$; $Z''' = 90^d 2' 34''$; $R' = 1{,}27430$; $R'' = 0{,}78713$; $R''' = 1{,}25417$; $\Delta' = 0{,}26216$; $\Delta'' = 0{,}99207$; $\Delta''' = 1{,}42491$; & l'équation (1) ſe réduira à $-0{,}000155$.

(956) Il ſuit de ces calculs, que dans l'exemple particulier dont il s'agit, la variation de la diſtance périhélie influe peu ſur le réſultat, ainſi que nous l'avons déja remarqué dans le §. 953; & qu'au contraire l'inſtant du paſſage par le périhélie a une influence très-ſenſible ſur l'équation (1) du §. 955. Il ſuit également de ces calculs, que ſi l'on vouloit trouver cet inſtant, en ſuppoſant toujours la diſtance périhélie de 0,62662, l'on feroit la proportion ſuivante,

$$620 : 720' :: 465 : dT;\ \text{d'où l'on concluroit}\ dT = 540';$$

Inſtant du paſſage par le perihélie . . . . . 9 Août $2^h 20'$;

Diſtance périhélie . . . . 0,62662.

Ces réſultats different peu de ceux du §. 953.

Application des formules du §. 951, aux obſervations des 14 Juin, 29 Juin & 2 Octobre.

(957) Si l'on met des nombres dans les formules du §. 951, & que l'on faſſe uſage des obſervations des 14 Juin, 29 Juin & 2 Octobre, l'on aura pour ce cas particulier, $r' = 1{,}016165$; $r'' = 1{,}01679$; $r''' = 0{,}99940$; $A' = 83^d\,46'\,45''$; $A'' = 98^d\,6'\,23''$; $A''' = 189^d\,56'\,27''$; $B' = 272^d\,47'\,22''$; $B'' = 279^d\,42'\,45''$; $B''' = 130^d\,41'\,51''$; $L' = 6^d\,40'\,36''$; $L'' = 37^d\,57'\,22''$; $L''' = -1^d\,10'\,4''$; $A' - A'' = 345^d\,40'\,22''$; $A'' - A''' = 268^d\,9'\,56''$; $A''' - A' = 106^d\,9'\,42''$; $B'' - B''' = 149^d\,0'\,54''$; $B''' - B' = 217^d\,54'\,29''$; $B' - B'' = 353^d\,4'\,37''$; $B'' - A''' = 89^d\,46'\,18''$; $A''' - B' = 277^d\,9'\,5''$; $A'' - B''' = 327^d\,24'\,32''$; $B' - A'' = 174^d\,40'\,59''$; $B''' - A' = 46^d\,55'\,6''$; $A' - B'' = 164^d\,4'\,0''$; $B' - A' = 189^d\,0'\,37''$; $B'' - A'' = 181^d\,36'\,22''$; $B''' - A''' = 300^d\,45'\,24''$.

$$\Delta' = -0{,}99682 + \sqrt{(R'^2 - 0{,}03894)};$$
$$\Delta'' = -0{,}80135 + \sqrt{(R''^2 - 0{,}39165)};$$
$$\Delta''' = 0{,}51098 + \sqrt{(R'''^2 - 0{,}73770)}.$$

L'on aura d'ailleurs (§. 553)

$$(1)\; -0{,}326125\,\Delta'\Delta''\Delta''' + 0{,}514197\,\Delta'\Delta'' + 0{,}0655673\,\Delta'\Delta''' - 0{,}451938\,\Delta''\Delta''' - 0{,}118080\,\Delta' + 0{,}599976\,\Delta'' + 0{,}0052107\,\Delta''' = 0.$$

Suppoſons d'abord que le paſſage par le périhélie a eu lieu le 8 Août $17^h\,20'$; & que la diſtance périhélie étoit de 0,626662, nous aurons dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d\,36'\,18''$; $Z'' = -77^d\,58'\,58''$; $Z''' = 90^d\,23'\,28''$; $R' = 1{,}26662$; $R'' = 1{,}03728$; $R''' = 1{,}26183$; $\Delta' = 0{,}25434$; $\Delta'' = 0{,}025862$; $\Delta''' = 1{,}43540$; & l'équation (1) ſe réduira à $+\,0{,}000427$.

Faiſons varier la diſtance périhélie de 0,00500, l'on aura, dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d\,9'\,4''$; $Z'' = -77^d\,29'\,22''$; $Z''' = 89\,56'\,12''$; $R' = 1{,}26658$; $R'' = 1{,}03832$; $R''' = 1{,}26183$; $\Delta' = 0{,}25430$; $\Delta'' = 0{,}027179$; $\Delta''' = 1{,}43543$; & l'équation (1) ſe réduira à $+\,0{,}000379$.

Faiſons varier maintenant le paſſage par le périhélie, de 720'; c'eſt-à-dire, ſuppoſons que la Comete a paſſé par le périhélie, le 9 Août $5^h\,20'$; ſuppoſons de plus, comme dans le premier calcul, que la diſtance périhélie eſt de 0,626662; nous aurons, dans cette ſuppoſition, $Z' = -90^d\,56'\,48''$; $Z'' = -78^d\,29'\,28''$; $Z''' = 90^d\,2'\,34''$; $R' = 1{,}27430$; $R'' = 1{,}04478$; $R''' = 1{,}25417$; $\Delta' = 0{,}26216$; $\Delta'' = 0{,}035268$; $\Delta''' = 1{,}42491$; & l'équation (1) ſe réduira à $-\,0{,}000132$.

(958) Il ſuit de ces calculs, que dans le cas particulier dont il s'agit, la variation de la diſtance périhélie influe peu ſur le réſultat, ainſi que nous l'avons déja remarqué dans les calculs précédens; tandis qu'au contraire, l'inſtant du paſſage par le périhélie a une influence tout autrement ſenſible ſur l'équation (1) du §. 957. Il ſuit également que ſi l'on

vouloit trouver l'inſtant du paſſage par le périhélie, en ſuppoſant toujours la diſtance périhélie de 0,62662, l'on feroit la proportion ſuivante

$559 : 720' :: 427 : dT$; d'où l'on concluroit $dT = 550''$,

Inſtant du paſſage par le périhélie . . . . 9 Août 2^h 30';

Diſtance périhélie . . . . 0,62662.

Ces réſultats retombent dans les précédens.

ARTICLE IX.

Suite des recherches ſur l'orbite parabolique de la premiere Comete de 1770.

(959) Nous devons maintenant chercher à fixer nos idées ſur la poſſibilité d'une orbite parabolique qui repréſente les mouvemens de la premiere Comete de 1770. D'abord il me paroît évident que ſi quelque orbite de cette nature peut repréſenter ces mouvemens, la diſtance périhélie & l'inſtant du paſſage par le périhélie, doivent peu différer des réſultats que nous venons de déterminer. Nous ſuppoſerons donc, dans de premieres recherches, que la Comete a paſſé par le périhélie le 9 Août 2^h 30', & que la diſtance périhélie étoit de 0,62662.

Détermination de la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Comete, de ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique, & du lieu du périhélie ſur l'orbite, d'après les obſervations des 29 Juin & 2 Octobre; en ſuppoſant que la Comete a paſſé par le périhélie, le 9 Août 2^h 30', & que ſa diſtance périhélie étoit de 0,62662.

(960) Les élémens qui nous reſtent à déterminer ſont la longitude du nœud aſcendant de l'orbite, ſon inclinaiſon ſur l'Ecliptique, & le lieu du périhélie ſur l'orbite. Nous ferons uſage des équations des §. 648 & 649, ainſi que des obſervations des 29 Juin & 2 Octobre.

Puiſque, par la ſuppoſition, la Comete a paſſé par le périhélie le 9 Août 2^h 30', & que ſa diſtance périhélie eſt de 0,62662, l'on aura, pour l'obſervation du 29 Juin, $L' = 37^d\, 57'\, 32''$; $B' = 279^d\, 42'\, 45''$; $r' = 1,01679$; $A' = 98^d\, 6'\, 23''$; $\Delta' = 0,033036$. L'on aura, pour l'obſervation du 2 Octobre, $L''' = -1^d\, 10'\, 4''$; $B''' = 130^d\, 41'\, 51''$; $r''' = 0,99940$; $A''' = 189^d\, 56'\, 27''$; $\Delta''' = 1,42738$; d'où l'on conclura (§. 648.) $\lambda = -1,032286$; $\lambda' = 1,254497$; $\mu = 0,147714$; $\mu' = 0,053841$; $\zeta = 139^d\, 55'\, 17''$; $I = 1^d\, 40'\, 32''$

Maintenant, ſi l'on fait uſage de l'obſervation du 29 Juin, pour déterminer le lieu du périhélie ſur l'orbite, l'on aura, $Z' = 281^d\, 37'\, 43''$; $R' = 1,04300$; $m = 0,695030$; $m' = -0,777692$; $u' = 138^d\, 12'\, 45''$; Lieu du périhélie ſur l'orbite $= 356^d\, 30'\, 19''$; l'on aura donc les élémens ſuivans.

Elémens de la premiere Comete de 1770 dans les ſuppoſitions précédentes.

Longitude du nœud aſcendant . . . . . . $4^s\ 19^d\ 55'\ 17''$.
Lieu du périhélie ſur l'orbite . . . . . . 11 26 30 19.
Inclinaiſon de l'orbite . . . . 1 40 32.
Sens du mouvement . . . . direct.
Paſſage par le périhélie . . . . . 9 Août 1770 $2^h\ 30'$.
Diſtance périhélie . . . . 0,62662.

(961) Pour fixer nos idées ſur la poſſibilité d'une orbite parabolique, il faut comparer les lieux obſervés de la Comete, avec les lieux calculés, d'après les élémens précédens. Car ſi cette comparaiſon faiſoit voir que les élémens ne repréſentent que d'une maniere tellement imparfaite, les obſervations de la premiere Comete de 1770, qu'on ne puiſſe raiſonnablement rejetter ſur les obſervations, ou ſur une petite erreur dans les élémens, la différence entre les lieux obſervés & les lieux calculés, je ſerois fort tenté de croire à l'impoſſibilité qu'aucune théorie parabolique puiſſe repréſenter les mouvemens de la premiere Comete de 1770 ; ſi au contraire ces mouvemens étoient repréſentés d'une maniere ſatisfaiſante, il ſeroit inutile d'avoir recours à la théorie elliptique ; & ſi enfin ces mouvemens, ſans être repréſentés d'une maniere très-ſatisfaiſante, laiſſoient cependant eſpérer que de nouveaux calculs pourroient n'être pas infructueux, alors il faudroit ſe livrer à de nouvelles recherches.

Comparaiſon des lieux obſervés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens précédens.

Jours.	Longitudes de la Comete.			Latitudes de la Comete.		
	Obſervées.	Calculées.	Différ.	Obſervées.	Calculées	Différ.
14 Juin $11^h\ 29'\ 48''$	$272^d\ 47'\ 22''$	272 47 22	$0'\ 0''$	$6^d\ 40'\ 36''$ B.	6 40 36 B	$0'\ 0''$
22 Juin 12 9 36	273 33 43	273 46 24	12 41	10 39 5	10 42 49	+ 3 44
29 Juin 11 59 26	279 42 45	279 42 45	0 0	37 57 32	37 57 32	0 0
4 Août 14 12 48	96 48 10	97 38 6	49 56	0 56 23 A.	0 45 2 A	— 11 21
31 Août 14 38 35	112 17 16	114 6 34	109 18	1 20 23	1 14 11	— 6 12
2 Octob. 15 43 37	130 41 51	130 41 51	0 0	1 10 4	1 10 4	0 0

Les lieux obſervés des 14 Juin & 4 Août, ont été corrigés d'après l'interpolation de ces obſervations ; de ſorte que je les crois plus exacts que ceux du §. 923.

J'ai choiſi pour termes de comparaiſon, les obſervations des 14 Juin & 2 Octobre, parce que ces deux obſervations répondent au premier

&

& au dernier jour où la Comete a été observée ; j'ai choisi l'observation du 29 Juin, parce qu'à cette époque la Comete commençoit à avoir un mouvement très-rapide ; j'ai choisi l'observation du 22 Juin, parce qu'elle est située à égale distance de celles des 14 & 29 Juin ; j'ai choisi l'observation du 4 Août, parce qu'elle répond à la réapparition de la Comete, lors de sa sortie des rayons du Soleil ; enfin j'ai choisi l'observation du 31 Août, parce qu'elle est située à peu près à égale distance de la réapparition de la Comete, & de sa disparition totale.

Nouvelles hypotheses sur la distance périhélie.

(962) On ne peut se dissimuler que les mouvemens de la Comete ne sont pas représentés d'une maniere bien satisfaisante, par les élémens du §. 960 ; mais si l'on jette les yeux sur la Table de comparaison entre les lieux observés & les lieux calculés, on s'assurera facilement que ces différences ont une marche réguliere. Elles commencent par être nulles ; elles parviennent ensuite à un *maximum*, & finissent par redevenir nulles. D'ailleurs, dans ces calculs, nous avons supposé la distance périhélie de 0,62662, & rien n'empêche de faire varier cette distance ; essayons donc de nouvelles suppositions sur la distance périhélie.

Si l'on augmente cette distance, de 0,01000 ; c'est-à-dire, si on la suppose de 0,63662, & que l'on calcule d'abord dans l'hypothese que le passage par le périhélie a eu lieu le 8 Août $17^h\ 20'$, l'équation (1) du §. 957 sera réduite à + 0,000328 ; si l'on suppose ensuite que le passage par le périhélie a eu lieu le 9 Août $5^h\ 20'$, l'équation (1) du §. 957 sera réduite à — 0,000207 ; d'où l'on conclura que pour rendre nulle cette équation, en supposant la distance périhélie de 0,63662, il faudroit que le passage par le périhélie eût eu lieu le 9 Août $0^h\ 41'$. Avec ces données, on trouvera les élémens suivans.

Elémens de la Comete, en supposant la distance périhélie = 0,63662.

Distance périhélie	0,63662.
Passage par le périhélie.	9 Août $0^h\ 41'$.
Longitude du nœud ascendant	$4^s\ 26^d\ 9'\ 2''$.
Lieu du périhélie sur l'orbite	11 23 54 4.
Inclinaison de l'orbite	1 23 22.
Sens du mouvement	direct.

Si l'on compare les lieux observés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens précédens, l'on parviendra à des résultats trop différens des observations pour que l'on s'en tienne à cette nouvelle supposition ; essayons donc une nouvelle hypothese.

(963) Si l'on diminue la distance périhélie, de 0,00500 ; c'est-à-dire si on la suppose de 0,62162, & que l'on calcule dans l'hypothese que

le passage par le périhélie a eu lieu le 8 Août 17^h 20′, l'équation (1) du §. 957 sera réduite à + 0,000476; si l'on suppose ensuite que le passage par le périhélie a eu lieu le 9 Août 5^h 20′, l'équation (1) du §. 957 sera réduite à — 0,000095; d'où l'on conclura que pour rendre nulle cette équation, en supposant la distance périhélie de 0,62162, il faudroit que le passage par le périhélie eût eu lieu le 9 Août 3^h 20′. Avec ces données, on trouvera les élémens suivans.

Elémens de la Comete, en supposant la distance périhélie = 0,62162.

Distance périhélie	0,62162.
Passage par le périhélie	9 Août 3^h 20′.
Longitude du nœud ascendant	$4^s 17^d$ 17′ 13″.
Lieu du périhélie sur l'orbite	11 27 2 0.
Inclinaison de l'orbite	1 44 17.
Sens du mouvement	direct.

(964) Si l'on compare les lieux observés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens précédens, l'on parviendra aux résultats suivans.

Comparaison des lieux observés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens précédens.

JOURS.	Longitudes de la Comete.			Latitudes de la Comete.		
	Observées.	Calculées.	Differ.	Observées.	Calculées.	Differ.
14 Juin 11^h 29′ 48″	272^d 47′ 22″	272^d 47′ 22″	+ 0′ 0″	6^d 40′ 36″ B.	6^d 40′ 36″ B	0′ 0″
22 Juin 12 9 36	273 33 43	273 58 28	+ 24 45	10 39 5	10 37 46	— 1 19
29 Juin 11 59 26	279 42 45	279 42 45	+ 0 0	37 57 32	37 57 32	0 0
4 Août 14 12 48	96 48 10	97 56 41	+ 68 31	0 56 23 A.	0 51 7 A	— 5 16
31 Août 14 38 35	112 17 16	114 34 56	+ 137 40	1 20 23	1 15 45	— 4 38
2 Octob. 15 43 37	130 41 51	130 41 51	+ 0 0	1 10 4	1 15 45	0 0

Remarque sur les résultats des Tables de comparaison des §. 961 & 964.

(965) Si l'on jette les yeux sur la Table de comparaison entre les lieux observés & les lieux calculés du §. 961, & qu'on la compare à la Table du §. 964; on verra que ces deux Tables présentent à peu près les mêmes erreurs. J'avois d'abord fait varier la distance périhélie en *plus* (§. 962), les erreurs ont considérablement augmenté. Je l'ai ensuite fait varier en *moins*, & les erreurs n'ont point disparu, sans

cependant augmenter ſenſiblement. Ces réflexions paroiſſent, au premier coup-d'œil, favorables à l'opinion de ceux qui penſent que la premiere Comete de 1770 ſe refuſe à la théorie parabolique. Mais, avant de ſe décider, ne faudroit-il pas examiner la queſtion ſous un nouveau point de vue ? Seroit-il impoſſible, par exemple, que nous fuſſions ſur la limite d'un *maximum*, & qu'en portant la diſtance périhélie de 0,62662 à 0,62162, nous euſſions paſſé par-deſſus la diſtance qui auroit fait diſparoître les erreurs de la théorie parabolique? Approfondiſſons cette nouvelle idée.

Rien n'eſt plus ſimple que l'examen de cette queſtion. En effet, la ſeule inſpection des élémens des §. 960, 962 & 963, fait voir qu'il regne une loi très-marquée entre la variation de la diſtance périhélie & la variation de l'inſtant du paſſage par le périhélie. Cette loi eſt telle qu'une diminution de 0,00500 dans la diſtance périhélie, fait reculer de 50′ le paſſage par le périhélie. Si donc l'on ſuppoſe la diſtance périhélie de 0,62412, le paſſage par le périhélie aura eu lieu le 9 Août 2^h 55′. Avec ces données, on trouvera les élémens ſuivans.

Elémens de la Comete, en ſuppoſant la diſtance périhélie de 0,62412.

Diſtance périhélie	0,62412.
Paſſage par le périhélie	9 Août 2^h 55′.
Sens du mouvement	direct.
Longitude du nœud aſcendant	4^f 18^d 37′ 7″.
Lieu du périhélie ſur l'orbite	11 26 46 4.
Inclinaiſon de l'orbite	1 42 18.

(966) Si l'on compare les lieux obſervés de la Comete avec les lieux calculés d'après les élémens précédens, l'on parviendra aux réſultats ſuivans.

Comparaiſon des lieux obſervés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens précédens.

Jours.	Longitudes de la Comete.			Latitudes de la Comete.		
	Obſervées.	Calculées.	Differ.	Obſervées.	Calculées.	Differ.
14 Juin 11^h 29′ 48″	272^d 47′ 22″	272^d 47′ 22″	+ 0′ 0″	6^d 40′ 36″ B	6^d 40′ 36″ B.	+ 0′ 0″
22 12 9 36	273 33 43	273 51 23	+ 17 40	10 39 5	10 40 32	+ 1 27
29 11 59 26	279 42 45	279 42 45	+ 0 0	37 57 32	37 57 32	+ 0 0
4 Août 14 12 48	96 48 10	97 46 2	+ 57 52	0 56 23 A.	0 47 55 A.	− 8 28
31 14 38 39	112 17 16	112 55 32	+ 38 16	1 20 23	1 18 15	− 2 8
2 Octob. 15 43 37	130 41 51	130 41 51	+ 0 0	1 10 4	1 10 4	− 0 0

Il réſulte de cette comparaiſon, que les élémens du §. 965 ont beau-

coup diminué les différences entre les lieux calculés & les lieux observés; & il seroit peut-être possible de diminuer encore ces différences, en faisant varier tant soit peu la distance périhélie. J'ai cru pouvoir me dispenser de ces calculs qui ne présentent aucune difficulté. J'ajouterai seulement, pour faciliter les calculs, que le 22 Juin 1770 $12^h\ 9'\ 36''$ tems moyen à Paris, l'on avoit, Longitude du Soleil $= 91^d\ 26'\ 17''$; distance du Soleil à la Terre $= 1,016635$.

(967) Les élémens du §. 966 n'ont point fait disparoître totalement les erreurs des observations; de sorte que la théorie analytique nous a conduit au *minimum* d'erreur, sans pouvoir cependant faire disparoître entiérement les différences entre les lieux calculés & les lieux observés. Et quoique je ne me flatte pas d'être parvenu précisément au point où les erreurs sont les plus petites, j'ai tout lieu de croire, d'après les Tables de comparaison, qu'aucune courbe parabolique ne peut représenter les mouvemens de la premiere Comete de 1770; du moins si l'on veut conserver les observations, sans les altérer. Mais les calculs m'ont appris en même tems, que les erreurs des observations, sur-tout celles où la Comete étoit très-près de la Terre, ont une grande influence sur les résultats. Il suffit, pour s'en convaincre, de jetter les yeux sur les coefficiens des équations dont nous avons fait usage, & principalement sur les valeurs de Δ''. D'un autre côté, M. Méchain a eu la bonté de me prévenir que la plupart des Etoiles auxquelles la Comete a été comparée, & sur-tout celles près desquelles elle a passé, lorsqu'elle avoit un mouvement rapide, demandent à être vérifiées de nouveau. J'ignore ce qui résultera de cette vérification. Sera-t-elle favorable à l'hypothese parabolique? Eloignera-t-elle de plus en plus toute idée de Parabole? D'ailleurs, si ces Etoiles ne sont pas bien déterminées, comment M. Léxell a-t-il trouvé une courbe réguliere? Je laisse aux Astronomes à peser ces raisons. Quelle que soit leur opinion sur le fond de la question, je crois l'avoir résolue analytiquement, avec toute la généralité qu'elle exige; & si par la suite on veut pousser plus loin ces recherches, d'après de nouvelles vérifications d'Etoiles, j'aurai au moins l'avantage d'avoir donné les équations qui pourront servir à décider irrévocablement si la théorie parabolique est possible. Tout se réduira à mettre des nombres dans mes formules, & à suivre exactement les procédés que j'ai indiqués. Je m'étois proposé d'abord, d'attendre ces vérifications, pour terminer mon Ouvrage; je comptois exécuter sur la Parabole qui m'auroit paru la plus probable, des calculs analogues à ceux de M. Léxell, sur l'Ellipse; des événemens étrangers à l'Astronomie m'ont mis dans l'impossibilité d'exécuter ce projet. Puissent ces essais engager quelque Astronome, à vérifier les positions de la Comete de 1770, & à mettre la derniere main à un travail qui présente un objet de curiosité intéressant!

Fin du second & dernier Volume.

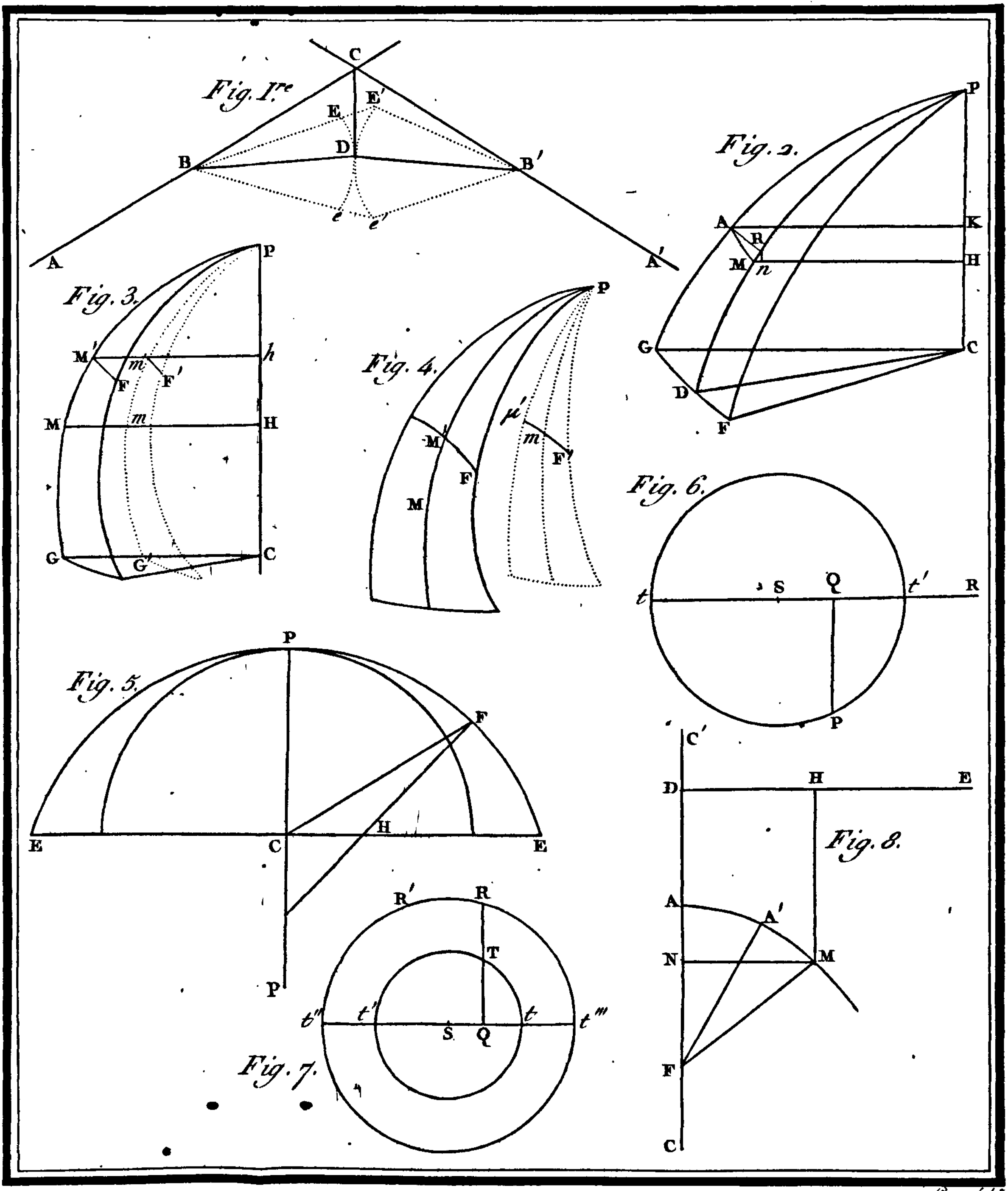
Fig. Ire
C
E
E'
D
B
B'
e
e'
A
A'
Fig. 2.
P
A
K
R
M
n
H
G
C
D
F
Fig. 3.
P
M'
m'
h
F
F'
M
m
H
G
G'
C
Fig. 4.
P
μ'
M
m
F
F'
Fig. 5.
P
F
E
C
H
E
P
Fig. 6.
t
S
Q
t'
R
P
C'
D
H
E
Fig. 8.
A
A'
N
M
F
C
R'
R
T
t''
t'
S
Q
t
t'''
Fig. 7.

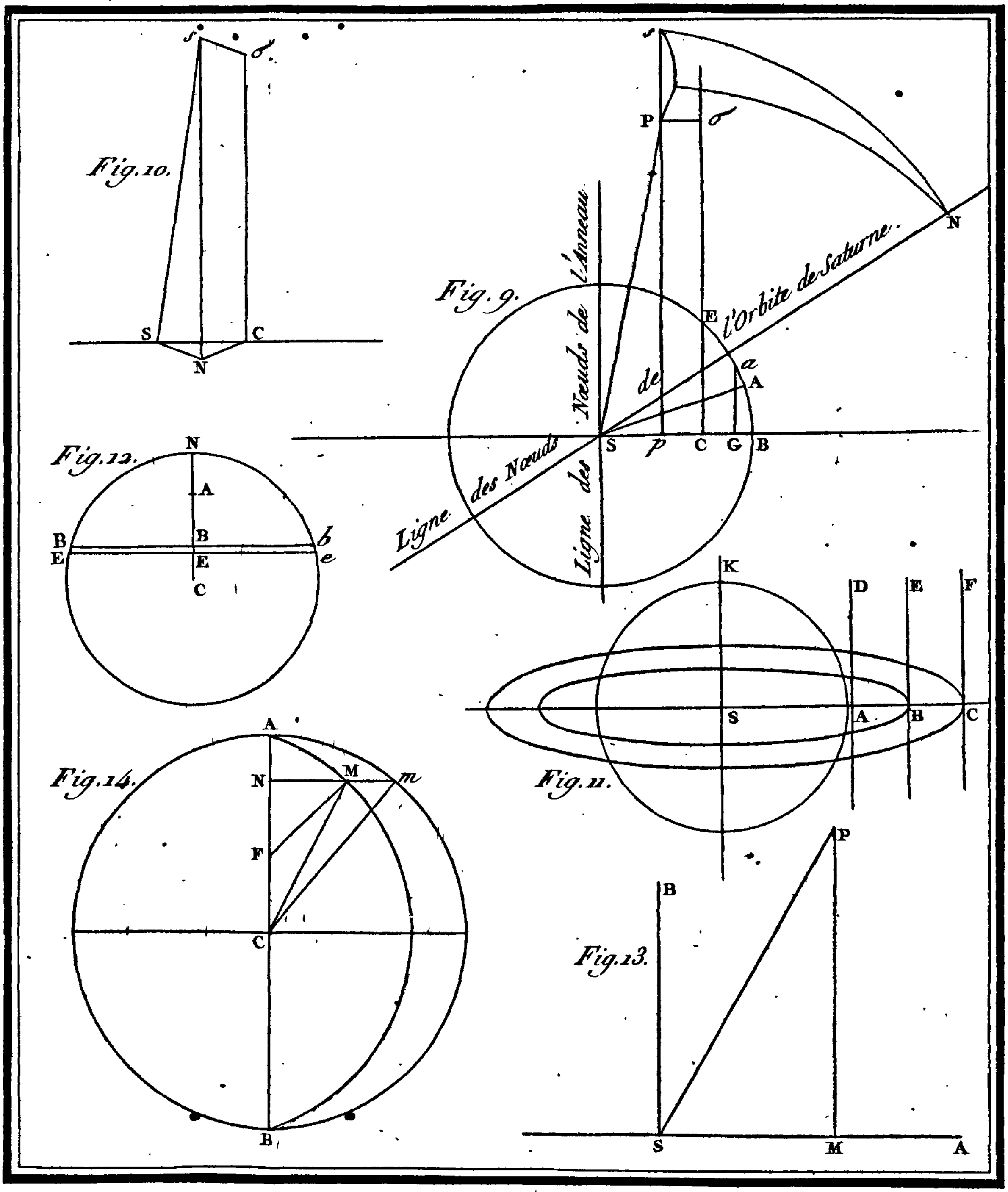
Fig. 10.
Fig. 9.
Ligne des Nœuds de l'Anneau
Ligne des Nœuds de l'Orbite de Saturne.
Fig. 12.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 13.

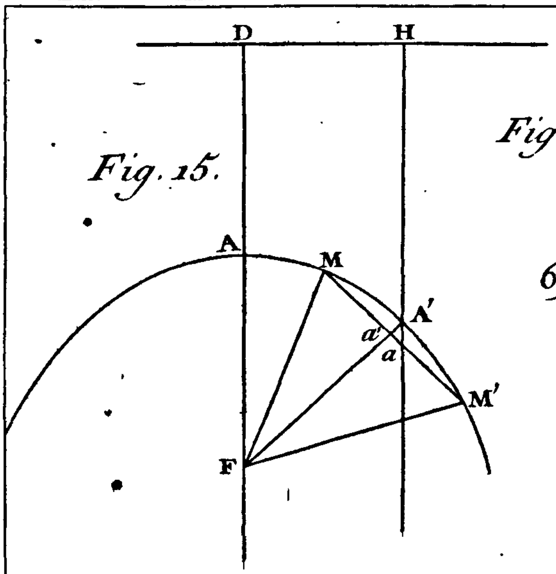

Fig. 15.

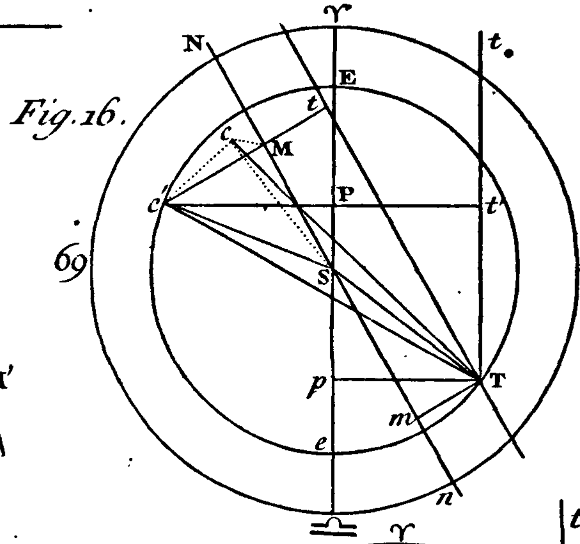

Fig. 16.

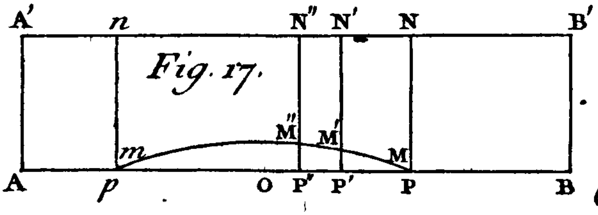

Fig. 17.

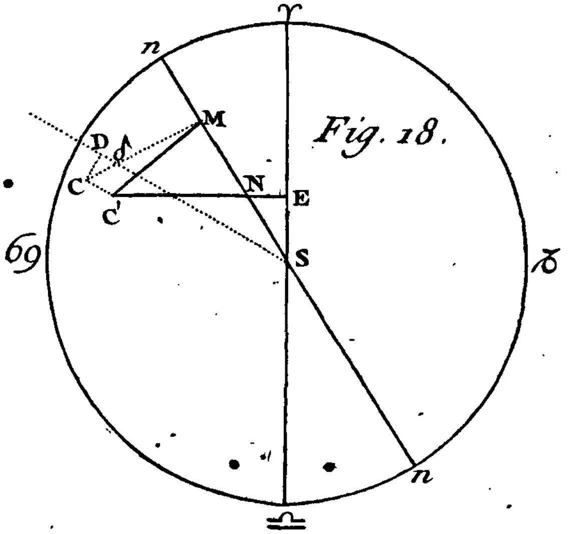

Fig. 18.

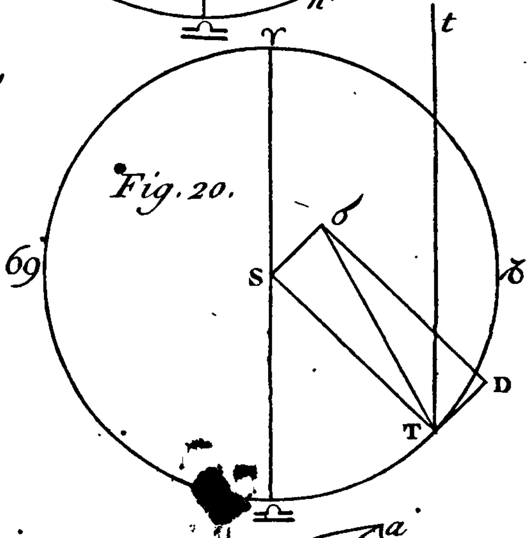

Fig. 20.

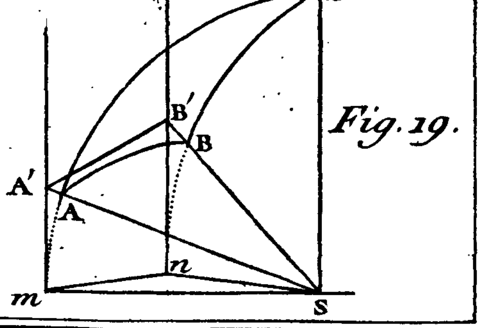

Fig. 19.

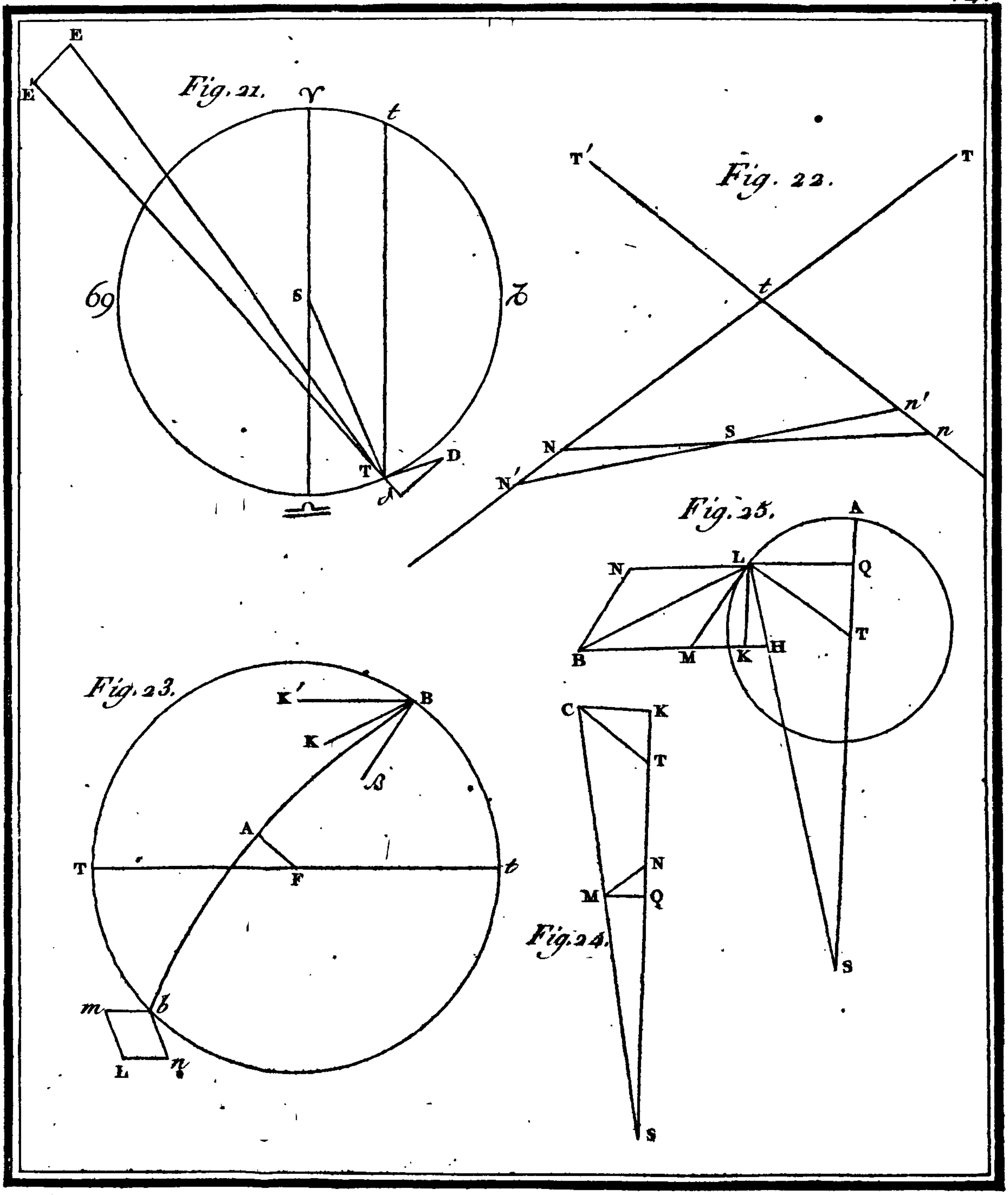
Fig. 21.
E
E
♈
t
S
♋
♑
T
D
♎
♂
Fig. 22.
T′
T
t
n′
S
n
N
N′
Fig. 25.
A
L
N
Q
T
B
M
K
H
S
Fig. 23.
K′
B
K
β
A
T
F
t
m
b
L
n
C
K
T
N
M
Q
Fig. 24.
S

TABLE

DES MATIERES.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE, page j.
Lettres de Voltaire relatives au présent Ouvrage.

PREMIER LIVRE,

Dans lequel on applique aux principaux Problêmes géodésiques, la théorie des latitudes corrigées.

CHAPITRE PREMIER.

Des propriétés générales des perpendiculaires à la Méridienne & des loxodromiques, dans l'hypothese que les Méridiens de la Terre sont des ellipses.

ARTICLE PREMIER.

De l'équation aux perpendiculaires à la méridienne, page 3.
De la génération des perpendiculaires à la méridienne, sur la surface du sphéroïde terrestre, Ibid.
Démonstration de la propriété des Perpendiculaires à la méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener sur le sphéroïde, d'un point à un autre, 4.
Détermination de l'équation de la courbe qui a la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point de la surface d'un sphéroïde, à un autre point de la même surface, Ibid.
Détermination de l'équation aux perpendiculaires à la méridienne, en faisant abstraction de leur propriété, d'être les lignes les plus courtes que l'on puisse mener d'un point de la surface d'un sphéroïde, à un autre point de la même surface, 7.

ARTICLE II.

Des principales questions que l'on a coutume de se proposer, relativement aux perpendiculaires à la méridienne, 10.

ARTICLE III.

De l'équation aux loxodromiques sur le sphéroïde terrestre, 11.

ARTICLE IV.

Des principales questions que l'on a coutume de se proposer, relativement aux loxodromiques, 12.

CHAPITRE SECOND.

Recherches préliminaires à l'application des latitudes corrigées, au calcul des perpendiculaires à la méridienne & des loxodromiques ; & application de ces latitudes aux courbes en question.

ARTICLE PREMIER.

Exposition de la méthode, 14.
Définition de la latitude corrigée d'un point quelconque d'un sphéroïde, Ibid.

Définition de la projection d'un point pris sur le sphéroïde, 14.
Définition de la projection d'une courbe tracée sur le sphéroïde, *Ibid.*
Définition de la perpendiculaire corrigée à la méridienne; du complément de la latitude corrigée du sommet de la perpendiculaire à la méridienne; du complément de la latitude corrigée du point F, où du lieu d'arrivée; & de la longitude corrigée du même lieu F, 15.

ARTICLE II.

De l'équation à la perpendiculaire corrigée à la méridienne, 16.

ARTICLE III.

Des latitudes corrigées, 17.
Table de la différence des latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de Terre dans le rapport de 177 à 178, 18.
Table de la différence des latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230, 19.
Table de la différence des latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 320 à 321, 20.

ARTICLE IV.

Détermination du nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphere inscrite, 21.
Détermination du rapport entre un arc quelconque d'un méridien elliptique, & la projection de cet arc sur la sphere. *Ibid.*
Du nombre de toises que contient un arc d'un degré de la sphere inscrite, suivant les différens rapports des axes de la Terre, 23.

ARTICLE V.

De la relation entre un arc MM′ quelconque d'un méridien dont l'origine M est donnée, & l'arc *m′*P correspondant de la sphere inscrite, compris entre le pole P & la projection *m′* du point M′, 24.
Etant donné en degrés l'arc *m′*P de la sphere inscrite, déterminer l'arc MM′ du sphéroïde. 25.
Table du nombre de secondes correspondantes aux différens degrés, depuis 0^d jusqu'à $13^d\ 40'$, *Ibid.*
Etant donné le nombre de toises que contient l'arc MM′, déterminer l'arc *m′*P correspondant de la sphere inscrite, 26.
Table des valeurs de *m′*P correspondantes au nombre de toises comprises depuis le sommet des différentes perpendiculaires, jusqu'à la perpendiculaire passant par l'Observatoire Royal de Paris, 27.
Usage de la Table précédente, 28.
Relation entre la variation de l'arc *m′*P, & la variation correspondante du nombre de toises dans les distances des perpendiculaires sur la méridienne, *Ibid.*

ARTICLE VI.

Détermination du rapport entre la perpendiculaire à la méridienne sur le sphéroïde, & la perpendiculaire corrigée sur la sphere inscrite, 30.
Etant donné l'arc *m′*P de la sphere inscrite, ainsi que la latitude du lieu F, on demande le nombre de toises que contient la perpendiculaire menée du lieu F, à la méridienne du lieu M sur le sphéroïde, 33.
Etant donné l'arc *m′*P de la sphere inscrite, ainsi que le nombre de toises que contient la perpendiculaire menée du lieu F à la méridienne du lieu M sur le sphéroïde, on demande la latitude du lieu F, 34.
Exemple, 35.

Forme nouvelle que l'on peut donner à l'équation (2) du §. 44, 36.
Table des différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, 37.
Usage de la Table précédente, 38.
Application des principes précédens à l'exemple du §. 47, Ibid.
Des changemens qu'il faut faire à la solution, lorsque la ligne que l'on considere n'est pas perpendiculaire à la méridienne au point de départ, Ibid.
Etant donnés l'arc $m'P$ de la sphere inscrite, & le nombre de toises que contient sur le sphéroïde, la ligne $M'F$ que l'on suppose d'ailleurs faire avec la méridienne $M'P$, un angle D au point de départ, l'on demande la latitude du lieu F, 41.

ARTICLE VII.

Détermination du rapport entre la longitude vraie du lieu F & la longitude corrigée du même lieu, 41.
Du cas où la ligne que l'on considere est perpendiculaire à la méridienne au point de départ, Ibid.
Du cas où la ligne que l'on considere n'est pas perpendiculaire à la méridienne au point de départ, 43.

ARTICLE VIII.

De l'angle que fait la perpendiculaire à la méridienne, avec le méridien du lieu F, & généralement avec les différens méridiens qu'elle rencontre, 43.
D'une propriété du grand cercle de la sphere inscrite qui représente la perpendiculaire corrigée, 44.
Usage des propriétés précédentes pour la vérification des perpendiculaires, Ibid.

ARTICLE IX.

Méthode pour conclure la latitude & la longitude d'un lieu, de la latitude & de la longitude connues d'un lieu voisin, lorsque l'on connoît les différences des lignes $m'P$, & des perpendiculaires qui répondent à ces lieux, 46.
Méthode pour conclure la latitude, 47.
Méthode pour conclure la longitude, 49.
Application des principes précédens, 50.

ARTICLE X.

De la figure des perpendiculaires à la méridienne, sur le sphéroïde, 51.

ARTICLE XI.

Application des latitudes corrigées, aux loxodromiques tracées sur le sphéroïde, 53.
Du rapport entre le périmetre de la loxodromique elliptique, & le périmetre de la loxodromique correspondante de la sphere inscrite, Ibid.
Du rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie, 55.
Usage des équations précédentes, 56.

CHAPITRE TROISIEME.

Application des recherches précédentes, aux principaux usages géodésiques, & particuliérement au calcul de la Carte de France; & examen de quelques propriétés de cette Carte.

ARTICLE PREMIER.

Application des recherches précédentes aux principales questions géodésiques, 57.
Etant données la latitude & la longitude vraies d'un lieu F, par rapport à un lieu M dont on connoît la latitude; déterminer 1°. la distance MM' du lieu M,

au point M′ où la perpendiculaire FM′ qui passe par le lieu F, rencontre le méridien du lieu M; 2°. la distance FM′ mesurée sur la perpendiculaire FM′, 58.

Etant donnée la latitude vraie du lieu F, & l'angle que fait la perpendiculaire à la méridienne, avec le méridien du lieu F; déterminer 1°. la distance MM′ du lieu M dont la latitude est pareillement supposée connue, au point M′ où la perpendiculaire FM′ rencontre ce méridien; 2°. la longueur de la perpendiculaire FM′ sur le sphéroïde; 3°. la longitude du lieu F par rapport au lieu M, 59.

Etant donnée la distance MM′ du lieu M dont la latitude est connue, au point M′ où la perpendiculaire FM′ passant par un lieu F, rencontre le méridien du lieu M, ainsi que la longueur FM′ de la perpendiculaire FM′ sur le sphéroïde, déterminer la latitude du lieu F, & sa longitude par rapport au lieu M, 60.

Exemple & Type du calcul, 61.

Etant données la latitude vraie de deux lieux M′, F, & leur différence en longitude, déterminer en toises la distance de ces deux lieux sur le sphéroïde, 62.

ARTICLE II.

Application des théories précédentes, au calcul de la Carte de France, 63.

Equations aux courbes des longitudes & des latitudes, 64.

Distances sur la méridienne comptées de l'Observatoire royal.

140000 toises du côté du Nord, 64.

100000 toises du côté du Nord, 65.

50000 toises du côté du Nord, *Ibid.*

0 toises, *Ibid.*

50000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

100000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

150000 toises du côté du Midi, 66.

200000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

250000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

300000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

350000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

380000 toises du côté du Midi, *Ibid.*

Exemple & Type du calcul, *Ibid.*

ARTICLE III.

Sur le rapport des axes qui représente le plus exactement, les positions des différens points de la France, 68.

Observations faites en France, 69.

ARTICLE IV.

Examen de quelques propriétés de la Carte de France, 70.

De la construction & des propriétés générales de la Carte de France, *Ibid.*

ARTICLE V.

Des équations aux courbes qui représentent les paralleles terrestres & les méridiens, sur la Carte de France, 71.

Des équations rigoureuses aux courbes qui représentent les méridiens & les paralleles terrestres, *Ibid.*

Equation aux paralleles terrestres, 72.

Equation aux Méridiens, *Ibid.*

Equations approchées aux paralleles terrestres & aux méridiens, *Ibid.*

Equation aux paralleles terrestres sur la Carte de France, 73.

Equation aux méridiens terrestres, 74.

CHAPITRE QUATRIEME.

Examen du rapport des axes de la Terre que l'on peut conclure des observations faites dans les différens climats.

ARTICLE PREMIER.

De quelques propositions préliminaires à l'examen du rapport le plus probable des axes de la Terre, 75.
De l'expression du rayon de courbure pour les différens points des méridiens, *Ibid.*
Méthode pour déterminer le rapport des axes de la Terre, par la comparaison de deux degrés du méridien, 77.
Exemple & Type du calcul, 78.
Rapport des axes de la Terre que l'on conclut des différens degrés du méridien comparés au degré du Pérou, 79.
Quelle doit être la relation entre trois degrés du méridien, pour que ces degrés donnent le même rapport des axes? *Ibid.*
Application de la théorie précédente, aux degrés mesurés en France, au Pérou & sous le Cercle Polaire, 80.
Quelle doit être la valeur d'un des trois degrés quelconques du méridien que l'on compare, en supposant que les deux autres degrés ont été bien observés, *Ibid.*
D'une forme plus générale que l'on peut donner à l'équation du §. 111, 81.
Quelle doit être la relation entre quatre degrés du méridien, pour que ces degrés donnent le même rapport des axes? 83.

ARTICLE II.

Du rapport des axes de la Terre que l'on peut conclure des mesures géodésiques, 84.
Que la Terre est applatie vers les Poles, 85.
Hypothese sur le rapport des axes de la Terre, *Ibid.*

SECOND LIVRE,

Dans lequel on traite des phénomenes relatifs à Saturne, & particuliérement de ceux relatifs à l'anneau de cette Planete.

CHAPITRE PREMIER.

Exposition d'une méthode analytique pour calculer les phénomenes relatifs aux disparitions de l'anneau de Saturne.

ARTICLE PREMIER.

Exposition de la méthode, 88.
Equations fondamentales, 89.

ARTICLE II.

Détermination du nombre des racines réelles dont les équations de la forme $\frac{n}{m}Z + \text{cosin.} Z - 1 - a = 0$, sont susceptibles, 90.
De la condition qui doit avoir lieu pour que l'équation dont il s'agit, ait des racines doubles, *Ibid.*
Que l'équation ne peut avoir plus d'une racine réelle, qu'autant que n est plus petit que m, 91.
Du cas où $m = n$, *Ibid.*

Détermination du nombre des racines réelles de la proposée, d'après l'inspection de la valeur de a, lorsque n est plus petit que m, 92.

Du cas où les valeurs de $\frac{n}{m}$ sont comprises entre 1 & 0,2173, 94.

Quelle doit être la valeur de $\frac{n}{m}$ pour que la proposée ait essentiellement trois racines réelles & commence à pouvoir en avoir cinq, 96.

Du cas où les valeurs de $\frac{n}{m}$ sont comprises entre 0,2173 & 0,3284, *Ibid.*

Quelle doit être la valeur de $\frac{n}{m}$ pour que la proposée ait essentiellement cinq racines réelles, & commence à pouvoir en avoir sept, 98.

Généralisation des principes précédens, pour déterminer dans tous les cas, le nombre des racines réelles de la proposée, *Ibid.*

Remarque sur les recherches précédentes, 101.

ARTICLE III.

Détermination approchée des équations qui ont lieu pour la Terre & pour les autres Planetes, 103.

Des équations qui ont lieu pour Mercure, *Ibid.*

Des équations qui ont lieu pour Vénus, 104.

Des équations qui ont lieu pour la Terre, *Ibid.*

Des équations qui ont lieu pour Mars, 105.

Des équations qui ont lieu pour Jupiter, *Ibid.*

Remarque sur les équations relatives à Jupiter, 106.

Des équations qui ont lieu pour la Planete d'Herschell, 107.

Remarque sur les équations qui ont lieu pour la Lune, 108.

CHAPITRE SECOND.

Des équations qui ont lieu pour la Terre.

ARTICLE PREMIER.

Des équations aux Sections Coniques par rapport au foyer, 109.

Equation polaire à l'Ellipse par rapport au foyer, *Ibid.*

Equation polaire à l'Hyperbole par rapport au foyer, *Ibid.*

Equation polaire à la Parabole par rapport au foyer, 111.

Equation générale aux Sections Coniques par rapport au foyer, *Ibid.*

ARTICLE II.

Application des recherches précédentes aux orbites de Saturne & de la Terre, 112.

Des équations aux orbites de Saturne & de la Terre, en supposant que les angles traversés sont comptés du nœud ascendant de l'orbite de Saturne, *Ibid.*

ARTICLE III.

Détermination des points de l'orbite de la Terre où le plan de l'anneau est tangent à cette orbite; des points de l'orbite de Saturne dans lesquels cet Astre doit se trouver pour que le plan de l'anneau soit tangent à l'orbite de la Terre; & des équations qui ont lieu lorsque le plan de l'anneau passe par les centres du Soleil & de la Terre, 113.

De la longitude des points de l'orbite de la Terre où le plan de l'anneau de Saturne est tangent à cette orbite, *Ibid.*

De quelques questions préliminaires à la détermination des points de l'orbite de Saturne, où cet Astre doit se trouver, pour que son anneau soit actuellement tangent à l'orbite de la Terre, 114.

De la distance du centre du Soleil, au point où l'intersection mobile de l'Ecliptique & du plan de l'anneau, coupe la perpendiculaire à cette intersection menée par le centre du Soleil, 115.
Des points de l'orbite de Saturne où cet Astre doit se trouver, pour que son anneau soit actuellement tangent à l'orbite de la Terre, 117.
Remarque sur les solutions précédentes relativement à l'épaisseur de l'anneau de Saturne, 118.
D'une équation qui a lieu lorsque le plan de l'anneau passe par le Soleil, *Ibid.*
D'une équation qui a lieu, lorsque la Terre passe par le plan de l'anneau, 119.

ARTICLE IV.

Détermination des équations qui ont lieu pour le nœud boréal de l'anneau, 120.
Symptôme pour déterminer le nombre des racines réelles des équations, par l'inspection du lieu de la Terre dans son orbite, à l'instant où le plan de l'anneau est tangent à cette orbite, *Ibid.*
Formule pour déterminer à une époque quelconque, le nombre des disparitions de l'anneau de Saturne, dans le nœud boréal, 122.
Application de la formule aux disparitions de l'anneau de Saturne dans le nœud boréal, depuis l'année 1600 jusqu'en 1900, 124.
Formule pour déterminer les valeurs de *a* qu'il faut substituer dans les équations du §. 182, pour une époque quelconque, 125.
De la maniere d'avoir égard à l'épaisseur de l'anneau de Saturne, *Ibid.*
Table des différentes valeurs de *a*, pour les époques que nous avons considérées dans le §. 189, 127.
De la longitude des points de l'orbite de la Terre, d'où sont comptés les angles Z des équations (1) & (2) du §. 182, pour les différentes époques que nous avons considérées dans le §. 189, *Ibid.*

ARTICLE V.

Des équations qui ont lieu pour le nœud austral de l'anneau, 128.
Formules pour déterminer, à une époque quelconque, le nombre des disparitions de l'anneau de Saturne dans le nœud austral, & les valeurs de *a*, 129.
Application des formules, aux disparitions de l'anneau de Saturne dans le nœud austral, depuis l'année 1600 jusqu'en 1900, 131.

CHAPITRE TROISIEME.

Calcul des disparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne, depuis l'année 1600, jusqu'en 1900.

ARTICLE PREMIER.

Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1612 & 1613, 134.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1626, 135.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1642, 136.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1656, 138.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1671, 140.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1685, 142.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1701, 143.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1714 & 1715, 144.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1730, 146.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1744, 148.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1760, 149.
Calcul des Phénomenes qui ont eu lieu en 1774, 151.
Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1789, 152.

Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1803. 154.
Cacul des Phénomenes qui auront lieu en 1819, 155.
Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1832, 156.
Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1848, 158.
Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1862, 160.
Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1878, 161.
Calcul des Phénomenes qui auront lieu en 1891, 162.

ARTICLE II.

Remarques ſur les obſervations des paragraphes précédens, relativement au choix que l'on doit faire, de celles de ces obſervations qu'il convient d'employer à la détermination des véritables élémens de l'anneau de Saturne, 163.
Remarque ſur une période que l'on a cru ramener les phénomenes de la diſparition & de la réapparition de l'anneau de Saturne dans le même ordre, 166.

ARTICLE III.

Solution rigoureuſe des diſparitions & des réapparitions de l'anneau de Saturne, 169.

CHAPITRE QUATRIEME.

De l'élévation du Soleil & de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau, pour un inſtant quelconque ; & des queſtions relatives à cette élévation.

ARTICLE PREMIER.

Expreſſion de l'élévation de la Terre & du Soleil, au-deſſus du plan de l'anneau, pour un inſtant quelconque ; & du rapport des axes de l'anneau de Saturne, vus de la Terre & du Soleil, 170.
De l'élévation du Soleil au-deſſus du plan de l'anneau, pour un inſtant quelconque, *Ibid.*
De l'élévation de la Terre au-deſſus du plan de l'anneau, pour un inſtant quelconque, 171.
Du rapport des axes de l'Ellipſe qui repréſente l'anneau de Saturne vu du Soleil & de la Terre, 172.

ARTICLE II.

Détermination des arcs décrits par Saturne dans ſon orbite, pendant le tems que le petit axe de l'Ellipſe, qui repréſente l'anneau de Saturne vu du Soleil, déborde le diſque de cette Planete, pareillement vu du Soleil, 173.
Années dans leſquelles le petit axe de l'anneau de Saturne a débordé le diſque de la Planete, depuis 1600 juſqu'en 1900, relativement à un obſervateur placé dans le Soleil, 174.

ARTICLE III.

Détermination des arcs décrits par Saturne dans ſon orbite, pendant le tems que le petit axe de l'Ellipſe qui repréſente l'anneau de Saturne, déborde le diſque de cette Planete vu de la Terre, *Ibid.*
Méthode pour réſoudre l'équation du Problême, *Ibid.*
De la limite des arcs de l'orbite de Saturne, dans leſquels doit ſe trouver cette Planete, pour que l'on puiſſe obſerver de la Terre, l'égalité du petit axe de l'anneau de Saturne, & du diametre de la Planete, 176.
Suite du développement de la méthode, pour réſoudre l'équation (1) du §. 294. 178.

ARTICLE IV.

Recherches ſur le nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299, 189.

Quelle doit être la longitude de la Terre, pour que l'équation (3) du §. 299 acquiere ou perde des racines réelles? 180.
Quelle doit être la longitude héliocentrique de Saturne, à l'instant de l'Equinoxe d'Automne, pour que l'équation (3) du §. 299 acquiere ou perde des racines réelles? 182.
Du nombre des racines réelles de l'équation (3) du §. 299, pour chacune des époques dont il a été question dans le §. 298. *Ibid.*

ARTICLE V.

Application des principes détaillés ci-dessus, aux Phénomenes qui ont eu lieu en 1690, 183.

CHAPITRE CINQUIEME.

Détermination des élémens de l'anneau de Saturne, d'après les observations.

ARTICLE PREMIER.

Détermination des élémens de l'anneau de Saturne, en supposant que l'on ne connoît en aucune façon les élémens de cet anneau, 185.
Définition des élémens de l'anneau, *Ibid.*
Des équations qui servent à résoudre les questions proposées, 186.
De ce que l'on doit entendre par les surfaces antérieure & postérieure de l'anneau, 188.
Usage des équations précédentes, 189.

ARTICLE II.

Détermination des élémens de l'anneau de Saturne, en supposant que ces élémens sont déja connus d'une façon approchée, 190.

ARTICLE III.

Des changemens qu'il faut faire aux équations de l'Article précédent, lorsque l'on fait entrer dans le calcul, un élément dépendant de l'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau, 193.

CHAPITRE SIXIEME.

Application des formules du Chapitre précédent, aux observations faites en 1773 & 1774, 1714 & 1715, & 1691.

ARTICLE PREMIER.

Application des formules du Chapitre précédent aux observations faites en 1773 & 1774, 195.
Détail des observations faites en 1773 & 1774, *Ibid.*
Observations de M. Messier, *Ibid.*
Observations recueillies par M. de la Lande, 197.
Observations faites à l'Observatoire Royal de Paris, *Ibid.*
Observations de Cadix, 198.
Observations de Toulouse, *Ibid.*
Observations de la derniere réapparition de l'anneau, *Ibid.*
Remarques sur les observations détaillées ci-dessus, 199.
D'un usage particulier de l'observation du passage du plan de l'anneau par le centre du Soleil, 200.
Elémens hypothétiques dont nous ferons usage dans le calcul des observations de 1773 & 1774, *Ibid.*
Calcul de l'observation du 6 Octobre 1773, 201.
Calcul des observations des 11 Janvier, 2 Avril, & 1 Juillet 1774, *Ibid.*

Résultat des équations précédentes, 202.
Remarque sur les équations précédentes, Ibid.
Expression de l'élévation du Soleil & de la Terre au-dessus du plan de l'anneau, aux instans des disparitions & des réapparitions de l'anneau, 204.
Examen sommaire des différentes observations, 205.
Récapitulation des recherches précédentes, 206.

ARTICLE II.

Application des formules du Chapitre précédent, aux observations faites en 1714 & 1715, 207.
Détail des observations faites en 1714 & 1715, par M. Maraldi, Ibid.
Calcul des observations faites en 1714 & 1715, 210.
Elémens hypothétiques dont on fera usage dans les calculs, 211.
Résultat des équations précédentes, 212.
Rapprochement des résultats, aux observations faites par M. Maraldi, en 1714 & 1715, 214.
Remarques sur la bande obscure vue par M. Maraldi sur le disque de Saturne, en 1714 & 1715, 215.
Remarques sur le choix des observations, 216.

ARTICLE III.

Application des formules aux observations faites en 1671, 217.
Détail des observations faites par Dominique Cassini, en 1671, Ibid.
Remarques sur les observations de l'anneau faites par Cassini, en 1671, 219.
Elémens hypothétiques dont on fera usage, & calcul des observations faites en 1671, 220.

ARTICLE IV.

Remarque sur les calculs des Articles précédens, 222.

CHAPITRE SEPTIEME.

Récapitulation des recherches précédentes, relativement à la détermination des élémens de l'anneau; & de quelques questions relatives à cet anneau.

ARTICLE PREMIER.

De l'inclinaison du plan de l'anneau sur l'Ecliptique; de la longitude du nœud de l'anneau, & de son épaisseur, 224.

ARTICLE II.

Des changemens dans les élémens de l'anneau de Saturne, 226.
Déterminations des élémens, relatives aux différentes années qui présentent des disparitions de l'anneau de Saturne, depuis 1789 jusqu'en 1900, Ibid.

ARTICLE III.

Examen d'une question intéressante, relativement à l'aptitude plus ou moins grande des deux surfaces de l'anneau, pour réfléchir la lumiere, 227.

ARTICLE IV.

De la raison pour laquelle, vers les instans des disparitions de l'anneau, les bras se raccourcissent & se séparent de la Planete, 229.

ARTICLE V.

Du tems où l'anneau de Saturne a été découvert, & des différentes opinions auxquelles cette découverte a donné lieu, 231.

Systêmes que l'on a proposés sur la rotation de l'anneau de Saturne, 234.
Solution du Problême de la rotation de l'anneau de Saturne, en ne supposant point que toutes les parties de l'anneau sont emportées d'un mouvement commun autour du centre de la Planete, 235.
De plusieurs questions que l'on peut se proposer sur l'anneau de Saturne, 237.
Points lumineux observés à la surface de l'anneau de Saturne, lors de la réapparition du commencement de Juillet 1774, 238.

ARTICLE VI.

Notice abrégée de ce que l'on sait sur Saturne, 239.
Dimensions de l'anneau, *Ibid.*
Bandes de Saturne, *Ibid.*
De quelques irrégularités observées dans les mouvemens de Saturne, 241.

TROISIEME LIVRE,

Dans lequel on traite particuliérement des trajectoires des Corps Célestes; de la maniere de déterminer ces trajectoires, d'après les observations; & de différentes questions relatives à ces observations.

Exposition du sujet, 243.

CHAPITRE PREMIER.

Détermination des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances; & des principales propriétés de ces trajectoires.

ARTICLE PREMIER.

Equations fondamentales, 244.

ARTICLE II.

Détermination de la nature des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances, 245.

ARTICLE III.

Détermination de l'espece & des dimensions de la trajectoire particuliere décrite par un projectile, d'après les circonstances connues de son mouvement à un point particulier de cette trajectoire, 248.
Détermination du Parametre de la trajectoire, d'après les circonstances connues du mouvement, 250.

ARTICLE IV.

De quelques questions relatives aux vîtesses, dans les trajectoires décrites en vertu d'une force centrale variable en raison inverse du quarré des distances, 252.
Du rapport des vîtesses tangentielles dans les différentes Sections Coniques, *Ibid.*

ARTICLE V.

Du tems employé par les différens projectiles à parcourir les trajectoires; & de quelques questions relatives aux durées des révolutions, 255.
De la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne, lorsque la trajectoire est une Ellipse, *Ibid.*
Du rapport des tems des révolutions dans les différentes Ellipses, 256.
De la relation entre le nombre de pieds que parcourt un corps grave dans la premiere seconde de sa chute à la surface d'une Planete, & le tems de la révolution de ses Satellites, 257.

Détermination des masses des Planetes qui ont des Satellites, 258.
Détermination des masses des Planetes qui n'ont point de Satellites, au moyen de la longueur du pendule qui bat les secondes à leurs surfaces, 259.
De l'usage du pendule pour déterminer la figure de la Terre, 260.
Détermination de l'anomalie moyenne, lorsque l'on connoît l'anomalie vraie, 261.
Détermination de l'anomalie vraie en général, lorsque l'on connoît l'anomalie moyenne; & particuliérement lorsque les trajectoires sont peu excentriques, 262.
De la relation entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne, lorsque la trajectoire est une Parabole, 263.
Remarque sur la Table connue en Astronomie sous le nom de Table générale du mouvement des Cometes, 264.
De la maniere d'employer les équations du §. 42[illegible], lorsque les trajectoires sont très-excentriques, 266.

ARTICLE VI.

Digression sur les longueurs du Pendule qui bat les secondes sous les différentes latitudes; & conclusions que l'on en peut tirer relativement à la figure de notre globe, 267.
Notice des longueurs observées du Pendule qui bat les secondes, sous les différentes latitudes, 268.
Valeurs des différens rayons de la Terre, conclues des longueurs observées du pendule, *Ibid.*
Valeurs des différens rayons terrestres, dans les différentes hypotheses d'ellipticité de la Terre, 269.
Conclusions que l'on peut tirer des longueurs observées du pendule, relativement à la figure de la Terre, *Ibid.*

ARTICLE VII.

De quelques propriétés relatives aux cordes des trajectoires, 270.

ARTICLE VIII.

De quelques principes tirés des considérations sur les forces centrales, dont on peut faire usage dans la détermination des orbites des Cometes, 271.
Principe méchanique employé par M. de la Grange dans son Mémoire sur les Cometes, *Ibid.*
Principe employé par Newton, dans sa Philosophie Naturelle, 273.
Considérations sur l'exactitude des équations déduites du principe précédent, 275.
Eclaircissemens sur l'équation (2) du §. 427, qui exprime le rapport entre les différens rayons du sphéroïde terrestre & les longueurs du pendule, 277.
Table générale du mouvement des Cometes dans une orbite parabolique, 279.
Table pour convertir les arcs de cercle, en parties du rayon, 288.
Table pour convertir les heures, minutes & secondes, en parties du jour, 290.

CHAPITRE SECOND,

Dans lequel on considere les circonstances du mouvement apparent des Planetes & des Cometes, relativement à un Observateur qui est lui-même en mouvement.

ARTICLE PREMIER.

Détermination du lieu apparent d'une Planete ou d'une Comete, vu de la Terre; & de sa distance à la Terre pour un instant donné, 292.
Application du calcul à un exemple, 294.
Remarque sur le cas où l'Astre est une Comete, 296.

ARTICLE II.

Des équations qui ont lieu lorſqu'on veut faire uſage de la longitude de la Terre vue du Soleil, 296.

CHAPITRE TROISIEME.

De quelques queſtions du genre de maximis & minimis, *relatives aux équations du Chapitre précédent.*

ARTICLE PREMIER.

D'une équation qui a lieu lorſque la longitude géocentrique d'une Planete eſt un *maximum* ou un *minimum* 297.

ARTICLE II.

Des Stations & des Rétrogradations des Planetes, 298.
Détermination des arcs parcourus par la Terre & par la Planete dans leurs orbites reſpectives, depuis la conjonction héliocentrique de ces Aſtres, juſqu'aux inſtans où la Planete vue de la Terre commence & finit de paroître rétrograde, 299.
Détermination des Arcs de Rétrogradation, *Ibid.*
Application des théories précédentes aux différentes Planetes, 300.

ARTICLE III.

D'une équation qui a lieu lorſque la diſtance de la Planete ou de la Comete à la Terre, eſt un *minimum*, 301.

ARTICLE IV.

Détermination du *minimum minimorum* de diſtance de la Planete ou de la Comete à la Terre, 303.
Du cas des Planetes, 304.
Du cas des Cometes, 305.
Application du calcul à la Comete de 1680, 306.

ARTICLE V.

Détermination du tems que la Comete eſt à une diſtance de l'orbite de la Terre plus petite qu'une quantité aſſignée, 308.
Application à la Comete de 1680, *Ibid.*

ARTICLE VI.

Notice des Cometes qui ont approché de l'orbite de la Terre plus près que d'un million de lieues; & calcul des plus courtes diſtances de ces Cometes à l'Ecliptique, 309.
Comete de 837, *Ibid.*
Comete de 1618, *Ibid.*
Comete de 1680, 310.
Comete de 1684, *Ibid.*
Comete de 1702, 311.
Comete de 1743, *Ibid.*
Comete de 1763, 312.
Comete de 1770, *Ibid.*
Cometes qui, après les précédentes, ont le plus approché de l'orbite de la Terre, 313.

ARTICLE VII.

Détermination de la durée du tems qu'une Comete eſt à des diſtances de l'orbite de la Terre, plus petites qu'une quantité donnée; & de l'époque préciſe où la Comete eſt à ces diſtances, *Ibid.*
Application du calcul à la Comete de 1680, 314.
Epoques où les Cometes de 837, 1618, 1680, 1684, 1702, 1743 1763 & 1770, ont été à des diſtances de l'Ecliptique plus petites qu'un million de lieues, 315.

Comete de 837, 315.
Comete de 1618, *Ibid.*
Comete de 1680, *Ibid.*
Comete de 1684, *Ibid.*
Comete de 1702, 316.
Comete de 1743, *Ibid.*
Comete de 1763, *Ibid.*
Comete de 1770, *Ibid.*
Remarque sur la Comete qui a constamment approché le plus près de la Terre, 317.

ARTICLE VIII.

Des plus grandes latitudes géocentriques des Planetes, *Ibid.*

ARTICLE IX.

Des *maxima* des angles d'élongations des Planetes, 319.

CHAPITRE QUATRIEME.

De la durée du tems qu'une Comete & la Terre sont à des distances respectives plus petites qu'une distance donnée.

ARTICLE PREMIER.

Expression de la distance de la Comete à la Terre, dans l'hypothese des trajectoires rectilignes, 321.
Des quantités qu'il faut connoître pour faire usage de l'équation précédente, 323.

ARTICLE II.

De quelques Problêmes du genre *de maximis & minimis*, relatifs aux questions précédentes, 326.
Détermination de l'instant où la Comete & la Terre sont à une distance donnée, dans l'hypothese des trajectoires considérées comme rectilignes, *Ibid.*
Du *minimum* de distance de la Comete & de la Terre, dans l'hypothese des trajectoires considérées comme rectilignes, *Ibid.*
De l'intervalle de tems pendant lequel la Comete & la Terre sont à des distances moindres qu'une quantité assignée, *Ibid.*
Quelle doit être la distance de la Terre à la ligne des nœuds, au moment où la Comete traverse l'Ecliptique, pour que la Terre & la Comete puissent se trouver un instant à une distance donnée, 327.

ARTICLE III

Du cas particulier d'une Comete dont l'orbite couperoit l'orbite de la Terre dans son nœud, 328.
Du nombre de minutes de tems qu'une Comete & la Terre seroient à des distances respectives moindres qu'une quantité assignée, dans l'hypothese où ces Astres se rencontreroient centre à centre, 330.

ARTICLE IV.

Remarque sur le dérangement des Marées, dans le cas d'une Comete qui approcheroit très-près de la Terre, 331.
Remarque sur la Comete de 1770, 332.

CHAPITRE CINQUIEME.

De la probabilité qu'à un instant quelconque, une Comete approchera de la Terre, plus près que d'une quantité donnée.

ARTICLE PREMIER.

Principes généraux d'après lesquels on peut calculer la probabilité qu'à un instant quelconque, une Comete approchera de la Terre, plus près que d'une quantité donnée, 333.

ARTICLE II.

Application des principes précédens au cas particulier où l'orbite de la Comete couperoit l'orbite de la Terre, 335.

ARTICLE III.

Solution de la question proposée dans l'Article précédent, en supposant connu l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite terrestre, au point d'intersection de ces deux orbites, Ibid.

ARTICLE IV.

Solution de la question proposée dans l'Article second, en supposant inconnu l'angle de la trajectoire de la Comete avec l'orbite de la Terre, 338.

ARTICLE V.

Solution des questions précédentes, en ayant égard à la différente probabilité des différens angles sous lesquels la trajectoire de la Comete peut couper l'orbite de la Terre, Ibid.

ARTICLE VI.

De la probabilité qu'à un instant quelconque une Comete sera à une distance de la Terre plus petite que 13000 lieues, 341.

ARTICLE VII.

Remarque sur la Comete de 1680, par laquelle Whiston a prétendu expliquer le Déluge, 343.

ARTICLE VIII.

Sur la singularité d'un Phénomene relatif aux Planetes principales de notre systême, & à leurs Satellites, 345.

CHAPITRE SIXIEME.

Des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre ; & des changemens que les Cometes qui ont le plus approché de cette orbite, devroient éprouver dans leurs élémens, pour qu'elles pussent couper l'orbite terrestre.

ARTICLE PREMIER.

Des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une Comete coupe l'orbite de la Terre, 346.

De la distance d'une Comete à l'orbite de la Terre, lorsqu'elle traverse le plan de l'Ecliptique, 347.

ARTICLE II.

Des changemens que doit éprouver une Comete dans les élémens de son orbite, pour pouvoir couper l'orbite de la Terre, 348.

ARTICLE III.

Application des théories précédentes, aux Cometes des années 837, 1299, 1596, 1618, 1680, 1683, 1684, 1702, 1739, 1743, 1763, 1764, & 1770. 349.

Comete de 837, Ibid.

Comete de 1299, 350.

Comete de 1596, Ibid.

Comete de 1618, 351.

Comete de 1680, Ibid.

Comete de 1683, 352.

Comete de 1684, Ibid.

Comete de 1702, Ibid.

Comete de 1739, 353.

Comete de 1743, *Ibid.*
Comete de 1763, 354.
Comete de 1764, *Ibid.*
Comete de 1770, 355.
Table pour vérifier facilement si une Comete peut approcher de l'orbite de la Terre dans ses nœuds, 355.

CHAPITRE SEPTIEME.

De quelques équations indépendantes de la force centrale, & qui supposent uniquement que les mouvemens des Cometes ou des Planetes se passent dans un même plan.

ARTICLE PREMIER.

Equations fondamentales relatives aux présentes recherches, 357.

ARTICLE II.

De quelques équations particulieres résultantes de la Comparaison des observations prises deux à deux, trois à trois 358.
Détermination de la position du plan de l'orbite, au moyen de deux observations, en supposant d'ailleurs connues les distances de la Comete ou de la Planete à la Terre, à l'instant des deux observations, *Ibid.*
Remarque sur la généralité des solutions du §. 549, 360.
De la relation entre les distances de la Comete à la Terre, correspondantes aux observations prises trois à trois, 361.
Remarque sur la forme de l'équation précédente, *Ibid.*
De l'usage de l'équation (2) du §. 553, *Ibid.*
Remarque sur l'équation (3) du §. 554, 362.
Remarque sur les équations (7) & (8) du §. 549, 363.
Détermination des rayons vecteurs correspondans aux différentes distances de la Comete à la Terre, *Ibid.*
Relation entre l'angle compris sur le plan de la trajectoire, entre deux rayons vecteurs extrêmes & la corde correspondante, 364.

ARTICLE III.

De quelques nouvelles équations dont on peut faire usage dans la détermination des trajectoires des Cometes & des Planetes, *Ibid.*
D'une propriété des trois coordonnées perpendiculaires, correspondantes aux différens points des trajectoires des Planetes ou des Cometes, 365.
Expression de la corde comprise entre deux rayons vecteurs, 366.
Expression de l'angle compris sur le plan de la trajectoire, entre les deux rayons vecteurs, *Ibid.*
Détermination de la longitude & de la latitude héliocentriques de la Comete, & du sens du mouvement de cet Astre dans son orbite, 367.
Détermination de la longitude du nœud ascendant de la Comete sur l'Ecliptique, *Ibid.*
Détermination de l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comete sur l'Ecliptique, 369.

CHAPITRE HUITIEME.

Examen de la légitimité de quelques équations tirées de la théorie des forces centrales, dont nous ferons usage dans la suite.

ARTICLE PREMIER.

Questions préliminaires à l'examen des équations de la forme de celles du §. 554, 369.
De la relation entre les coordonnées de la trajectoire de la Comete, prises sur le plan de l'orbite de la Comete, & les coordonnées à cette même trajectoire, prises sur le plan de l'Ecliptique & sur un plan perpendiculaire à l'Ecliptique, *Ibid.*
Des relations entre les trois distances successives de la Comete à la Terre, & les coordonnées à la trajectoire de la Comete prises sur le plan de l'orbite, 371.

ARTICLE II.

Application du principe du §. 442, à la détermination des équations de la forme de celles du §. 554, 374.
Simplification des expressions précédentes, lorsque les intervalles entre les observations ne sont pas trop considérables, 376.

ARTICLE III.

Examen de la théorie précédente, & limitation de cette théorie dans la pratique, 377.

ARTICLE IV.

Réflexions qui tendent à établir de plus en plus la légitimité des suppositions précédentes, 379.
Nouvelles considérations sur l'exactitude des équations dont nous avons fait usage, 380.

ARTICLE V.

Examen du cas particulier où les latitudes des Cometes sont très-petites, 381.

ARTICLE VI.

Généralisation de la théorie précédente, 384.

ARTICLE VII.

Usage des équations de l'Article cinquieme, pour résoudre le Problême des Cometes, 385.

ARTICLE VIII.

Application du principe du §. 444 à la détermination des orbites des Cometes, 388.
Expressions plus exactes des quantités a, b, c, qui entrent dans les équations dont nous avons fait usage, lorsque les intervalles entre les observations ne sont pas considérables, 390.
Remarque sur les équations du §. 593, 392.

CHAPITRE NEUVIEME.

De quelques considérations préliminaires au calcul des orbites des Corps Célestes.

ARTICLE PREMIER.

De quelques propositions trigonométriques dont nous ferons usage dans la suite, 393.
Déterminations du troisieme côté d'un triangle sphérique, lorsque l'on connoît les deux autres côtés du triangle, & l'angle compris entre ces côtés, *Ibid.*
Application des formules précédentes à la détermination d'un angle quelconque d'un triangle sphérique, lorsque l'on connoît les trois côtés de ce triangle, 395.
Aplication des théories précédentes à la détermination de l'angle adjacent à l'un des côtés d'un triangle sphérique, lorsque l'on connoît deux des côtés de ce triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés, *Ibid.*

ARTICLE II.

De la relation entre la Longitude, la Latitude, la Déclinaison & l'Ascension droite d'une Planete, 396.

ARTICLE III.

De la Précession & de la Nutation, 398.
De la variation de la distance d'une Etoile au pole boréal de l'Ecliptique, & de la variation de sa longitude, déduites de la théorie des forces centrales, 400.
Expression de la variation de la distance d'une Etoile, au pole boréal de l'Ecliptique, *Ibid.*
Expression de la variation de la longitude d'une Etoile, 401.
Généralisation des équations précédentes, 403.
Remarque sur la Nutation & la Précession en Ascension droite & en Déclinaison, 404.

ARTICLE IV.

De la Parallaxe, *Ibid.*
Remarque sur les formules des §. 539 & 551 du premier Volume, 405.

ARTICLE V.

De l'Aberration, 407.
Principe fondamental du calcul de l'Aberration, Ibid.
De l'Aberration du Soleil, 308.
De l'Aberration des Etoiles, 409.
Expression de l'Aberration en longitude. 410.
Expression de l'Aberration en latitude, Ibid.
De l'Aberration des Planetes & des Cometes, 411.
Sur une question relative aux passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, Ibid.

ARTICLE VI.

Méthode pour conclure des observations faites à des intervalles de tems inégaux, celles qui auroient eu lieu à des intervalles de tems égaux, 412.
Principe de la méthode, Ibid.
Application de la Méthode à la détermination des lieux des Cometes & des Planetes, 413.

CHAPITRE DIXIEME.

Application des équations des Chapitres précédens, à la détermination des orbites des Planetes & des Cometes.

ARTICLE PREMIER.

Détermination des orbites paraboliques, 416.
Application des principes démontrés dans les Chapitre précédens, à la détermination de l'orbite de la seconde Comete découverte par M. Méchain en 1781, Ibid.
Type du calcul pour conclure les observations que j'ai définies observations moyennes ou composées, 418.
Application des formules des §. 592, 593 & 594, aux observations du §. précédent, Ibid.
Remarque sur les expressions précédentes, 419.
Type du calcul pour déterminer le rapport des distances de la Comete à la Terre, 420.
Application des équations des §. 593 & 594 à la détermination des distances de la Comete à la Terre, 422.
Type du calcul pour déterminer les distances absolues de la Comete à la Terre, 423.
Remarque sur la solution précédente, 425.
Détermination de l'angle compris sur le plan de la trajectoire de la Comete, entre les rayons vecteurs correspondans aux deux observations extrêmes, Ibid.
Type du calcul, 426.
Détermination de l'anomalie de la Comete, lors de la première observation, 427.
Détermination de la distance périhélie, 428.
Type du calcul, 429.
Détermination de l'instant du passage de la Comete par le périhélie, Ibid.
Type du calcul, 430.
Elémens approchés de la seconde Comete de 1781, Ibid.
Détermination de la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete, de l'inclinaison de l'orbite, & du sens du mouvement de la Comete, 431.
Détermination du lieu du périhélie sur l'orbite de la Comete, Ibid.
Observations de la seconde Comete de 1781, 433.

ARTICLE II.

De la maniere de rectifier les élémens trouvés par les méthodes précédentes, Ibid.
Premiere méthode, 434.
Type du calcul, 437.
Détermination de la longitude du nœud ascendant de l'orbite; de son inclinaison sur l'Ecliptique; du sens du mouvement de la Comete, & du lieu du périhélie sur l'orbite, 439.

Type du calcul pour déterminer la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete, l'inclinaison de l'orbite sur l'Ecliptique, & le sens du mouvement de la Comete, 440.
Type du calcul pour déterminer le lieu du périhélie sur l'orbite, 442.
Seconde méthode pour rectifier les élémens approchés, Ibid.

ARTICLE III.

Détermination des trajectoires dans l'hypothese elliptique, 443.
Des équations générales du Problême, 444.
Application des théories précédentes à la seconde Comete de 1781, 446.
Type du calcul, 147.
Détermination des angles compris sur le plan de l'orbite, entre les rayons vecteurs, Ibid.
Détermination des anomalies correspondantes aux trois observations, 448.
Détermination de l'excentricité de l'orbite, du Parametre du grand axe, de la longueur du grand axe, de la distance périhélie, de la durée de la révolution de la Comete autour du Soleil, de l'instant de son passage par le périhélie, 449.

ARTICLE IV.

D'une vérification qu'il faut faire subir aux élémens, pour s'assurer de leur exactitude, 451.
Remarque sur la solution précédente, 452.

ARTICLE V.

Détermination de la trajectoire, dans le cas où l'on sauroit d'avance que cette trajectoire est circulaire, 454.
Remarque sur une des équations du §. 673, & sur son usage dans le cas d'une orbite peu excentrique, 457.

ARTICLE VI.

Détermination des élémens d'une Comete dont l'orbite est déja connue, d'après une seule observation, 458.

ARTICLE VII.

Du cas particulier où l'on auroit observé une Comete dans ses deux nœuds, 459.
Remarque sur la solution précédente, 461.

ARTICLE VIII.

Des équations à la projection des orbites paraboliques des Cometes sur l'Ecliptique, 462.
De quelques propriétés des Paraboles de projection, 463.

ARTICLE IX.

Du mouvement des Cometes vers le Soleil, 465.

CHAPITRE ONZIEME.

Notice historique de ce que l'on sait de plus certain sur les Cometes.

ARTICLE PREMIER.

Notice des Cometes dont on a calculé les orbites, 468.
Comete de 837, Ibid.
Comete de 1231, Ibid.
Comete de 1264, 469.
Comete de 1299, Ibid.
Comete de 1301, Ibid.
Comete de 1337, 470.
Comete de 1456, Ibid.

Comete de 1472, 471.
Comete de 1531, *Ibid.*
Comete de 1532, 472.
Comete de 1533, *Ibid.*
Comete de 1556, 473.
Comete de 1577, *Ibid.*
Comete de 1580, 474.
Comete de 1582, *Ibid.*
Comete de 1585, *Ibid.*
Comete de 1590, 475.
Comete de 1593, *Ibid.*
Comete de 1596, 476.
Comete de 1607, *Ibid.*
Premiere Comete de 1618, 477.
Seconde Comete de 1618, *Ibid.*
Comete de 1652, 478.
Comete de 1661, *Ibid.*
Comete de 1664, *Ibid.*
Comete de 1665, 480.
Comete de 1672, *Ibid.*
Comete de 1677, 481.
Comete de 1678, *Ibid.*
Comete de 1680, *Ibid.*
Comete de 1682, 483.
Comete de 1683, 484.
Comete de 1684, *Ibid.*
Comete de 1686, *Ibid.*
Comete de 1689, 485.
Comete de 1698, 486.
Comete de 1699, *Ibid.*
Comete de 1702, *Ibid.*
Comete de 1706, 487.
Comete de 1707, *Ibid.*
Comete de 1718, *Ibid.*
Comete de 1723, 488.
Comete de 1729, *Ibid.*
Comete de 1737, 489.
Comete de 1739, *Ibid.*
Comete de 1742, 490.
Premiere Comete de 1743, *Ibid.*
Seconde Comete de 1743, 491.
Comete de 1744, *Ibid.*
Comete de 1747, 492.
Premiere Comete de 1748, *Ibid.*
Seconde Comete de 1748 493.
Comete de 1757, *Ibid.*
Comete de 1758, *Ibid.*
Premiere Comete de 1759, 494.
Seconde Comete de 1759, 495.
Troisieme Comete de 1759, 496.
Comete de 1762, *Ibid.*
Comete de 1763, 497.
Comete de 1764, *Ibid.*
Premiere Comete de 1766, 498.
Seconde Comete de 1766, *Ibid.*

Comete de 1769, 499.
Premiere Comete de 1770, Ibid.
Seconde Comete de 1770, 501.
Comete de 1771, Ibid.
Comete de 1772, 502.
Comete de 1773, Ibid.
Comete de 1774, 503.
Comete de 1779, Ibid.
Comete de 1780, Ibid.
Premiere Comete de 1781, 504.
Seconde Comete de 1781, Ibid.
Comete de 1783, 505.
Premiere Comete de 1784, Ibid.
Seconde Comete de 1784, 506.
Premiere Comete de 1785, Ibid.
Seconde Comete de 1785, Ibid.
Comete de 1786, 507.
Comete de 1787, Ibid.
Remarque sur une Comete que l'on a prétendu avoir éclipsé la Lune, en 1454, 508.
Récapitulation des notices précédentes, Ibid.

ARTICLE II.

De la Nature des Cometes & des trajectoires qu'elles décrivent, 510.

ARTICLE III.

Du nombre des Cometes, 511.

ARTICLE IV.

Du retour des Cometes, 512.
Retours des Cometes conclus par les méthodes géométriques, Ibid.
Retours des Cometes conclus par la similitude de leurs élémens, 513.
Opinion de M. Struick sur les révolutions de plusieurs Cometes, 514.

ARTICLE V.

Opinions de quelques Philosophes sur les effets que peuvent produire les Cometes sur la Terre, 515.
Examen des opinions précédentes, Ibid.

ARTICLE VI.

De l'atmosphere des Cometes, 517.
Chevelure des Cometes, Ibid.
Queues des Cometes, Ibid.
Inégalités observées dans les Queues des Cometes, 518.
Explication des phénomenes précédens, 519.
Opinions d'Euler & de Le Mairan, Ibid.
Opinion de Newton, 520.

CHAPITRE DOUZIEME.

De l'état actuel de notre Système Planétaire, & des différentes recherches que l'on peut se proposer sur cet objet.

ARTICLE PREMIER.

Exposition du sujet, 521.

ARTICLE II.

Equations dont on fera usage pour déterminer les masses & les densités des Planetes, ainsi que la chute des graves & la longueur du pendule qui bat les secondes à leurs surfaces, 522.

Détermination des masses des Planetes, 522.
Détermination des densités des Planetes, 523.
Détermination du nombre de pieds que parcourt un corps grave à la surface des Planetes, & de la longueur du pendule qui bat les secondes à leurs surfaces, 524.
Remarque sur une méthode pour déterminer les différences entre les années tropiques & les années sidérales des Planetes, 525.

ARTICLE III.

Notice abrégée de ce que l'on sait sur les Planetes, *Ibid.*
Le Soleil, 526.
Mercure, *Ibid.*
Vénus, 527.
La Terre, *Ibid.*
Mars, 529.
Jupiter, *Ibid.*
Saturne, 530.
Herschell, 531.
Remarque sur le nombre des Planetes, 532.

ARTICLE IV.

Notice abrégée de ce que l'on connoît sur les Satellites, *Ibid.*
Satellites de la Planete d'Herschell, *Ibid.*
Satellites de Saturne, *Ibid.*
Satellites de Jupiter, 533.
La Lune, 535.
Remarque sur les résulats précédens, relativement à la stabilité de notre Systême Planétaire, 537.

ARTICLE V.

Sur la forme des équations que l'on peut employer pour perfectionner les Tables des Planetes, *Ibid.*
Des équations relatives aux Tables du Soleil, 538.
De la forme des équations qui serviroient à rectifier les Tables du Soleil, si les orbites n'étoient point troublées, 539.
De la forme des équations qui peuvent servir à rectifier les Tables du Soleil, en supposant les orbites troublées, 541.
De la forme des équations propres à rectifier les orbites des Planetes, 542.
Remarque sur les solutions précédentes, & sur la maniere de déterminer les inclinaisons des orbites des Planetes, ainsi que la position de leurs nœuds, 544.
Remarques sur ce que l'on doit entendre par l'époque des Tables, & sur les quantités δA, δu, qui entrent dans les équations précédentes, 545.
Remarques sur la vérification des Tables de la Lune, 546.

ARTICLE VI.

Remarque sur une nouvelle forme que l'on peut donner aux équations qui servent à déterminer les orbites des Cometes, 547.
Expression de la corde dans la Parabole, 549.
Expression de la corde dans l'Ellipse, 551.
Remarque sur un usage de la méthode du §. 624, pour rectifier les erreurs des observations, 552.

ARTICLE VII.

Sur un petit mouvement que l'on a soupçonné dans le centre de gravité de notre Systême Planétaire 554.
Constructions fondamentales, 555.
Remarque sur les résultats des méthodes précédentes, 558.

CHAPITRE TREIZIEME.

Des altérations que les orbites des Cometes peuvent éprouver en vertu des actions réciproques de la Terre & des Cometes; & des questions relatives à cet objet.

ARTICLE PREMIER.

Principes dont on fera usage dans ces recherches, 559.

ARTICLE II.

Examen de la légitimité des principes précédens, & détermination du rayon que l'on peut donner à la sphere d'attraction de la Terre, 561.
Confirmation de la légitimité de l'hypothese précédente, 564.
Remarque sur la premiere Comete de 1770, 565.

ARTICLE III.

Du changement que la masse de la Comete peut apporter dans la détermination du rayon de la sphere d'attraction, Ibid.
De la distance de la Comete & de la Terre au centre commun de gravité, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction, 566.

ARTICLE IV.

De quelques questions relatives au tems où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction, 567.
Détermination des mouvemens de la Terre & de la Comete dans la direction des tangentes à leurs orbites, 567.
Détermination du tems où la Comete s'engage dans la sphere de commune attraction, 568.

ARTICLE V.

Des mouvemens du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, soit dans l'espace absolu, soit par rapport à la Terre considérée comme immobile; & des coordonnées auxquelles nous rapporterons ces mouvemens, 569.
Mouvemens de la Comete & de la Terre dans le sens des coordonnées que nous venons de choisir, Ibid.
Mouvemens du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, dans le sens des mêmes coordonnées, 570.

ARTICLE VI.

Des lieux du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, soit dans l'espace absolu, soit sur l'Ecliptique; & des questions relatives à ces lieux, 572.
Du lieu de la Terre & de la Comete, soit dans l'espace absolu, soit sur l'Ecliptique, Ibid.
Du lieu du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, 573.

ARTICLE VII.

Détermination du plan dans lequel sont situées les trajectoires relatives de la Terre & de la Comete, & de quelques questions relatives à ce plan, 574.
De l'angle de l'intersection du plan des orbites relatives de la Terre & de la Comete, avec la perpendiculaire à la ligne des nœuds de la Comete menée sur le plan de l'Ecliptique, 575.
Détermination de l'inclinaison du plan des orbites relatives sur l'Ecliptique, Ibid.
De l'angle que fait sur le plan des orbites relatives, la route rectiligne du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, avec l'intersection du plan des orbites relatives & de l'Ecliptique, 576.
Des angles que font sur le plan des orbites relatives, les rayons vecteurs des trajectoires relatives de la Terre & de la Comete, avec la route rectiligne du centre commun de gravité, à l'instant où la Comete s'engage dans la sphere d'attraction de la Terre; & des angles que font pareillement les tangentes aux orbites relatives, avec ces rayons vecteurs, pour le même instant, 578.

Des vîtesses tangentielles de la Comete & de la Terre dans leurs orbites relatives, à l'instant où ces Astres s'engagent dans la sphere de commune attraction, 579.
Application des théories précédentes à une Comete, 580.

ARTICLE VIII.

De la force attractive qu'il faut supposer dans le centre commun de gravité, pour pouvoir employer les formules des §. 414, 415 & 416, 581.
Application des théories précédentes à la Comete du §. 863, 583.

ARTICLE IX.

Recherches préliminaires à la détermination des nouvelles trajectoires de la Terre & de la Comete autour du Soleil, 584.
Des rayons vecteurs de la Terre & de la Comete dans leurs orbites relatives, à l'instant où ces Astres se dégagent de la sphere de commune attraction, des angles des rayons vecteurs & des tangentes aux orbites relatives, avec la route rectiligne du centre commun de gravité; & des vîtesses tangentielles de ces Astres dans leurs orbites relatives pour le même instant, Ibid.
Du tems où la Comete se dégage de la sphere d'attraction de la Terre, Ibid.
Du lieu dans l'espace absolu, du centre commun de gravité de la Terre & de la Comete, à l'instant où ces Astres se dégagent de la sphere de commune attraction; & du lieu de la projection de ce centre sur le plan de l'Ecliptique, 585.

ARTICLE X.

Détermination des nouvelles trajectoires de la Terre & de la Comete autour du Soleil, 586.
Détermination des rayons vecteurs de la Terre & de la Comete dans leurs nouvelles orbites autour du Soleil, à l'instant où la Comete se dégage de la sphere d'attraction de la Terre Ibid.
Des vîtesses tangentielles de la Terre & de la Comete dans leurs nouvelles orbites autour du Soleil, à l'instant où la Terre & la Comete se dégagent de la sphere de commune attraction, 590.
Du tems où l'Astre perceroit le plan de l'Ecliptique, s'il se mouvoit uniformément suivant la tangente à sa nouvelle trajectoire autour du Soleil, avec la vîtesse tangentielle qu'il a, à l'instant où il commence à décrire cette trajectoire, 593.
De la position des nœuds des nouvelles trajectoires autour du Soleil, sur le plan de l'Ecliptique primitif, 594.
De l'inclinaison du plan de la nouvelle trajectoire de l'Astre, sur le plan de l'Ecliptique primitif, Ibid.
De l'angle du rayon vecteur de l'Astre, avec la tangente à la nouvelle trajectoire qu'il décrit autour du Soleil, à l'instant où il commence à décrire cette trajectoire, 595.
Remarque sur les équations précédentes, 596.
Application des théories à la Comete du §. 863, Ibid.
Calcul de la nouvelle orbite de la Terre, Ibid.
Usage des méthodes précédentes, pour retrouver une ancienne orbite de Comete, 597.

CHAPITRE QUATORZIEME.

De quelques questions analogues aux recherches du Chapitre précédent.

ARTICLE PREMIER.

Recherches qui peuvent conduire à déterminer si la Lune a été primitivement une Comete qui ait circulé autour du Soleil, 598.
Des principes qui peuvent guider dans la question dont il s'agit Ibid.
Aucune Comete parabolique ou hyperbolique ne peut devenir Satellite de la Terre, 599.
Des conditions nécessaires pour qu'une Comete elliptique puisse devenir Satellite de la Terre, 600.

Remarque sur les ſolutions précédentes, 601.
Application des principes à la Lune, 602.
Remarque ſur les Satellites de Jupiter, de Saturne & d'Herſchell, 603.
Examen de ce qui arriveroit ſi à l'approche de la Planete, la Comete recontroit un fluide qui lui fit perdre une partie de ſon mouvement, 603.
Examen de ce qui arriveroit, ſi la Planete & la Comete venoient à ſe choquer, 604.

ARTICLE II.

Objections contre le ſyſtême qui ſuppoſe que la Terre & les Planetes ont été primitivement détachées du Soleil, 605.

ARTICLE III.

Des trajectoires que les Satellites de Jupiter, de Saturne, d'Herſchell & de la Terre, décriroient autour du Soleil, ſi la Terre, Saturne, Herſchell ou Jupiter venoient à être anéantis tout-à-coup, 606.
Des trajectoires que les Satellites de Jupiter décriroient autour du Soleil, ſi Jupiter venoit à être anéanti tout-à-coup, 607.
Application du calcul aux Satellites de Jupiter, 609.
Premier Satellite, Ibid.
Second Satellite, 610.
Troiſieme Satellite, Ibid.
Quatrieme Satellite, Ibid.
Application du calcul à la Lune, Ibid.
Remarque relative aux Satellites de Saturne & d'Herſchell, 611.

ARTICLE IV.

Des conditions qui doivent avoir lieu, pour qu'un projectile puiſſe circuler autour d'une ſphere d'attraction, à la maniere des Satellites, Ibid.

CHAPITRE QUINZIEME.

Recherches ſur la premiere Comete de 1770.

ARTICLE PREMIER.

Elémens & obſervations de la premiere Comete de 1770, tirés du Mémoire de M. Léxell, 613.

ARTICLE II.

Remarque ſur la néceſſité de débarraſſer les calculs des erreurs des obſervations; & méthodes pour y parvenir, 615.
Premiere méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations, 616.
Seconde méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations, 620.
Troiſieme méthode pour débarraſſer les calculs, des erreurs des obſervations, 621.

ARTICLE III.

Application des formules des §. 624 & ſuivans, aux obſervations de la Comete du milieu de Juin & du commencement d'Août 1770, 622.
Uſage des réſultats de M. Léxell, pour débarraſſer les calculs des erreurs des obſervations, 623.
Application des formules des §. 624 & ſuivans, aux obſervations du milieu de Juin, 624.
Equations réſultantes des obſervations du milieu de Juin, 625.
Obſervations compoſées, déduites des équations précédentes, Ibid.
Application des formules des §. 624 & ſuivans, aux obſervations du commencement d'Août, 626.
Obſervations compoſées pour le commencement d'Août, Ibid.

ARTICLE IV.

Diſtances de la Comete à la Terre, & rayons vecteurs de la Comete, conclus des obſervations compoſées déduites des obſervations du milieu de Juin, Ibid.

Solution d'une difficulté relative aux résultats précédens, 618.

ARTICLE V.

Distances de la Comete à la Terre, & rayons vecteurs de la Comete, conclus des observations composées déduites des observations du commencement d'Août, 619.

ARTICLE VI.

Application des formules du §. 553, aux observations dont il s'agit; & considération d'une nouvelle observation, *Ibid.*

ARTICLE VII.

Application des formules des §. 639, 641, 64[illegible], 645, à la Comete de 1770; & détermination des élémens approchés de cette Comete, dans l'hypothese parabolique, 631.

ARTICLE VIII.

Vérification des élémens approchés de la Comete, 633.
Application des formules du §. 951 aux observations des 14 Juin, 4 Août & 2 Octobre, 633.
Remarque sur les résultats précédens, 636.
Application des formules du §. 951, aux observations des 14 Juin, 31 Août & 2 Octobre, *Ibid.*
Application des formules du §. 951, aux observations des 14 Juin, 29 Juin, & 2 Octobre, 638.

ARTICLE IX.

Suite des recherches sur l'orbite parabolique de la premiere Comete de 1770, 639.
Détermination de la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Comete; de son inclinaison sur l'Écliptique, & du lieu du périhélie sur l'orbite, d'après les observations des 29 Juin & 2 Octobre, en supposant que la Comete a passé par le périhélie le 9 Août 2 heures 30′, & que la distance périhélie étoit de 0,62662, *Ibid.*
Elémens de la premiere Comete de 1770, dans les suppositions précédentes, 640.
Comparaison des lieux observés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens précédens, *Ibid.*
Nouvelles hypotheses sur la distance périhélie, 641.
Elémens de la Comete, en supposant la distance périhélie = 0,63662, *Ibid.*
Elémens de la Comete, en supposant la distance périhélie = 0,62162, 642.
Comparaison des lieux observés de la Comete, avec les lieux calculés d'après les élémens du §. 963, *Ibid.*
Remarque sur le résultat des Tables de comparaison des §. 961 & 963, *Ibid.*
Elémens de la Comete, en supposant la distance périhélie de 0,62412, 643.
Comparaison des lieux observés de la Comete avec les lieux calculés d'après les élémens précédens, *Ibid.*
Conclusion, 644.

Fin de la Table des Matieres.

ERRATA.

PAGE 31, *ligne derniere*, $\frac{dy}{dx} = -X$; *liſez* $\frac{dy}{d\kappa} = -X$.

Page 50, *ligne* 33,

$$+ 1 - \frac{(\text{cotang}^2 m'P \times 0{,}000000000000938\, T^2)}{\text{ſin } m'P} \left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right) \frac{240'' \, dT}{\theta}.$$

Liſez
$$+ \left(\frac{1 - \text{cotang}^2 m'P \times 0{,}000000000000938\, T^2}{\text{ſin } m'P}\right) \left(1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2\right) \frac{240'' \, dT}{\theta}.$$

Page 52, *avant-derniere ligne*, que lorſque le terme $n\,360$;
Liſez, que lorſque le terme $\frac{1}{2}\Delta^2$ ſin $m'P \times n \times 360^d$.

Page 83, *ligne* 33, $\rho =$, &c.; *liſez*, $\rho^2 =$, &c.

Page 176, *derniere ligne*, $\mp \frac{6}{7}$ ſin (longit. du nœud de l'ann. — longit. hél. Sat.);
Liſez, $\mp \frac{6}{7}$ ſin (incl. ann.) ſin (longit. du nœud de l'ann. — long. hél. Sat.).

Page 204, *ligne* 8; *ſubſtituez à l'équation* (2) *la ſuivante*,
(2) Tang (inclinaiſon de l'anneau) =

$$\frac{3{,}439}{7{,}206 + 0{,}002198\, d(\text{longit. Terre } 1) - 0{,}017961\, d(\text{long. Terre } 2) - 0{,}01944\, d(\text{long. Terre } 3)}$$

Page 212, *ligne* 12, de $9^f\, 2^d\, 14'\, 2''$; *liſez*, de $6^f\, 2^d\, 14'\, 2''$.

Page 250, *ligne* 1, $a^2 - E^2 - \frac{aP}{2}$; *liſez*, $a^2 - E^2 - \frac{aP}{2} = 0$.

Page 253, *éq.* (3), $V^2 - \frac{(2M+m)}{R} - 2f = 0$; *liſez*, $V^2 - \frac{2(M+m)}{R} - 2f = 0$.

Page 254, *éq.* (7), *ſubſtituez* périhélie *à* aphélie, *&* aphélie *à* périhélie.

Page 254, *ajoutez à la fin du* §. 418; Si dans l'équation (3) l'on ſubſtitue à $2f$ ſon expreſſion $-\frac{M+m}{a}$, elle deviendra

$$(8)\quad V^2 = \frac{2(M+m)}{R} - \frac{M+m}{a};$$

C'eſt l'expreſſion générale des vîteſſes tangentielles pour tous les corps qui décrivent des trajectoires autour du Soleil.

Page 254, *ligne* 26, (§. 18 éq. (5)); *liſez*, (§. 418 éq. (6)).

Page 255, *éq.* (2), $\frac{E}{a} P - 2h = 0$; *liſez*, $\frac{a}{E} P - 2h = 0$.

Page 256, *ligne* 33, ſin $\varphi' = \varphi$, *liſez*, ſin $\varphi' =$ ſin φ.

Page 266, *ajoutez en marge*, Fig. 14.

Page 267, *ajoutez à la fin du* §. 435,
Dans les équations (4) & (8) l'arc de 360^d doit être évalué dans le cercle dont le rayon $= a$; mais $a = \frac{T^{\frac{2}{3}}}{T^{\frac{2}{3}}}$; donc $\frac{T}{360^d} = \frac{T^{\frac{1}{3}}\, T^{\frac{2}{3}}}{\text{arc } 360^d}$. Dans cette nou-

velle expreſſion, l'arc de 360^d doit être pris dans un cercle dont le rayon $= 1$.

Page 382, *eq.* (9) $(X''''Y'' - X''X'''')$; *liſez*, $(X''''Y'' - X''Y'''')$.

Page 382 *éq.* (9), $\sin B'' - B''''$; *liſez*, $\sin (B'' - B'''')$.

Page 382, *éq.* (10), $(Y''''Y'' - X''Y'''')$; *liſez*, $(X''''Y'' - X''Y'''')$.

Page 389, *éq.* (3), $R = \sqrt{(\&c.)}$, *liſez*, $R' = \sqrt{(}$.

Page 390 *éq.* (3), $R' \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\,\Delta' r' \cos L' \cos (B - A))}$;
Liſez, $R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\,\Delta' r' \cos L' \cos (B' - A'))}$.

Page 392, *ligne* 19, $\dfrac{4Ft^2}{R'+R'''}$; *liſez*, $\dfrac{4Ft''^2}{R'+R'''}$.

Page 419 *ligne* 4, $b = \gamma'' \sin L'' \cos L''' - \gamma' \sin L''' \cos L'$;
Liſez, $b = \gamma'' \sin L'' \cos L''' - \gamma' \sin L''' \cos L''$.

Page 421, *premiere colonne*, *ligne* 13, $+9{,}458516$; *liſez*, $+0{,}458516$.

Page 429, *Type du calcul*, 8·3302123 . . . . . log. 0,521395;
Liſez, 8·3302123 . . . . log. 0,0213930.

Page 429,

$$1 + \cos Z' = (1) + (2)$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) \;.\;.\;.\;. & -\,1{,}00000 \\ (1) \;.\;.\;.\;. & +\,1{,}92811 \\ \hline & +\,0{,}92811 \end{array}\right\} \textit{Liſez}, \left\{\begin{array}{lr} (1) \;.\;.\;.\;. & +\,1{,}00000 \\ (2) \;.\;.\;.\;. & +\,0{,}92811 \\ \hline & +\,1{,}92811 \end{array}\right.$$

Page 446, *lignes* 10 & 11, eſt de $365^j\, 6^h\, 11'$, ou enfin de $525971'$;
Liſez, de $365^j\, 6^h\, 9'\, 11''$, ou enfin de $525969'{,}19$.

Page 466, *ſupprimez les lignes* 20, 21, 22, 23.

Page 543, *ligne* 6, $-\left(\dfrac{E}{a} + \dfrac{\delta E}{a}\right)\left(\tfrac{3}{2} - \&c.\right)$; *liſez* $-\left(\dfrac{E}{a} + \dfrac{\delta E}{a}\right)^2\left(\tfrac{3}{2} - \&c.\right)$.

Page 543, *ligne* 7, $\gamma = \Big(2 - 3\left(\dfrac{E}{a} + \dfrac{\delta E}{a}\right) \cos (u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)$

$$\sin (u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)\Big);\ \textit{liſez}$$

$$\gamma = \left(2 - 3\left(\frac{E}{a} + \frac{\delta E}{a}\right) \cos (u - \delta u - \Omega - \delta\Omega)\right) \sin (u - \delta u - \Omega - \delta\Omega).$$

Page 551, *éq.* (5), $-122'{,}623 \dfrac{c^3}{(R'+R''')^{\frac{11}{2}}}$; *liſez* $-122'{,}623 \dfrac{c^7}{(R'+R''')^{\frac{11}{2}}}$.

Page 635, *ajoutez à la fin du* §. 951;

Les expreſſions de Δ', Δ'', Δ''' donnent deux valeurs; on ne peut jamais être embarraſſé ſur le choix de celle de ces valeurs qui réſout la queſtion propoſée. En effet, les valeurs de Δ', Δ'', Δ''' qu'il faut choiſir, ſont celles qui, ſubſtituées dans les équations

$$R' = \sqrt{(r'^2 + \Delta'^2 - 2\,\Delta' r' \cos L' \cos (B' - A'))};$$
$$R'' = \sqrt{(r''^2 + \Delta''^2 - 2\,\Delta'' r'' \cos L'' \cos (B'' - A''))};$$
$$R''' = \sqrt{(r'''^2 + \Delta'''^2 - 2\,\Delta''' r''' \cos L''' \cos (B''' - A'''))};$$

donnent pour R', R'', R''', les valeurs de R', R'', R''', déterminées par les équations du §. 951.

ADDITION.

De quelques propositions relatives au mouvement dans l'Hyperbole.

DANS les paragraphes 420 & suivans, j'ai donné l'expression du tems employé par les différens projectiles, à parcourir les arcs des trajectoires elliptiques & paraboliques ; je n'ai point parlé, dans ces paragraphes, du mouvement dans l'Hyperbole ; je m'empresse de réparer cette omission. Soit

t le tems écoulé depuis le passage par l'apside-inférieure;
a le demi-grand axe de la trajectoire ;
E la distance du centre de la trajectoire au foyer;
P le Parametre de la trajectoire ; dans l'hyperbole $P = 2a\left(\frac{E^2}{a^2} - 1\right)$;
Z l'angle traversé depuis le passage par l'apside inférieure ;
1 le sinus total ;
M la masse du corps attirant;
m la masse du projectile ;

Et supposons $\frac{E}{a} = b$.

Nous avons vu (§. 420) que l'on a généralement pour les Sections Coniques,

$$(1)\quad t = \frac{P^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\sqrt{(M+m)}} \int \frac{dZ}{(1 + b\cos Z)^2}.$$

Pour intégrer cette équation, je remarque que $\int \frac{dZ}{(1 + b\cos Z)^2} = \frac{b}{b^2 - 1} \times \frac{\sin Z}{1 + b\cos Z} - \frac{1}{b^2 - 1}\int \frac{dZ}{1 + b\cos Z}$. Supposons qu'en effet $\int \frac{dZ}{(1 + b\cos Z)^2} = \frac{A\sin Z}{1 + b\cos Z} + B\int \frac{dZ}{1 + b\cos Z}$; & différencions cette derniere équation; l'on aura $\frac{dZ}{(1 + b\cos Z)^2} = \frac{A\cos Z\, dZ}{1 + b\cos Z} + \frac{Ab\sin^2 Z\, dZ}{(1 + b\cos Z)^2} + \frac{B\, dZ}{1 + b\cos Z}$; d'où l'on tire $(A + Bb)\cos Z + Ab + B - 1 = 0$. Maintenant, faisons nuls *singulatim* les termes multipliés par cos Z, & ceux qui ne sont pas multipliés par cos Z, l'on aura $A + Bb = 0$; $Ab + B - 1 = 0$; d'où l'on tire $B = -\frac{1}{b^2 - 1}$; $A = \frac{b}{b^2 - 1}$; & par conséquent l'intégrale précédente est démontrée.

Il reste à intégrer la quantité $\int \frac{dZ}{1 + b\cos Z}$. Pour y parvenir, soit $\cos Z = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; l'on aura $\sin Z = \frac{2x}{1 + x^2}$; $dZ\cos Z = \frac{2dx(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$; $dZ = \frac{2dx}{1 + x^2}$; $1 + b\cos Z = \frac{1 + b + (1 - b)x^2}{1 + x^2}$; $\frac{dZ}{1 + b\cos Z} = \frac{2dx}{1 + b + (1 - b)x^2}$. Soit

d'ailleurs, $\frac{2dx}{1+b+(1-b)x^2} = \frac{A\,dx}{\sqrt{(1+b)}+x\sqrt{(b-1)}} + \frac{B\,dx}{\sqrt{(1+b)}-x\sqrt{(b-1)}}$, l'on aura, en comparant terme à terme, $A = B = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$; donc

$$\int\frac{2dx}{1+b+(1-b)x^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{(1+b)}+x\sqrt{(b-1)}} + \int\frac{dx}{\sqrt{(1+b)}-x\sqrt{(b-1)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(b+1)}}\left(\frac{\log(\sqrt{(1+b)}+x\sqrt{(b-1)})}{\sqrt{(b-1)}} - \frac{\log(\sqrt{(1+b)}-x\sqrt{(b-1)})}{\sqrt{(b-1)}}\right) =$$

$\frac{1}{\sqrt{(b^2-1)}}\log\left(\frac{\sqrt{(1+b)}+x\sqrt{(b-1)}}{\sqrt{(1+b)}-x\sqrt{(b-1)}}\right)$; & comme l'intégrale doit être nulle lorsque $\sin Z = 0$, & par conséquent lorsque $x = 0$, il n'y a point de constante à ajouter. Si l'on substitue maintenant à x sa valeur $\frac{\sqrt{(1-\cos Z)}}{\sqrt{(1+\cos Z)}}$; l'on aura $\int\frac{dZ}{1+b\cos Z} =$

$\frac{1}{\sqrt{(b^2-1)}}\log\left(\frac{1+b\cos Z}{b+\cos Z-\sin Z\sqrt{(b^2-1)}}\right)$; d'où l'on conclura, attendu que d'ailleurs $P^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}\times a^{\frac{3}{2}}(b^2-1)^{\frac{3}{2}}$,

$$(2)\ t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(M+m)}}\left(b\sqrt{(b^2-1)}\times\frac{\sin Z}{1+b\cos Z} + \log\left(\frac{b+\cos Z-\sin Z\sqrt{(b^2-1)}}{1+b\cos Z}\right)\right).$$

Il ne reste plus maintenant qu'à éliminer $\sqrt{(M+m)}$ dans cette derniere équation. Pour y parvenir, supposons qu'au lieu de décrire une Hyperbole, le projectile décrive une Parabole dont la distance périhélie $= 1$; l'on aura en général (§. 432)

$$t = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{(M+m)}}\left(\tfrac{1}{4}\text{tang}^3\tfrac{1}{2}Z + \tfrac{3}{4}\text{tang}\tfrac{1}{2}Z\right);$$

Mais dans le cas où $\text{tang}\frac{1}{2}Z = 1$; $t = 109{,}6153$ jours; donc $\sqrt{(M+m)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{109{,}6153}$; donc

$$(3)\ t = \frac{3\times109{,}6153}{4\sqrt{2}}a^{\frac{3}{2}}\left(b\sqrt{(b^2-1)}\times\frac{\sin Z}{1+b\cos Z} + \log\left(\frac{b+\cos Z-\sin Z\sqrt{(b^2-1)}}{1+b\cos Z}\right)\right).$$

Cette derniere équation a lieu pour tous les corps qui circulent autour du Soleil.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les mouvemens dans l'Hyperbole. En général, ces mouvemens sont de peu d'usage en Astronomie. Je ne connois guere que le cas des orbites troublées (§. 871) où ces mouvemens soient de quelque considération.

L'équation (4) pourroit servir à déterminer plus exactement que nous ne l'avons fait dans le §. 871, l'instant où une Comete se dégage de la sphere de commune attraction; il faudroit seulement multiplier le second terme par un coefficient $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M'}}$, M étant la masse du Soleil, & M' la masse du corps qu'il faut supposer au centre de commune attraction (§. 865).

TABLE

DES MOUVEMENS PARABOLIQUES DES COMETES,

Par M. Bochart de Saron, de l'Académie des Sciences.

J'ai cru que le Lecteur verroit avec plaisir une Table des Mouvemens Paraboliques des Cometes, calculée par M. de Saron, sous une forme un peu différente de celle que j'ai donnée (§. 447), & qu'il a bien voulu me permettre de publier.

Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du logarithme de A.
5·639815	0·477121	9·134775	0·477420	9·381885	0·478050
7·826611	122	9·148947	440	9·393395	100
8·016713	123	9·162161	460	9·404237	150
8·116501	124	9·174331	480	9·414570	200
8·236383	126	9·186402	500	9·424492	250
8·308507	0·477128	9·197620	0·477520	9·433972	0·478300
8·367720	130	9·208244	540	9·443187	350
8·466317	135	9·218425	560	9·451773	400
8·533543	140	9·228110	580	9·460132	450
8·584752	145	9·237448	600	9·468271	500
8·626162	0·477150	9·246341	0·477620	9·476038	0·478550
8·660[illegible]91	155	9·254945	640	9·483580	600
8·690887	160	9·263136	660	9·490852	650
8·740695	170	9·271086	680	9·497911	700
8·781202	180	9·278730	700	9·504731	750
8·815537	0·477190	9·286168	0·477720	9·511378	0·478800
8·845049	200	9·293310	740	9·517815	850
8·870951	210	9·300250	760	9·524073	900
8·894134	220	9·306948	780	9·530150	950
8·915059	230	9·313493	800	9·536076	0·479000
8·934173	0·477240	9·319853	0·477820	9·541835	0·479050
8·951847	250	9·32[illegible]020	840	9·547460	100
8·968115	260	9·[illegible]1968	860	9·552945	150
8·997185	280	9·337778	880	9·558192	200
9·023134	300	9·343473	900	9·563509	250
9·046155	0·477320	9·349007	0·477920	9·568616	0·479300
9·057116	340	9·354386	940	9·573603	350
9·086102	360	9·359634	960	9·578481	400
9·103503	380	9·364800	980	9·583267	450
9·119728	400	9·369791	0·478000	9·587939	500

Logarithmes de A.	Nombres à fouftraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à fouftraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à fouftraire du Logarith. de A.
9·592515	0·479550	9·772988	0·482600	9·931846	0 488150
9·596993	600	9·777032	700	9·934967	300
9·601405	650	9·781016	800	9·938048	450
9·605826	700	9·784932	900	9·941093	600
9·609953	750	9·788782	0·483000	9·944098	750
9·614089	0·479800	9·792568	0·483100	9·947069	0·488900
9·618184	850	9·796293	200	9·949997	0·489050
9·622194	900	9·799964	300	9·952906	200
9·626122	950	9·803576	400	9·955773	350
9·631057	0·480000	9·807133	500	9·958610	500
9·633798	0·480050	9·810635	0·483600	9·961412	0·489650
9·637560	100	9·814085	700	9·964182	800
9·641208	150	9·817489	800	9·966926	950
9·644800	200	9·820839	900	9·969637	0·490100
9·648380	250	9·824145	0·484000	9·972321	250
9·651906	0·480300	9·827432	0·484100	9·974975	0·490400
9·655338	350	9·830622	200	9·977598	550
9·658748	400	9·833791	300	9·980201	700
9·662096	450	9·836919	400	9·982726	850
9·665386	500	9·840015	500	9·985324	0·491000
9·668638	0·480550	9·843060	0·484600	9·988680	0·491200
9·671852	600	9·846058	700	9·991994	400
9·675011	650	9·849038	800	9·995261	600
9·678127	700	9·851980	900	9·998492	800
9·681205	750	9·854864	0·485000	0·001683	0·492000
9·684240	0·480800	9·859148	0·485150	0·004832	0·492200
9·687231	850	9·863352	300	0·007943	400
9·690192	900	9·867497	450	0·011014	600
9·693105	950	9·871555	600	0·014056	800
9·695985	0·481000	9·875552	750	0·017058	0·493000
9·701633	0·481100	9·879481	0·485900	0·020025	0·493200
9·707155	200	9·883350	0·486050	0·022962	400
9·712536	300	9·887156	200	0·025866	600
9·717800	400	9·890898	350	0·028734	800
9·722937	500	9·894588	500	0·031573	0·494000
9·727966	0·481600	9·898224	0·486[illegible]50	0·034376	0·494200
9·732890	700	9·901806	[illegible]00	0·037156	400
9·737702	800	9·905333	9[illegible]	0·039905	600
9·742423	900	9·908810	0·487100	0·042629	800
9·747042	0·482000	9·912236	250	0·045323	0·495000
9·751575	0·482100	9·915613	0·487400	0·047989	0·495200
9·756021	200	9·918944	550	0·050628	400
9·760379	300	9·922234	700	0·053239	600
9·764656	400	9·925479	850	0·055824	800
9·768851	500	9·928684	0·488000	0·058392	0·496000

Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.
0.060937	0.496200	0.165837	0.506300	0.265332	0.519800
0.063445	400	0.168434	600	0.267229	0.520100
0.065936	600	0.171008	900	0.269115	400
0.068406	800	0.173561	0.507200	0.270991	700
0.070854	0.497000	0.176092	500	0.272872	0.521000
0.073[illegible]78	0.497200	0.178601	0.507800	0.275330	0.521400
0.075679	400	0.181091	0.508100	0.277785	800
0.078059	600	0.183560	400	0.280222	0.522200
0.080422	800	0.186009	700	0.282640	600
0.082759	0.498000	0.188438	0.509000	0.285045	0.523000
0.085093	0.498200	0.190847	0.509300	0.287432	0.523400
0.087385	400	0.193238	600	0.289801	800
0.089665	600	0.195611	900	0.292157	0.524200
0.091925	800	0.197965	0.510200	0.294496	600
0.094166	0.499000	0.200302	500	0.296819	0.525000
0.096309	0.499200	0.202621	0.510[illegible]00	0.299127	[illegible]525400
0.098608	400	0.204922	0.511100	0.301421	800
0.100799	600	0.207206	400	0.303700	0.526200
0.102972	800	0.209475	700	0.305965	600
0.105128	0.500000	0.211727	0.512000	0.308215	0.527000
0.107270	0.500200	0.213966	0.512300	0.310450	0.527400
0.109390	400	0.216182	600	0.312674	800
0.111503	600	0.218387	900	0.314882	0.528200
0.113596	800	0.220[illegible]77	0.513200	0.317079	600
0.115670	0.501000	0.222750	500	0.319262	0.529000
0.118247	0.501250	0.224909	0.513800	0.321432	0.529400
0.120799	500	0.227054	0.514100	0.323589	800
0.123326	750	0.229186	400	0.325733	0.530200
0.125832	0.502000	0.2[illegible]302	700	0.327865	600
0.128317	25[illegible]	0.233105	0.515000	0.329986	0.531000
0.130780	0.502500	0.235394	300	0.332092	0.531400
0.133221	750	0.237570	600	0.334191	800
0.135645	0.503[illegible]0	0.239632	900	0.336276	0.532200
0.138042	[illegible]	0.241[illegible]	0.516200	0.338345	600
0.140422	500	0.243[illegible]18	500	0.340402	0.533000
0.142784	0.503750	0.24[illegible]743	0.516800	0.342463	0.533400
0.145130	0.504000	0.[illegible]754	0.517100	0.344802	800
0.147449	250	0.[illegible]49753	400	0.346532	0.534200
0.149741	500	0.251741	700	0.348550	600
0.152034	750	0.253717	0.518000	0.350560	0.535000
0.154312	0.505000	0.255680	0.518300	0.352556	0.535400
0.156563	250	0.257634	600	0.354544	800
0.158798	5[illegible]	0.259574	900	0.356521	0.536200
0.161015	750	0.261501	0.519200	0.358489	600
0.163218	0.506000	0.263423	500	0.360452	0.537000

Logarithmes de A.	Nombres à fouftraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à fouftraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à fouftraire du Logarith. de A.
0.362393	0.537400	0.457995	0.559500	0.551928	0.586000
0.364333	800	0.459939	0.560000	0.554202	6700
0.366262	0.538200	0.461873	500	0.556467	7400
0.368182	600	0.463801	0.561000	0.558724	8100
0.370093	0.539000	0.465720	500	0.560972	8800
0.372464	0.539500	0.467633	0.562000	0.563211	0.589500
0.374830	0.540000	0.469537	500	0.565442	0.590200
0.377181	500	0.471435	0.563000	0.567665	0900
0.379512	0.541000	0.473325	500	0.569877	1600
0.381833	500	0.475207	0.564000	0.572085	2300
0.384141	0.542000	0.477083	0.564500	0.574284	0.593000
0.386436	500	0.478949	0.565000	0.576475	3700
0.388719	0.543000	0.480811	500	0.578657	4400
0.390989	500	0.482666	0.566000	0.580832	5100
0.393247	0.544000	0.484513	500	0.583000	5800
0.395492	0.544500	0.486355	0.567000	0.585160	0.596500
0.397726	0.545000	0.488188	500	0.587312	7200
0.399948	500	0.490015	0.568000	0.589458	7900
0.402158	0.546000	0.491836	500	0.591596	8600
0.404357	500	0.493645	0.569000	0.593727	9300
0.406545	0.547000	0.495459	0.569500	0.595850	0.600000
0.408721	500	0.497259	0.570000	0.597967	0700
0.410887	0.548000	0.499055	500	0.600077	1400
0.413042	500	0.500845	0.571000	0.602180	2100
0.415186	0.549000	0.502628	500	0.604276	2800
0.417320	0.549500	0.504404	0.572000	0.606366	0.603500
0.419443	0.550000	0.506881	2700	0.608449	4200
0.421557	500	0.509347	3400	0.610821	5000
0.423659	0.551000	0.512803	4100	0.613185	5800
0.425753	500	0.514245	4800	0.615541	6600
0.427836	0.552000	0.516678	0.575500	0.617889	0.607400
0.429910	500	0.519098	62[illegible]0	0.620230	8200
0.431975	0.553000	0.521509	[illegible]	[illegible]622559	9000
0.434029	500	0.523909	[illegible]	.624883	9800
0.436075	0.554000	0.526298	[illegible]	[illegible]27198	0.610600
0.438111	0.554500	0.528678	[illegible]	[illegible]29506	1400
0.440139	0.555000	0.531047	[illegible]00	[illegible]31806	2200
0.442154	500	0.533406	0.58[illegible]	634099	3000
0.444166	0.556000	0.535754	[illegible]	[illegible]636383	3800
0.446167	500	0.538093	[illegible]	[illegible].638662	4600
0.448160	0.557000	0.540422	0.58[illegible]	[illegible]40931	0.615400
0.450144	500	0.542740	[illegible]	0.643196	6200
0.452119	0.558000	0.545053	3900	0.645452	7000
0.454086	500	0.547353	4600	0.647701	7800
0.456045	0.559000	0.549645	5300	0.649942	8600

Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logarith. de A.
0.652178	0.619400	0.765408	0.663000	0.894821	0.719500
0.654406	0.620200	0.767841	4000	0.898071	0.721000
0.656628	1000	0.770268	5000	0.901312	2500
0.658844	1800	0.772688	6000	0.904546	4000
0.661052	2600	0.775102	7000	0.907772	5500
0.663255	0.623400	0.777511	0.668000	0.910990	0.727000
0.665449	4200	0.779915	9000	0.914200	8500
0.667639	5000	0.782297	0.670000	0.917404	0.730000
0.670367	6000	0.785182	1200	0.920599	1500
0.673085	7000	0.788049	2400	0.923787	3000
0.675793	0.628000	0.790895	0.673600	0.926968	0.734500
0.678492	9000	0.793739	4800	0.930142	6000
0.681182	0.630000	0.796577	6000	0.933309	7500
0.683863	1000	0.799406	7200	0.936468	9000
0.686535	2000	0.802227	8400	0.939621	0.740500
0.689196	0.633000	0.805041	0.679600	0.942767	0.742000
0.691850	4000	0.807848	0.680800	0.945906	3500
0.694494	5000	0.810647	2000	0.949039	5000
0.697131	6000	0.813439	3200	0.952165	6500
0.699759	7000	0.816223	4400	0.955284	8000
0.702377	0.638000	0.819000	0.685600	0.958390	0.749500
0.704989	9000	0.821770	6800	0.961504	0.751000
0.707592	0.640000	0.824534	8000	0.964604	2500
0.710185	1000	0.827290	9200	0.967698	4000
0.712773	2000	0.830040	0.690400	0.970786	5500
0.715352	0.643000	0.832782	0.691600	0.973868	0.757000
0.717923	4000	0.835519	[illegible]200	0.976944	8500
0.720486	5000	0.838248	4000	0.980014	0.760000
0.723042	6000	0.840972	5200	0.983078	1500
0.725591	7000	0.843688	6400	0.986125	3000
0.728131	0.648000	0.846398	0.697600	0.989188	0.764500
0.730664	9000	0.849102	8800	0.992235	6000
0.733191	0.650000	0.851800	0.700000	0.995275	7500
0.735710	1000	0.855153	1500	0.998311	9000
0.738222	2000	0 853517	3000	1.001341	0.770500
0.740725	0.653000	0.861862	0.704500	1.004365	0.772000
0.743225	4000	0.865198	6000	1.008389	4000
0.745717	5000	0.868525	7500	1.012404	6000
0.748200	6000	0.871842	9000	1.016409	8000
0.7[illegible]0678	7000	0.875150	0.710500	1.020405	0.780000
0.753149	0.658000	0.878450	0.712000	1.024392	0.782000
0.755614	9000	0.881741	3500	1.028370	4000
0.758072	0.6 9000	0.885024	5000	1.032340	6000
0.760524	1000	0.888302	6500	1.036300	8000
0.762969	2000	0.891564	8000	1.040252	0.790000

Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logar. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logar. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logar. de A.	Logarithmes de A.	Nombres à soustraire du Logar. de A.
1.044195	0.792000	1.159034	0.852000	1.293534	0.926000	1.453295	1.018000
1.048130	4000	1.162762	4000	1.298858	9000	1.460098	22000
1.052057	6000	1.166477	6000	1.304173	0.932000	1.466891	26000
1.055976	8000	1.170196	8000	1.309479	5000	1.473673	30000
1.059886	0.800000	1.173906	0.860000	1.314777	8000	1.480446	34000
1.063788	0.802000	1.178535	0.862500	1.320067	0.941000	1.487209	1.038000
1.067676	4000	1.183156	5000	1.325348	4000	1.493963	42000
1.071570	6000	1.187768	7500	1.330621	7000	1.5007[illegible]	46000
1.075449	8000	1.192372	0.870000	1.335886	0.950000	1.507441	50000
1.079321	0.810000	1.196968	2500	1.341143	3000	1.514166	54000
1.083185	0.812000	1.201555	0.875000	1.346392	0.956000	1.520882	1.058000
1.087048	4000	1.206135	7500	1.351634	9000	1.527590	62000
1.090892	6000	1.210706	0.880000	1.356868	0.962000	1.534289	66000
1.094734	8000	1.215270	2500	1.362095	5000	1.540979	70000
1.098569	0.820000	1.219826	5000	1.367314	8000	1.547660	74000
1.102397	0.822000	1.224377	0.887500	1.372525	0.971000	1.554333	1.078000
1.106219	4000	1.228916	0.890000	1.37773[illegible]	4000	1.560998	82000
1.1100[illegible]7	6000	1.23[illegible]	2500	1.382928	7000	1.567655	86000
1.113841	8000	1.237976	5000	1.388118	0.980000	1.574302	90000
1.117642	0.830000	1.242496	7500	1.393302	3000	1.580945	94000
1.121436	0.832000	1.247008	0.900000	1.398479	0.986000	1.587579	1.098700
1.125224	4000	1.251510	2500	1.403649	9000	1.594204	1.102000
1.129011	6000	1.256011	5000	1.408812	0.992000	1.600823	06000
1.132780	8000	1.260502	7500	1.413967	5000	1.607433	10000
1.136549	0.840000	1.264[illegible]7	0.910000	1.419110	8000	1.614037	14000
1.140312	0.842000	1.269465	0.912500	1.424263	1.001000	1.620633	1.118000
1.144068	4000	1.273936	5000	1.429399	04000	1.627222	22000
1.147819	6000	1.278401	7500	1.434532	07000	1.633805	26000
.151563	8000	1.282860	0.9[illegible]000	1.43965[illegible]	10000	1.640380	30000
1.155301	0.850000	1.283201	3000	[illegible].445467	140[illegible]	1.646949	34000

La Table precedente est fondée, ainsi que celle du §. 447, sur l'équation (1) du §. 434, ces deux Tables peuvent se servir mutuellement de vérification. Voici l'usage de la Table de M. de Saron.

Au logarithme de t, c'est-à-dire, au logarithme du tems écoulé depuis le passage par le Périhélie, l'on ajoutera le nombre suivant,

8·5621884, si t exprime des jours;

5·4038259, si t exprime des minutes horaires,

L'on ajoutera pareillement le complément arithmétique du logarithme de $D^{\frac{3}{2}}$; D étant la distance périhélie de la Comete particuliere pour laquelle on calcule; cette somme sera le logarithme de la quantité A. L'on cherchera dans la Table, le nombre qu'il faut soustraire de ce logarithme; le résultat sera le logarithme de la Tangente de la demi-anomalie.

00053073

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 17 May, 2019